Lösung zum Übungsblatt 7

Abgabe bis 12. Februar 2025

Aufgabe 1: Kreise der Länge 4 — 5 Punkte

Betrachte folgendes Problem. Finde für einen Graphen $G = (V, E)$ eine möglichst kleine Menge $X \subseteq V$, sodass $G[V \setminus X]$ keinen Kreis der Länge 4 als Subgraph enthält.

Benutze Courcelles Theorem, um zu zeigen, dass dieses Problem in FPT liegt, wenn man die Baumweite als Parameter benutzt.

Lösung 1:

Da es sich hierbei um ein Optimierungsproblem handelt, wenden wir Courcelles Theorem für Optimierung an. Das Prädikat $\varphi(X)$ gibt dabei an, ob eine Knotenmenge X eine valide Lösung ist, optimiert wird nach der Lösungsgröße $\alpha(X) = |X|$.

Eine Lösung X ist gültig, genau dann wenn es keinen Kreis der Länge vier im Graphen ohne X gibt, d.h. wenn es keine Knotenmenge gibt, die keine Knoten von X enthält und vier paarweise ungleiche Knoten enthält, welche einen Kreis bilden. In MSO_2 ausgedrückt ergibt sich also:

$\varphi(X) = \forall C \subseteq V : \text{has4Circle}(C) \rightarrow (\exists v \in X : v \in C)$

mit $\text{has4Circle}(C) = \exists v_1, v_2, v_3, v_4 \in C : (v_1 \neq v_2, v_1 \neq v_3, v_1 \neq v_4, v_2 \neq v_3, v_2 \neq v_4, v_3 \neq v_4) \rightarrow (\text{adj}(v_1,v_2) \wedge \text{adj}(v_2, v_3) \wedge \text{adj}(v_3, v_4) \wedge \text{adj}(v_4, v_1))$

und $\text{adj}(x, y) = \{x,y\} \in E = \exists e \in E : \text{inc}(x,e) \wedge \text{inc}(y,e)$ die Adjazenz zweier Knoten ausdrückt.

Nach Courcelles Theorem ist die minimale Lösung dann in $\mathcal{O}(f(|\varphi|, t) \cdot n)$ mit Baumweite t und berechenbarem f. Da die Länge von φ konstant ist, hängt f nur von der Baumweite ab, somit ist das Problem in FPT nach der Baumweite.

Aufgabe 2: Chordale Graphen — 5 + 5 = 10 Punkte

Teilaufgabe (a) Sei $G = (V, E)$ ein chordaler Graph und seien $a,b \in V$ zwei unterschiedliche nicht-adjazente Knoten. Sei S ein inklusionsminimaler Separator, der a und b trennt (d.h. keine echte Teilmenge von S ist ein Separator, der a von b trennt). Zeige, dass S eine Clique bildet.

Lösung 2a:

Sei G ein chordaler Graph. Angenommen der inklusionsminimale Separator S zwischen a und b ist keine Clique, d.h. es gibt nicht adjazente Knoten $s_1, s_2 \in S$. Seien G_a und G_b die Zusammenhangskomponenten von a und b im Graphen ohne S. Aufgrund der Inklusionsminimalität von S, gibt es Pfade von a (und auch b) zu sowohl s_1 als auch s_2. Sei demnach P_a der kürzeste Pfad zwischen s_1 und s_2 in G_a und P_b der kürzeste Pfad zwischen s_1 und s_2 in G_b. Da sich die von S getrennten Komponenten nicht schneiden, ergibt die Vereinigung von P_a und P_b einen Kreis. Dieser Kreis hat mindestens Länge 4 und enthält keine Sehne, weshalb G nicht chordal sein kann.

Teilaufgabe (b) Ein Knoten heißt *simplizial*, wenn seine Nachbarschaft eine Clique bildet. Zeige, dass jeder chordale Graph entweder eine Clique ist, oder zwei nicht-adjazente simpliziale Knoten enthält. Du darfst Teilaufgabe (a) verwenden.

Lösung 2b:

Wir betrachten beide Fälle separat:

Teil 1: Sei G eine Clique. Dann hat G keine nicht adjazenten Knoten. Also hat G auch nicht (min.) zwei nicht-adjazente simpliziale Knoten.

Teil 2: Sei G keine Clique. Dann existieren zwei Knoten $a, b \in V$, die nicht adjazent sind und es gibt einen inklusionsminimalen Separator S, der a und b trennt.
(*Da a und b nicht adjazent sind, gibt es diesen Separator auf jeden Fall. Im Zweifelsfalle besteht er aus allen Knoten von G außer a und b selbst. Und wenn es einen Separator gibt, gibt es natürlich auch einen inklusionsminimalen Separator.*)

Das bedeutet, der Separator unterteilt G in drei disjunkte Teilmengen A, B und S mit $a \in A$ und $b \in B$. Außerdem gibt es keine Kanten zwischen A und B. Aus Aufgabe 2a ist desweiteren bekannt, dass S eine Clique bildet.

Betrachte nun A. (Das folgende gilt analog für B) Für A genügt es nun, einen simplizialen Knoten zu finden, da für B dasselbe gilt und somit am Ende zwei simpliziale Knoten vorliegen.

Wir zeigen per vollständiger Induktion über die Anzahl von Knoten in A, dass A einen simplizialen Knoten enthält.

I. V.: $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{n}$, A enthält mindestens einen simplizialen Knoten.

I. A.: $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{n} = \mathbf{1}$

Dann kann der einzige Knoten $a \in A$ nur mit Knoten aus S verbunden sein, welches eine Clique bildet. Also ist S simplizial.

I. S.: $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{n} + \mathbf{1}$

Betrachte den Knoten $a \in A$, der durch den Separator S von $b \in B$ getrennt wurde.

Fall 1: a ist simplizial. Dann haben wir einen simplizialen Knoten.

Fall 2: a ist nicht simplizial. Dann ist $A \cup S$ keine Clique. Es gibt also wieder zwei Knoten $a', b' \in A \cup S$, die nicht adjazent sind und einen inklusionsminimalen Separator S' der den Graphen

$G[A \cup S]$ in zwei disjunkte Mengen A' mit $a' \in A'$ und B' mit $b' \in B'$ aufteilt. Mindestens eine der beiden Mengen ist disjunkt zum ursprünglichen S, denn wenn $A' \cap S \neq \emptyset$ und $B' \cap S \neq \emptyset$, so gäbe es eine direkte Kante zwischen einem Element aus A' und einem aus B' (da S eine Clique ist) und S' könnte kein Separator sein. Sei A' die zu S disjunkte Menge. Diese hat keine Kanten zu B sondern nur zu $A \cup S$. Da weder A', B' noch S' leer sind, ist $1 \leq |A'| < |A' \cup S'| < n$ und laut Induktionsvoraussetzung gibt es einen simplizialen Knoten in $A' \subseteq A$.

Da das gleiche auch für B gilt, gibt es mindestens zwei simpliziale Knoten.

Aufgabe 3: Induzierte Matchings **15 Punkte**

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Matching $M \subseteq E$ ist ein *induziertes Matching*, wenn es eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ gibt, sodass V' das Matching M induziert (also $G[V'] = (V', M)$). Das Problem Induced Matching besteht darin, für einen Graphen G und einen Parameter k zu entscheiden, ob es ein induziertes Matching der Größe k gibt.

Zeige, dass Induced Matching $W[1]$-vollständig ist.

Lösung 3:

Enthalten in W[1]. Um zu zeigen, dass Induced Matching in W[1] ist, reduzieren wir auf WCS[1]. Für einen gegebenen Graph G müssen wir also einen Schaltkreis mit Weft höchstens 1 konstruieren, sodass G ein induziertes Matching mit k Kanten genau dann hat wenn der Schaltkreis sich durch k wahre Inputs erfüllen lässt.

Im Schaltkreis erstellen wir für jede Kante e des Graphen einen Eingangsknoten I_e der jeweils mit einem Negationsknoten verbunden wird. In der nächsten Schicht werden die Negationsknoten von zwei Kanten e_1 und e_2 genau dann durch einen Oder-Knoten verbunden, wenn sich die Kanten einen Endpunkt teilen oder es eine andere Kante gibt, die einen Endpunkt von e_1 mit einem Endpunkt von e_2 verbindet. Alle Oder-Knoten sind mit einem Und-Knoten verbunden, welcher mit dem Ausgangsknoten verbunden ist.

Für ein induziertes Matching der Größe k finden wir eine erfüllende Belegung mit k wahren Variablen, indem wir genau die Eingangsknoten der Matchingkanten auf Wahr setzen. Dies funktioniert, da die Oder-Knoten die Bedingung für ein induziertes Matching genau abbildet. Analog ergeben die Kanten der auf Wahr gesetzten Eingangsknoten einer erfüllenden Belegung auch ein induziertes Matching.

W[1]-Schwere. Wir reduzieren von Independent Set, einem bekannt W[1]-vollständigem Problem. Sei G der gegebene Graph einer Independent Set Instanz. Wir konstruieren einen Graphen G' als Induced Matching Instanz indem wir G kopieren und zusätzlich für jeden Knoten

$v_i \in v_1, \ldots, v_n = V(G)$ einen weiteren Knoten v_i' einfügen und diesen mit v_i und den Nachbarn von v_i verbinden.

Falls G eine unabhängige Menge X der Größe k enthält so bildet $\{(x,x')|x \in X\}$ in G' ein induziertes Matching der Größe k. Für die andere Richtung sei M ein induziertes Matching der Größe k in G'. Für jede Kante $m \in M$ gilt, dass einer der Endpunkte in der Menge $v_1, \ldots, v_n$ ist. Wir finden somit eine Menge $X \in V(G)$ mit $|X| = |M|$ indem wir für jede Kante aus M einen Endpunkt wählen. Da die Kanten des Matchings sich keine Knoten teilen und die Endpunkte unterschiedlicher Matchingkanten jeweils unabhängig sein müssen ist X ebenfalls eine unabhängige Menge.

Aufgabe 4: Funktionale Abhängigkeiten **5 + 10 = 15 Bonuspunkte**

(Diese Aufgabe baut auf Vorlesung 13 vom 3. Februar auf)

Teilaufgabe (a) Gib eine parametrisierte Reduktion von UNIQUE auf $\mathrm{FD}_{\text{FIXED}}$ an.

Teilaufgabe (b) Gib eine parametrisierte Reduktion von $\mathrm{FD}_{\text{FIXED}}$ auf FD an.

Aufgabe 5: INDEPENDENT FAMILY **5 + 5 + 5 = 15 Bonuspunkte**

Im Folgenden wollen wir die $W[3]$-Vollständigkeit eines natürlich vorkommenden Problems aus dem Bereich Datenbanken zeigen. Das Problem INDEPENDENT FAMILY kann informell als INDEPENDENT SET auf Hypergraphen betrachtet werden, wobei jedoch nicht einzelne (hoffentlich nicht durch (Hyper-)Kanten verbundene) Knoten ausgewählt werden, sondern Knotenmengen.

Formal besteht die Eingabe INDEPENDENT FAMILY aus den beiden Mengen von Mengen $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in 2^U$ über einem Universum U und einem Parameter k. Die beiden Mengen können also jeweils als die Kantenmenge eines Hypergraphs gesehen werden. Es soll entschieden werden, ob es k Hyperkanten $S_1, \dots, S_k \in \mathcal{S}$ gibt, sodass es keine Hyperkante $t \in \mathcal{T}$ gibt, die in $\bigcup_{i=1}^k S_i$ enthalten ist.

Darüber hinaus definieren wir MULTICOLORED INDEPENDENT FAMILY wie folgt: Gegeben sind der Parameter k und die Mengen $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_k$ sowie $\mathcal{T}$ von Mengen über einem Universum U (das heißt $\mathcal{S}$ wurde in k Farben aufgeteilt). Es soll entschieden werden ob es Hyperkantenkanten $S_1 \in \mathcal{S}_1, \dots, S_k \in \mathcal{S}_k$, sodass es keine Hyperkante $t \in \mathcal{T}$ gibt, die in $\bigcup_{i=1}^k S_i$ enthalten ist.

Teilaufgabe (a) Zeige, dass INDEPENDENT FAMILY und MULTICOLORED INDEPENDENT FAMILY unter parametrisierter Reduktion äquivalent sind.

Teilaufgabe (b) Zeige, dass INDEPENDENT FAMILY in $W[3]$ ist.

Teilaufgabe (c) Zeige, dass MULTICOLORED INDEPENDENT FAMILY $W[3]$-schwer ist.

Tipp: WEIGHTED ANTIMONOTONE 3-NORMALIZED SATISFIABILITY (siehe Vorlesung vom 3. Februar) eignet sich gut für die Reduktion