

# Übungsblatt 1

Abgabe bis 6. November 2024

## Organisatorisches:

- Für das Lösen der Übungsaufgaben habt ihr *zwei Wochen* Zeit.
- Die Bearbeitung soll möglichst in Zweiergruppen erfolgen.
- Die Abgabe der Lösungen als *schönes* PDF erfolgt per Email an `paramalgo_abgabe@lists.kit.edu`

## Aufgabe 1: Verschiedenes

3 · 2 = 6 Punkte

**Teilaufgabe (a)** Gibt es einen Unterschied zwischen  $\Theta(2^n)$  und  $2^{\Theta(n)}$ ? Wenn ja, welches der beiden wächst asymptotisch schneller?

**Teilaufgabe (b)** Sei  $T$  ein ungewurzelter Binärbaum, d.h.  $T$  enthält nur Knoten mit Grad 3 (innere Knoten) und mit Grad 1 (Blätter). Sei  $n_3$  die Anzahl der inneren Knoten und  $n_1$  die Anzahl der Blätter. Zeige, dass  $n_3 = n_1 - 2$  gilt.

**Teilaufgabe (c)** Gib zwei parametrisierte Probleme an, für die es genau dann einen FPT-Algorithmus gibt, wenn  $P = NP$ .

## Aufgabe 2: Verzweigungsvektor

2 + 3 = 5 Punkte

Diese Aufgabe baut auf der zweiten Vorlesung auf. Gib für die folgenden Rekurrenzen möglichst scharfe<sup>1</sup> obere Schranken der Form  $x^n$  an und beweise deren Korrektheit mittels Induktion.

$$f(n) = \begin{cases} 3 \cdot f(n-1), & n > 5 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \quad g(n) = \begin{cases} g(n-1) + g(n-2) + g(n-3), & n > 17 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

## Aufgabe 3: DOMINATING SET auf speziellen Graphen

4 + 5 + 3 Punkte

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Eine *dominierende Menge* ist eine Teilmenge  $X \subseteq V$ , sodass für jeden Knoten  $v \in V$  ein Knoten aus  $N[v] = \{v\} \cup N(v)$  in  $X$  enthalten ist. Das Problem DOMINATING

---

<sup>1</sup>3-4 Nachkommastellen sollen hier genügen

SET besteht darin, eine möglichst kleine Dominierende Menge in einem gegebenen Graphen zu berechnen.

**Teilaufgabe (a)** Gib einen polynomiellen Algorithmus an, der DOMINATING SET auf Bäumen löst. Gelingt es dir eine lineare Abhängigkeit der Laufzeit von der Graphgröße zu erhalten?

**Teilaufgabe (b)** Was ändert sich wenn wir stattdessen (für konstantes  $k$ ) eine möglichst kleine  $k$ -dominierende Menge finden möchten? Für eine  $k$ -dominierende Menge muss für jeden Knoten er selbst oder ein anderer Knoten in Distanz höchstens  $k$  ausgewählt werden.

**Teilaufgabe (c)** Wir betrachten nun DOMINATING SET auf Graphen mit Maximalgrad  $d$ . Gib einen FPT-Algorithmus für den kombinierten Parameter Lösungsgröße +  $d$  an.

## Aufgabe 4: Punkte und Geraden

7 Punkte

Gegeben seien eine Menge von  $n$  Punkten  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  in der Ebene, sowie ein Parameter  $k$ . Das Problem GERADENÜBERDECKUNG besteht darin zu entscheiden, ob es  $k$  Geraden gibt, sodass jeder Punkt  $p_i \in P$  auf mindestens einer der Geraden liegt. Gib einen FPT-Algorithmus für dieses parametrisierte Problem an.