Lösung zum Übungsblatt 4

Abgabe bis 18. Dezember 2024

Aufgabe 1: Vertex Cover in bipartiten Graphen — $7 + 7 = 14$ Punkte

Teilaufgabe (a) Zeige, dass die LP-Relaxierung des ILPs zu Vertex Cover eine ganzzahlige optimale Lösung hat, wenn der Graph bipartit ist.

Hinweis: Zeige, dass die zugehörige Matrix total unimodular ist.

Lösung 1a:

Wir müssen zeigen, dass Matrix A des LPs total unimodular ist, d.h. dass jede quadratische Submatrix B Determinante -1, 0, oder 1 hat. Im LP gibt es zwei Arten von Nebenbedingungen: erstens muss jede Variable nicht negativ sein ($x_v \geq 0$ für alle $v \in V$), zweitens muss die Summe der Variablen von zwei zur gleichen Kante inzudenten Knoten positiv sein ($x_u + x_v \geq 1$ f.a. $\{u,v\} \in E$). Wir können somit annehmen, dass die Matrix des LPs aus einer Diagonalmatrix (erste Nebenbedingung) und einer Inzidenzmatrix (zweite Nebenbedingung) besteht. Wir verwenden vollständige Induktion über die Seitenlänge von B.

Induktionsanfang: $n = 1$
Die Determinante kann entweder nur 0 oder 1 sein, weil die Einträge in der Matrix nur 0 oder 1 annehmen können.

Induktionsschritt: $n \to n + 1$
Wir nehmen an, dass jede Submatrix kleiner als $B_{n+1 \times n+1}$ total Unimodular ist und betrachten die folgenden Fälle:

Fall 1: In B gibt es eine Zeile oder Spalte, die keine 1 enthält (Eine Kante ist mit keinem der Knoten verbunden). Daraus folgt $det(B) = 0$.

Fall 2: In B gibt es eine Zeile, die genau eine 1 enthält (Eine Kante ist nur mit einem der Knoten verbunden). Nach dem Laplace-Entwicklungssatz gilt dann $det(B) = det(B')$ und nach Induktionsvoraussetzung gilt $det(B') \in \{-1,0,+1\}$.

Fall 3: Alle Zeilen in B besitzen genau zwei $1en$. Das heißt, B ist eine Submatrix der Inzidenzmatrix. Weil der Graph bipartit ist, gibt es zwei disjunkte Mengen, in denen von jeder Kante jeweils ein Endknoten enthalten ist. Man kann daher die Spalten so neuordnen, dass jede Submatrix B' und B'' jeweils nur eine 1 pro Zeile besitzt:

$$B = \left(\begin{array}{c|c} B' & B'' \end{array} \right).$$

Beide Submatrizen besitzen in jeder Spalte exakt eine 1. Wir können nun die Spalten in B'' von den Spalten in B' abziehen und erhalten einen Nullvektor. Somit sind die Spalten von B linear abhängig und es gilt $det(B) = 0$.

Teilaufgabe (b) Benutze den Dualitätssatz, um den Satz von Kőnig zu beweisen. Der Satz von Kőnig besagt, dass das minimale Vertex Cover und das maximale Matching in einem bipartiten Graphen die gleiche Kardinalität haben.

Lösung 1b:

Sei $G = (V,E)$ ein bipartiter Graph mit $|V| = n$ und $|E| = m$ und $A_{n\times m}$ die dazugehörige Inzidenzmatrix. Wir betrachten zunächst die folgenden Linearen Programme.

Maximum Matching: Für $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ ist $x_i = 0$, wenn die Kante e_i nicht ins Matching genommen wird und $x_i = 1$ wenn doch. Für jeden Knoten in G (eine Zeile in A) darf maximal eine Kante genommen werden. Daraus ergibt sich $\sum_{i=1}^{m} a_{ji} \cdot x_i \leq 1$ für $j \in [n]$. Sei $x = (x_1 \ \cdots \ x_m)^T$. Für das LP ergeben sich somit die folgenden Zielfunktion sowie Bedingungen:

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^T x \\ & Ax \leq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ \forall e \in E \quad & 0 \leq x_e \leq 1 \end{aligned}$$

Minimales Vertex Cover: Ähnlich wie oben sei $Y = \{y_1, \dots, x_n\}$ die Menge aller ausgewählten Knoten für das VC. Da eine Kante mit mindestens einem Knoten abgedeckt werden muss, gilt hier $\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot y_j \geq 1$ für $i \in [n]$. Sei $y = (y_1 \ \cdots \ y_n)^T$. Für das LP ergibt sich:

$$\begin{aligned} \min \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^T y \\ & A^T y \geq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ \forall v \in V \quad & 0 \leq y_v \leq 1 \end{aligned}$$

Sowohl A als auch A^T sind total unimodular wegen $det(A) = det(A^T)$. Wenn also eine Lösung existiert, ist diese ganzzahlig und optimal.

Wählen wir für $c = (1 \cdots 1)^T$ und $b = (1 \cdots 1)^T$, können wir den Dualitätssatz anwenden, indem wir die beiden Probleme wie folgt umschreiben:
Maximales Matching: $\max c^T x$ mit $Ax \leq b$ und $x \geq 0$
Minimales Vertex Cover: $\min b^T x$ mit $A^T y \geq c$ und $y \geq 0$.
Schaut man sich die LPs genauer an, folgt mithilfe des Dualitätssatzes, dass das Maximum vom Matching gleich dem Minimum des VC ist. Somit stimmt die Kardinalität von deren optimalen Lösungen überein.

Aufgabe 2: Max Sat 5 + 11 = 16 Punkte

Gegeben sei eine boolesche Formel φ (in KNF) mit n Variablen und m Klauseln. Bei dem Problem Max Sat soll eine Variablenbelegung gefunden werden, die möglichst viele Klauseln erfüllt.

Teilaufgabe (a) Gib sichere Reduktionsregeln an, die einen Kern mit maximal $2k$ Klauseln und k Variablen liefern, wobei k die Lösungsgröße ist.

Hinweis: Benutze den Satz von Hall, um die Anzahl der Variablen zu reduzieren.

Satz (Hall's Theorem)**.** *Sei $G = (V_1 \cup V_2, E)$ ein bipartiter Graph. Es gibt genau dann ein Matching in G, das alle Knoten von V_1 abdeckt, wenn $|X| \leq |N(X)|$ für jede Teilmenge $X \subseteq V_1$. Andernfalls kann eine inklusionsminimale Menge $X \subseteq V_1$ mit $|X| > |N(X)|$ effizient gefunden werden.*

Lösung 2a:

Für ein Max Sat-Problem M sei V die Menge der Variablen und C die Menge der Klauseln. Wir konstruieren den Graph $G = (V \cup C, E)$ mit

$$\{x_1, x_2\} \in E \Leftrightarrow \text{Variable } x_1 \text{ kommt in Klausel } x_2 \text{ vor (negiert oder nicht).}$$

Damit ist G ein bipartiter Graph mit den Partitionen V und C mit $|V| = n$ und $|C| = m$.

Wenn es ein Matching in G gibt, das alle Knoten aus V abdeckt, dann kann daraus eine Lösung der Größe n erzeugt werden. Dabei wird jede Variable so gesetzt, dass ihre gematchte Klausel wahr wird. Da keine Variablen auf die gleiche Klausel gematched werden, hat die Lösung mindestens die Größe n. Wenn $n > k$ gilt, dann gibt es damit eine Lösung größer als k und wir können abbrechen. Nimm also an, dass es kein solches Matching gibt. Mit Hall's Theorem folgt, dass dann effizient eine inklusionsminimale Menge $X \subseteq V$ mit $|X| > |N(X)|$ gefunden werden kann.

Reduktionsregel 1, falls $n > k$: Finde eine inklusionsminimale Menge $X \subseteq V$ mit $|X| > |N(X)|$. Mit der Max Sat-Instanz M' mit $V' = V \setminus X$, $C' = C \setminus N(X)$ und $k' = k - |N(X)|$ gilt dann

$$M \text{ ist lösbar in Größe } k \;\Leftrightarrow M' \text{ ist lösbar in Größe } k' = k - |N(X)|.$$

Im Folgenden werden beide Richtungen der Äquivalenz gezeigt. Außerdem zeigen wir, dass nach linear vielen Schritten $n \leq k$ erreicht ist.

- M ist lösbar in Größe $k \Rightarrow M'$ ist lösbar in Größe $k' = k - |N(X)|$:

  Da die Variablen in X in keinen Klauseln außer in $N(X)$ vorkommen, kann das Entfernen von X und $N(X)$ eine Lösung um nicht mehr als $|N(X)|$ erfüllte Klauseln schlechter werden lassen.

- M ist lösbar in Größe $k \Leftarrow M'$ ist lösbar in Größe $k' = k - |N(X)|$:

  Wählen wir ein beliebiges $x \in X$ und betrachten $X^* = X \setminus \{x\}$.

  Da X inklusionsminimal ist, gilt $|Y| \leq |N(Y)|$ für alle Teilmengen $Y \subseteq X^*$. Nach Hall's Theorem gibt es daher ein Matching in G, das alle Knoten aus X^* abdeckt. Die Variablen in X^* werden dabei mit $|X^*|$ Klauseln gemachted, die wegen $X^* \subset X$ alle aus $N(X)$ stammen müssen. Da $|X^*| = |X| - 1$ und $|X| > |N(X)|$ gilt $|X^*| \geq |N(X)|$ und die Klauseln in X^* werden genau auf $N(X)$ gemachted.

  Daher können die Variablen in X so gewählt werden, dass sie alle Klauseln in $N(X)$ wahr werden lassen. Fügen wir diese Variablenbelegung zu der Variablenbelegung der Lösungsgröße $k - |N(x)|$ von M' hinzu, erhalten wir eine Lösung der Größe k in M.

- n wird reduziert, wenn die Regel angewendet wird:

  Da $|X| > |N(X)|$ ist, gilt $X \neq \emptyset$ und die Variablenanzahl wird bei jeder Anwendung reduziert. Daher wird $n \leq k$ nach linear vielen Anwendungen erreicht.

Reduktionsregel 2, falls $m > 2k$: Betrachte eine beliebige Varaiblenbelegung B und ihr Komplement $\overline{B}$. Falls eine Klausel von B nicht erfüllt wird, so muss sie von B' erfüllt werden. Somit lässt sich immer eine Belegung finden, die zumindest die Hälfte aller Klauseln erfüllt. Falls also $m > 2k$ gilt, liegt eine JA-Instanz vor und es kann abgebrochen werden.

Nach erschöpfender Anwendung der Reduktionsregeln erhalten wir daher einen Kern mit maximal k Variablen und $2k$ Klauseln.

Teilaufgabe (b) Gib einen FPT-Algorithmus für die folgende Parametrisierung „above $\frac{m}{2}$" mit Parameter k an: Gibt es eine Variablenbelegung, die mindestens $\frac{m}{2} + k$ Klauseln erfüllt?

Hinweis: Betrachte Klauseln mit nur einer Variable getrennt von Klauseln mit mindestens 2 Variablen und zeige zunächst, dass viele größere Klauseln dazu führen, dass es eine große Lösung gibt.

Lösung 2b:

Für jedes Paar von zwei unären Klauseln, in denen die selbe Variable negiert und nicht negiert vorkommt, ist für jede Belegung von Variablen eine Klausel wahr und eine falsch. Daher können wir eine neue Probleminstanz betrachten, in der beide Klauseln entfernt sind und darin eine um eins kleinere Lösung suchen, wobei die Klauselanzahl in der neuen Instanz $m' = m - 2$ ist. Daher suchen wir eine Lösung der Größe $\frac{m}{2} + k - 1 = \frac{m'}{2} + k$; die Instanz wird also etwas kleiner und der

Parameter bleibt unverändert. Das Finden von Paaren und Erzeugen von neuen Instanzen ist in Polynomialzeit möglich und wir erzeugen durch erschöpfende Anwendung eine Instanz in der jede Variable nur auf eine Art und Weise in unären Klauseln vorkommt und in der wir daher eine Variablenbelegung finden können, die alle unären Klauseln erfüllt.

Sei u die Anzahl der unären Klauseln, g die Anzahl der größeren (nicht unären) Klauseln und $m = u + g$ die Anzahl aller Klauseln in dieser Instanz. Falls $u \geq \frac{m}{2} + k$, gibt es eine Lösung der Größe mindestens $\frac{m}{2} + k$ und unser Algorithmus gibt wahr zurück. Daher können wir im Folgenden davon ausgehen, dass $u < \frac{m}{2} + k$ ist.

Nun wenden wir die probabilistische Methode an, um eine untere Schranke für die maximale Anzahl an erfüllbaren Klauseln zu finden. Dazu betrachten wir eine uniform zufällige Variablenbelegung und berechnen den Erwartungswert für die Anzahl von erfüllten Klauseln.

Sei für die Klausel $i = 1, \dots, m$ die Zufallsvariable T_i die Indikatorvariable, ob Klausel i erfüllt wird. Dann können wir auf die Anzahl der erfüllten Klauseln die Linearität des Erwartungswertes anwenden. Für unäre Klauseln ist $E[T_i] = \frac{1}{2}$ und für nicht unäre Klauseln $E[T_i] \geq \frac{3}{4}$. Wir erhalten

$$E\left[\sum_{i=1}^{m} T_i\right] = \sum_{i=1}^{m} E\left[T_i\right] \geq \frac{1}{2}u + \frac{3}{4}g = \frac{m}{2} + \frac{1}{4}g.$$

Es muss also eine Belegung geben, die mindestens $\frac{m}{2} + \frac{1}{4}g$ Klauseln erfüllt[1]. Falls $g \geq 4k$ ist, gibt es eine Lösung der Größe $\frac{m}{2} + k$ und unser Algorithmus gibt wahr zurück. Im Folgenden können wir daher davon ausgehen, dass $g < 4k$ ist.

Bilden wir die Summe der Beschränkungen für u und g:

$$\begin{aligned} u + g &< \frac{m}{2} + k + 4k \\ \Leftrightarrow m &< \frac{m}{2} + 5k \\ \Leftrightarrow \frac{m}{2} &< 5k \\ \Leftrightarrow m &< 10k \end{aligned}$$

Wir haben also noch $m < 10k$ Klauseln übrig und müssen bestimmen, ob $\frac{m}{2} + k < 6k$ dieser Klauseln erfüllbar sind. Da diese Anzahl der zu erfüllenden Klauseln nur noch von k abhängt, können wir die Reduktionsregeln aus Teilaufgabe (a) anwenden, um einen ausschließlich von k abhängigen Kern zu erhalten. Für diesen können wir offensichtlich per Brute Force in $\mathcal{O}(f(k))$ bestimmen, ob die gewünschte Anzahl von Klauseln erfüllbar ist.

[1] Es gilt $E[X] \geq k \Rightarrow \Pr[X \geq k] > 0$