Karlsruher Institut für Technologie

Übungsblatt 6

Abgabe bis 29. Januar 2025

Aufgabe 1: Verschiedenes zu Baumweite — 5 + 5 Punkte

Teilaufgabe (a) Seien X_i, X_k und X_j Bags einer Baumzerlegung eines Graphen G, sodass X_k auf dem Pfad zwischen X_i und X_j liegt. Zeige, dass $X_i \setminus X_k$ durch X_k von $X_j \setminus X_k$ separiert wird.

Teilaufgabe (b) Sei G ein Graph mit Baumweite höchstens k mit n Knoten und m Kanten. Zeige, dass $m \leq n \cdot k$.

Aufgabe 2: Dominierende Mengen — 10 Punkte

Eine Knotenmenge $D \subseteq V$ in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine *dominierende Menge*, wenn für jeden Knoten $v \in V$ gilt, dass v oder ein Nachbar von v in D enthalten ist. Das Problem Connected Dominating Set besteht darin, eine möglichst kleine dominierende Menge D zu finden, sodass der von D induzierte Teilgraph zusammenhängend ist.

Gegeben sei ein Graph G zusammen mit einem Parameter k und einer Baumzerlegung der Weite k. Gib einen FPT-Algorithmus für diese Parametrisierung von Connected Dominating Set an.

Hinweis: Benutze ein dynamisches Programm auf der Baumzerlegung. Die Verwendung von Courcelles Theorem ist nicht erlaubt.

Aufgabe 3: Baumweite planarer Graphen — 10 Punkte

In planaren Graphen gilt die folgende Aussage.

Satz (Planar Separator Theorem). *In jedem planaren Graphen $G = (V, E)$ kann die Knotenmenge V in drei Teilmengen $S \uplus V_1 \uplus V_2 = V$ partitioniert werden, sodass*

- *S separiert V_1 von V_2 (es gibt keine Kante von einem Knoten aus V_1 zu einem Knoten aus V_2),*
- *$|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3}|V|$ und*
- *$|S| \leq 4\sqrt{n}$.*

Zeige, dass planare Graphen mit n Knoten Baumweite $O(\sqrt{n})$ haben.

Aufgabe 4: Baumweiten-DP **5 Bonuspunkte**

In dieser Aufgabe sollst du ein dynamisches Programm auf einer Baumzerlegung implementieren um das Problem Independent Set zu lösen. Auf der Webseite sind hierfür 5 Instanzen bestehend aus einem Graphen und einer dazugehörigen Baumzerlegung zu finden.

Gib für jede der Instanzen die Größe des größten Independent Set an und erkläre kurz wie du den Ansatz aus der Vorlesung umgesetzt und gegebenenfalls optimiert hast.

Eingabeformat Graph (`.gr`): die erste Zeile `p tw n m` besteht aus einem p und einem tw, gefolgt von der Anzahl Knoten `n` der Anzahl Kanten `m` des Netzwerks. Die folgenden `m` Zeilen beschreiben jeweils eine Kante und enthalten zwei durch ein Leerzeichen getrennte Dezimalzahlen zwischen 1 und n. Da die Graphen ungerichtet sind, wird jede Kante $\{a,b\}$ nur einmal definiert.

Beispiel:

```
p tw 5 6
1 2
1 3
2 3
2 4
3 4
2 5
```

Eingabeformat Baumzerlegung (`.td`): Die erste Zeile beginnt mit `s td N W n`, wobei `N` die Anzahl der Bags der Baumzerlegung, `W` die maximale Bag-Größe und `n` die Knotenzahl des ursprünglichen Eingabegraphen bezeichnet. Anschließend folgen genau `N` Zeilen der Form `b i v1 v2 ...`, wobei `i` die Nummer des Bags ($1 \leq$ `i` $\leq$ `N`) ist und `v1`, `v2`, … die Knoten des ursprünglichen Graphen sind, die in diesem Bag enthalten sind.

Alle weiteren Zeilen definieren die Kanten in der Baumzerlegung. Jede Zeile enthält zwei ganze Zahlen `i j` ($1 \leq$ `i` $<$ `j` $\leq$ `N`), die eine Kante zwischen Bag `i` und Bag `j` angeben. Diese Kanten bilden einen Baum auf den `N` Bags.

Beispiel:

```
s td 3 3 5
b 1 1 2 3
b 2 2 3 4
b 3 2 5
1 2
2 3
```