Parametrisierte Algorithmen
Wintersemester 2024/2025
`scale.iti.kit.edu`

Übungsblatt 4

Abgabe bis 18. Dezember 2024

Aufgabe 1: Vertex Cover in bipartiten Graphen $\quad 7 + 7 = 14$ **Punkte**

Teilaufgabe (a) Zeige, dass die LP-Relaxierung des ILPs zu Vertex Cover eine ganzzahlige optimale Lösung hat, wenn der Graph bipartit ist.

Hinweis: Zeige, dass die zugehörige Matrix total unimodular ist.

Teilaufgabe (b) Benutze den Dualitätssatz, um den Satz von Kőnig zu beweisen. Der Satz von Kőnig besagt, dass das minimale Vertex Cover und das maximale Matching in einem bipartiten Graphen die gleiche Kardinalität haben.

Aufgabe 2: Max Sat $\quad 5 + 11 = 16$ **Punkte**

Gegeben sei eine boolesche Formel φ (in KNF) mit n Variablen und m Klauseln. Bei dem Problem Max Sat soll eine Variablenbelegung gefunden werden, die möglichst viele Klauseln erfüllt.

Teilaufgabe (a) Gib sichere Reduktionsregeln an, die einen Kern mit maximal $2k$ Klauseln und k Variablen liefern, wobei k die Lösungsgröße ist.

Hinweis: Benutze den Satz von Hall, um die Anzahl der Variablen zu reduzieren.

Satz (Hall's Theorem)**.** *Sei $G = (V_1 \cup V_2, E)$ ein bipartiter Graph. Es gibt genau dann ein Matching in G, das alle Knoten von V_1 abdeckt, wenn $|X| \leq |N(X)|$ für jede Teilmenge $X \subseteq V_1$. Andernfalls kann eine inklusionsminimale Menge $X \subseteq V_1$ mit $|X| > |N(X)|$ effizient gefunden werden.*

Teilaufgabe (b) Gib einen FPT-Algorithmus für die folgende Parametrisierung „above $\frac{m}{2}$“ mit Parameter k an: Gibt es eine Variablenbelegung, die mindestens $\frac{m}{2} + k$ Klauseln erfüllt?

Hinweis: Betrachte Klauseln mit nur einer Variable getrennt von Klauseln mit mindestens 2 Variablen und zeige zunächst, dass viele größere Klauseln dazu führen, dass es eine große Lösung gibt.