Karlsruher Institut für Technologie

Übungsblatt 7

Abgabe bis 12. Februar 2025

Aufgabe 1: Kreise der Länge 4 — 5 Punkte

Betrachte folgendes Problem. Finde für einen Graphen $G = (V, E)$ eine möglichst kleine Menge $X \subseteq V$, sodass $G[V \setminus X]$ keinen Kreis der Länge 4 als Subgraph enthält.

Benutze Courcelles Theorem, um zu zeigen, dass dieses Problem in FPT liegt, wenn man die Baumweite als Parameter benutzt.

Aufgabe 2: Chordale Graphen — $5 + 5 = 10$ Punkte

Teilaufgabe (a) Sei $G = (V, E)$ ein chordaler Graph und seien $a, b \in V$ zwei unterschiedliche nicht-adjazente Knoten. Sei S ein inklusionsminimaler Separator, der a und b trennt (d.h. keine echte Teilmenge von S ist ein Separator, der a von b trennt). Zeige, dass S eine Clique bildet.

Teilaufgabe (b) Ein Knoten heißt *simplizial*, wenn seine Nachbarschaft eine Clique bildet. Zeige, dass jeder chordale Graph entweder eine Clique ist, oder zwei nicht-adjazente simpliziale Knoten enthält. Du darfst Teilaufgabe (a) verwenden.

Aufgabe 3: Induzierte Matchings — 15 Punkte

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Matching $M \subseteq E$ ist ein *induziertes Matching*, wenn es eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ gibt, sodass V' das Matching M induziert (also $G[V'] = (V', M)$). Das Problem Induced Matching besteht darin, für einen Graphen G und einen Parameter k zu entscheiden, ob es ein induziertes Matching der Größe k gibt.

Zeige, dass Induced Matching $W[1]$-vollständig ist.

Aufgabe 4: Funktionale Abhängigkeiten   5 + 10 = 15 Bonuspunkte

(Diese Aufgabe baut auf Vorlesung 13 vom 3. Februar auf)

Teilaufgabe (a) Gib eine parametrisierte Reduktion von Unique auf $\mathrm{FD}_{\mathrm{FIXED}}$ an.

Teilaufgabe (b) Gib eine parametrisierte Reduktion von $\mathrm{FD}_{\mathrm{FIXED}}$ auf FD an.

Aufgabe 5: Independent Family   5 + 5 + 5 = 15 Bonuspunkte

Im Folgenden wollen wir die $W[3]$-Vollständigkeit eines natürlich vorkommenden Problems aus dem Bereich Datenbanken zeigen. Das Problem Independent Family kann informell als Independent Set auf Hypergraphen betrachtet werden, wobei jedoch nicht einzelne (hoffentlich nicht durch (Hyper-)Kanten verbundene) Knoten ausgewählt werden, sondern Knotenmengen.

Formal besteht die Eingabe Independent Family aus den beiden Mengen von Mengen $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in 2^U$ über einem Universum U und einem Parameter k. Die beiden Mengen können also jeweils als die Kantenmenge eines Hypergraphs gesehen werden. Es soll entschieden werden, ob es k Hyperkanten $S_1, \dots, S_k \in \mathcal{S}$ gibt, sodass es keine Hyperkante $t \in \mathcal{T}$ gibt, die in $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ enthalten ist.

Darüber hinaus definieren wir Multicolored Independent Family wie folgt: Gegeben sind der Parameter k und die Mengen $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_k$ sowie $\mathcal{T}$ von Mengen über einem Universum U (das heißt $\mathcal{S}$ wurde in k Farben aufgeteilt). Es soll entschieden werden ob es Hyperkantenkanten $S_1 \in \mathcal{S}_1, \dots, S_k \in \mathcal{S}_k$, sodass es keine Hyperkante $t \in \mathcal{T}$ gibt, die in $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ enthalten ist.

Teilaufgabe (a) Zeige, dass Independent Family und Multicolored Independent Family unter parametrisierter Reduktion äquivalent sind.

Teilaufgabe (b) Zeige, dass Independent Family in $W[3]$ ist.

Teilaufgabe (c) Zeige, dass Multicolored Independent Family $W[3]$-schwer ist.

Tipp: Weighted Antimonotone 3-normalized Satisfiability (siehe Vorlesung vom 3. Februar) eignet sich gut für die Reduktion