Lösung zum Übungsblatt 6

Abgabe bis 29. Januar 2025

Aufgabe 1: Verschiedenes zu Baumweite **5 + 5 Punkte**

Teilaufgabe (a) Seien X_i, X_k und X_j Bags einer Baumzerlegung eines Graphen G, sodass X_k auf dem Pfad zwischen X_i und X_j liegt. Zeige, dass $X_i \setminus X_k$ durch X_k von $X_j \setminus X_k$ separiert wird.

Lösung 1a:

Seien X_i, X_k und X_j Bags einer Baumzerlegung eines Graphen G, sodass X_k auf dem Pfad zwischen X_i und X_j liegt. Sei $a \in X_i \setminus X_k$ und $b \in X_j \setminus X_k$. Angenommen X_k separiert a und b nicht. Dann gibt es einen Pfad $P = s_1, \dots, s_\ell$ mit $s_1 = a$ und $s_\ell = b$ der keine Knoten aus X_k verwendet.

Seien $X(v)$ die Bags in denen ein Knoten v vorkommt. Per Induktion lässt sich zeigen, dass die Bags $\bigcup_{i=1}^{\ell} X(s_i)$ einen zusammenhängenden Teilbaum ergeben. Für s_1 gilt dies nach Definition der Baumzerlegung und falls es für die Knoten $s_1, \dots, s_i$ gilt, dann auch für $s_1, \dots, s_{i+1}$, da es wegen der Kante $\{s_i, s_{i+1}\}$ einen Bag mit s_i und s_{i+1} geben muss und sich somit die beiden zusammenhängenden Teilbäume schneiden.

Jeder zusammenhängende Teilbaum der X_i und X_j enthält, muss allerdings X_k enthalten. Dies steht im Widerspruch dazu, dass P keine Knoten aus X_k enthält und somit $X_k \notin \bigcup_{i=1}^{\ell} X(s_i)$.

Teilaufgabe (b) Sei G ein Graph mit Baumweite höchstens k mit n Knoten und m Kanten. Zeige, dass $m \leq n \cdot k$.

Lösung 1b:

Sei G ein Graph mit Baumweite höchstens k. Wir behaupten, dass G dann einen Knoten v mit Grad höchstens k enthält. Diesen finden wir, indem wir ausgehend von einem Blatt einer schönen Baumzerlegung mit Weite höchstens k den ersten forget-Knoten suchen. Der Knoten, der in diesem Bag vergessen wird kann nur zu den höchstens k Knoten in diesem Bag Kanten haben. Da G nach Löschen von v immer noch Baumweite höchstens k hat, können wir den gesamten Graphen löschen indem wir iterativ Knoten mit Grad höchstens k löschen. Es ergibt sich $m \leq n \cdot k$.

Aufgabe 2: Dominierende Mengen **10 Punkte**

Eine Knotenmenge $D \subseteq V$ in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine *dominierende Menge*, wenn für jeden Knoten $v \in V$ gilt, dass v oder ein Nachbar von v in D enthalten ist. Das Problem Connected Dominating Set besteht darin, eine möglichst kleine dominierende Menge D zu finden, sodass der von D induzierte Teilgraph zusammenhängend ist.

Gegeben sei ein Graph G zusammen mit einem Parameter k und einer Baumzerlegung der Weite k. Gib einen FPT-Algorithmus für diese Parametrisierung von Connected Dominating Set an.

Hinweis: Benutze ein dynamisches Programm auf der Baumzerlegung. Die Verwendung von Courcelles Theorem ist nicht erlaubt.

Lösung 2:

Wir geben ein DP auf einer schönen Baumzerlegung an, welches die Größe der kleinsten verbundenen dominierenden Menge (CDS) findet.

Für jeden Bag verwalten wir Teillösungen, die die Knoten des Bags in drei Mengen partitionieren. Teillösungen für den Bag B haben die Partitionen $X_0 \uplus X_1 \uplus X_2 = B$. Die Mengen der Partitionierung haben folgende Bedeutung:

X_0: Knoten, die sich in dem CDS befinden. Diese Menge ist zusätzlich partitioniert in Partitionen, die angeben, welche Knoten durch den aktuellen oder vorangegangene Bags bereits in einer Verbindung stehen.

X_1: Knoten, die sich nicht in dem CDS befinden, jedoch von diesem abgedeckt werden.

X_2: Knoten, die sich nicht in dem CDS befinden und bis zu diesem Bag noch nicht davon abgedeckt wurden.

Weiterhin wird für jede Partitionierung die Größe s des CDS bis zu diesem Bag gespeichert.

Jede Teillösung eines Bags basiert auf den Teillösungen der Kindknoten. Für die Teillösungen des aktuellen Bags ist nach Bag-Typ zu unterscheiden:

- Forget:
  - *Knoten war in X_0:* Wenn der Knoten in einer Partition mit anderen Knoten in X_0 war, dann kann dieser gelöscht werden. Ansonsten ist die Teillösung ungültig, da das CDS nicht mehr zusammenhängend ist und auch nie wieder verbunden werden kann (die Bags jedes Knoten ergeben ja einen Teilbaum).
  - *Knoten war in X_1:* Der Knoten kann gelöscht werden und die aktuelle Teillösung bleibt bestehen.
  - *Knoten war in X_2:* Die Teillösung kann gelöscht werden, da der Knoten nicht mehr zur dominierenden Menge hinzugefügt werden kann und auch nicht mehr von ihr abgedeckt werden wird.
- Introduce: Hier entstehen aus jeder Teillösung zwei neue Teillösungen, für verschiedene Möglichkeiten, zu X_0 hinzuzufügen.

  - *Nicht hinzufügen zu X_0:* Die Zuordnung zu X_1 oder X_2 ergibt sich implizit.
  - *Hinzufügen zu X_0:* s wird um 1 erhöht. Die Knotenmengen X_1 und X_2 verändern sich, da Knoten, die vorher in X_2 waren, nun durch ihre Verbindung zu dem neuen Knoten in X_1 sind. Ein Knoten kann nicht von X_1 nach X_2 wandern. Die Partitionierung innerhalb von X_0 verändert sich, indem der neue Knoten der Partition zugeordnet wird, zu der er eine Verbindung hat. Gegebenenfalls werden so mehrere Partitionen zu einer.

- Join: Seien (X_0', X_1', X_2', s') und $(X_0'', X_1'', X_2'', s'')$ jeweils Teillösungen der beiden Kindknoten des Join-Bags. Teillösungen, bei denen X_0' und X_0'' gleich sind, werden paarweise zusammengefasst. Die neue CDS-Größe s berechnet sich durch $s = s' + s'' - |X_0|$. Die jeweilige Menge X_1 ergibt sich durch die Vereinigung der Mengen X_1' und X_1''. Die Menge X_2 ergibt sich aus X_0 und X_1. Es kann passieren, dass durch den Join-Vorgang Teillösungen entstehen, die sich nicht in der Zuordnung in die Mengen X_0, X_1 und X_0 unterscheiden und die auch die Knoten in X_0 gleich partitionieren. In solchen Fällen sollte die Lösung ausgewählt werden, die das kleinste s hat.

Für den Wurzelknoten des Baums ist es wichtig, dass nur Teillösungen akzeptiert werden können, für die gilt, dass $|X_2| = 0$ und außerdem die Partitionierung von X_0 aus nur einer Partition besteht.

Analyse: Die Menge der Teillösungen pro Bag lässt sich durch die Partitionierung in drei Mengen mit 3^{k+1} abschätzen. Bis die Teillösungen eingeschränkt wurden, kann es sein, dass die gleiche Partitionierung mehrfach in einem Bag vorkommt. Der Worst-Case tritt ein, wenn im Join-Bag viele Vereinigungen stattfinden. Die Anzahl der Vereinigungen übersteigt nicht die Größe der Potenzmenge. Somit beträgt die Anzahl der Teillösungen im Worst-Case nicht mehr als $2^{(3^{k+1})}$.

Die Baumgröße der Baumzerlegung ist nach oben beschränkt durch n.

Da die Behandlung der Teillösungen eine Laufzeitkomplexität hat, die nur von der Teillösungenanzahl und der Teillösungengröße abhängt, gilt, dass die Behandlung jedes Bags eine Laufzeitkomplexität von $O(f(k))$ hat, wobei f eine berechenbare Funktion ist.

Es ergibt sich eine Laufzeit in $O(f(k) \cdot n)$.

Aufgabe 3: Baumweite planarer Graphen — 10 Punkte

In planaren Graphen gilt die folgende Aussage.

Satz (Planar Separator Theorem)**.** *In jedem planaren Graphen $G = (V, E)$ kann die Knotenmenge V in drei Teilmengen $S \uplus V_1 \uplus V_2 = V$ partitioniert werden, sodass*

- *S separiert V_1 von V_2 (es gibt keine Kante von einem Knoten aus V_1 zu einem Knoten aus V_2),*
- *$|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3}|V|$ und*

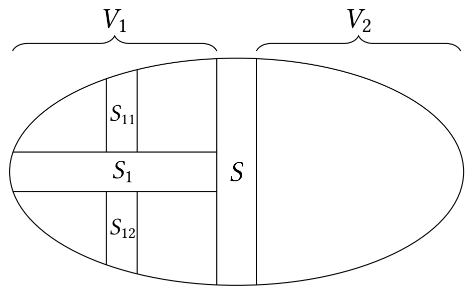

Abbildung 1: Aufteilung des Graphen. S ist die Separatormenge des gesamten Graphen. S_1 ist eine Separatormenge von V_1. Somit ist $S \cup S_1$ eine Separatormenge von $V_1 \cup S$. Die Bag-Größe wird immer größer, je tiefer der Bag in der Baumzerlegung liegt.

- $|S| \leq 4\sqrt{n}$.

Zeige, dass planare Graphen mit n Knoten Baumweite $O(\sqrt{n})$ haben.

Lösung 3:

Wir zeigen, wie eine Baumzerlegung mit Baumweite $O(\sqrt{n})$ aufgebaut werden kann.

Zuerst teilen wir die Knotenmenge wie im Satz in V_1, V_2 und S. Der Wurzelknoten der Baumzerlegung bekommt einen Bag mit den maximal $4\sqrt{n}$ Knoten in S zugeteilt. Den Rest des Baumes bauen wir folgendermaßen auf:

- Ein Baum-Knoten v mit einem Bag S, der V_1 von V_2 separiert, wobei $|V_1|,|V_2| > 4\sqrt{n}$, hat zwei Kinder. Das linke Kind erhält einen Bag $S \cup S_1$. Hier steht S_1 für einen Separator entsprechend des Satzes, der V_1 in S_1, V_{11} und V_{12} separiert. Der Satz kann angewendet werden, weil der Teilgraph von V_1 ebenso planar ist wie der gesamte Graph. Das rechte Kind wird äquivalent für V_2 erstellt.

- Ein Baum-Knoten v mit einem Bag S, der V_1 von V_2 separiert wird, wobei die Mengen nur noch $4\sqrt{n}$ Knoten enthalten, hat ebenfalls zwei Kinder, die jeweils einen Bag mit den Knoten $S \cup V_1$ beziehungsweise $S \cup V_2$ haben. Hat nur eine der von v separierten Knotenmengen weniger als $4\sqrt{n}$ Knoten, dann wird das andere Kind wie oben aufgebaut.

In Abbildung 1 wird die beschriebene Aufteilung des Graphen visualisiert.

Insgesamt haben wir also einen Baum wie in Abbildung 2 exemplarisch dargestellt.

Es ist also zu zeigen,

- dass die Anzahl von Knoten in jedem Bag in $O(\sqrt{n})$ liegt.

- dass die Baumzerlegung tatsächlich eine gültige Baumzerlegung ist, d.h.

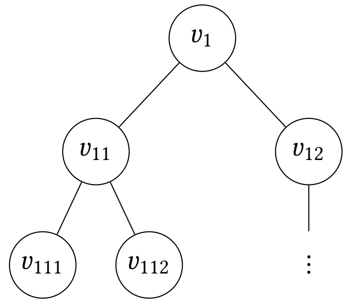

Abbildung 2: Visualisierung des Baums. Der Knoten v_1 hat einen Bag mit den Knoten einer separierenden Menge S entsprechend des Theorems. Die Kinder v_{11} und v_{12} haben Bags mit den Knotenmengen $S \cup S_1$ und $S \cup S_2$, wobei S_1 und S_2 separierende Mengen sind, die bei erneuter Anwendung des Theorems auf die Knoten in v_1 beziehungsweise v_2 gefunden werden können. v_{111} enthält dann die Knoten $S \cup S_1 \cup S_{11}$, wobei S_{11} für einen Separator in einer der Knotenmengen steht, die von S_1 separiert werden.

- Jeder Knoten muss in einem Bag sein.
- Für jede Kante muss es einen Bag geben, in dem beide Endpunkte enthalten sind.
- Die Baum-Knoten mit den Bags eines Knoten müssen für jeden Knoten einen Teilbaum ergeben.

Behauptung: In jedem Bag sind nur $O(\sqrt{n})$ viele Knoten.
Beweis: Der Bag der Wurzel besteht aus den Knoten in S, wobei $|S| \leq 4\sqrt{n}$. Der Bag jedes weiteren Knoten enthält die Knoten X vom Bag des Elternknotens, sowie einen Separator der Knoten, die von X separiert werden. Das bedeutet, dass die Bags der Knoten in den tiefsten Ebenen des Baums am größten sind, und es genügt zu zeigen, dass deren Größe in $O(\sqrt{n})$ liegt. Die Größe dieser Bags lässt sich mit der geometrischen Reihe folgendermaßen nach oben abschätzen:

$$
\begin{aligned}
&4\sqrt{n} + 4\sqrt{\frac{2}{3}n} + 4\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}n} + \dots + 4\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{depth} n} \\
&= 4\left(\sqrt{n} + \sqrt{\frac{2}{3}n} + \sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}n} + \dots + \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{depth} n}\right) \\
&< 4\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{k} n} \\
&= 4\sqrt{n}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{k}} \\
&= 4\sqrt{n}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{3}}^{k} \\
&= 4\cdot\frac{\sqrt{n}}{1-\sqrt{\frac{2}{3}}} \\
&\in O(\sqrt{n})
\end{aligned}
$$

□

Behauptung: Jeder Knoten ist in einem Bag.
Beweis: Folgt direkt aus der Konstruktion der Baumzerlegung. Die Knotenmenge wird zwar in viele Teilmengen aufgeteilt, aber für jede wird ein Bag erstellt. Es gibt keinen Knoten, der nicht in einem Bag ist. □

Behauptung: Für jede Kante muss es einen Bag geben, in dem beide Endpunkte enthalten sind.
Beweis: Sei $e = \{a,b\} \in E$ eine Kante des Graphen. Wenn a und b Teil der gleichen separierenden Menge sind, kommen sie in einem Knoten im Inneren des Baumes vor. Sind sie Teil von verschiedenen separierenden Mengen, dann müssen sie ebenfalls in einem gemeinsamen Knoten vorkommen, da es nicht sein kann, dass es Kanten zwischen separierenden Mengen aus verschiedenen disjunkten Teilbäumen gibt. Wenn a oder b nicht Element einer der separierenden Knotenmengen ist, dann kommen sie in einem der Blätter des Baums vor. □

Behauptung: Die Baum-Knoten mit den Bags eines Knoten müssen für jeden Knoten einen Teilbaum ergeben.
Beweis: Wenn ein Knoten irgendwann Teil einer separierenden Knotenmenge S_i wird, dann ist der Knoten im Bag des dazugehörigen Knotens sowie in den Bags aller Knoten des Teilbaums enthalten.

Dies ergibt einen Teilbaum. Wenn ein Knoten andernfalls nicht Teil einer der separierenden Knotenmengen ist, dann ist er nur im Bag von genau einem Blattknoten, was jedoch ebenfalls ein Teilbaum ist. □

Aufgabe 4: Baumweiten-DP **5 Bonuspunkte**

In dieser Aufgabe sollst du ein dynamisches Programm auf einer Baumzerlegung implementieren um das Problem INDEPENDENT SET zu lösen. Auf der Webseite sind hierfür 5 Instanzen bestehend aus einem Graphen und einer dazugehörigen Baumzerlegung zu finden.

Gib für jede der Instanzen die Größe des größten Independent Set an und erkläre kurz wie du den Ansatz aus der Vorlesung umgesetzt und gegebenenfalls optimiert hast.

Eingabeformat Graph (`.gr`): die erste Zeile `p tw n m` besteht aus einem `p` und einem `tw`, gefolgt von der Anzahl Knoten `n` der Anzahl Kanten `m` des Netzwerks. Die folgenden `m` Zeilen beschreiben jeweils eine Kante und enthalten zwei durch ein Leerzeichen getrennte Dezimalzahlen zwischen 1 und n. Da die Graphen ungerichtet sind, wird jede Kante $\{a,b\}$ nur einmal definiert.

Beispiel:

```
p tw 5 6
1 2
1 3
2 3
2 4
3 4
2 5
```

Eingabeformat Baumzerlegung (`.td`): Die erste Zeile beginnt mit `s td N W n`, wobei `N` die Anzahl der Bags der Baumzerlegung, `W` die maximale Bag-Größe und `n` die Knotenzahl des ursprünglichen Eingabegraphen bezeichnet. Anschließend folgen genau `N` Zeilen der Form `b i v1 v2 ...`, wobei `i` die Nummer des Bags (1 ≤ `i` ≤ `N`) ist und `v1`, `v2`, … die Knoten des ursprünglichen Graphen sind, die in diesem Bag enthalten sind.

Alle weiteren Zeilen definieren die Kanten in der Baumzerlegung. Jede Zeile enthält zwei ganze Zahlen `i j` (1 ≤ `i` < `j` ≤ `N`), die eine Kante zwischen Bag `i` und Bag `j` angeben. Diese Kanten bilden einen Baum auf den `N` Bags.

Beispiel:

```
s td 3 3 5
b 1 1 2 3
b 2 2 3 4
b 3 2 5
1 2
2 3
```

Lösung 4:

Graph	**Lösung**
DBLP-v1	12
Chebyshev2	684
memplus	7686
scc_infect-dublin	36
bio-grid-mouse	595