Connected Vertex Cover in planaren Graphen

Gegeben einen planaren Graphen G und einen Parameter k, gibt es eine Knotenmenge $A \subseteq V$, mit $|A| \leq k$ sodass A ein Vertex Cover und $G[A]$ zusammenhängend ist?

Grobe Idee

Jede beliebige Lösung A partitioniert V in die Teilmengen A und $B = V \mid A$. Wir wissen ja schon, dass A höchstens k Knoten enthält. Unser konkretes Ziel besteht also darin, dafür zu sorgen, dass die Größe von B durch $f(k)$ beschränkt ist.

Die Planarität wird jetzt wie folgt ausgenutzt. Im Schnitt haben Knoten in planaren Graphen kleine Grade. Betrachte den Graphen, der von A und von den hochgradigen Knoten in B induziert wird. Da die Knoten in B hohe Grade haben müssen die Knoten in A kleine Grade haben um den Schnitt auszugleichen. Das sorgt aber dafür, dass A nur wenige Kanten abdecken kann. Daher kann B nicht viele hochgradige Knoten enthalten.

Wir werden dieses Argument für Knoten mit Grad mindestens 3 formalisieren. Danach muss man nur noch Knoten mit Grad 1 und 2 wegargumentieren, was wir mittels Reduktionsregeln tun.

Knoten mit Grad ≥ 3

Sei B' die Menge der Knoten mit Grad mindestens 3 in B. Betrachte den Teilgraphen H von G bestehend aus den Knoten $A \cup B'$, sowie den Kanten zwischen A und B. Da B ein Independent Set ist, haben die Knoten in B' auch in H mindestens Grad 3.

Angenommen $x = |B'|$ und seien n und m die Anzahl Knoten bzw. Anzahl Kanten in H. Dann gilt $m \geq 3x$. Jetzt ist H planar und bipartit, das heißt es gilt $m \leq 2n - 4$, wobei $n \leq x + k$. Damit erhalten wir insgesamt $3x \leq m \leq 2n - 4 \leq 2(x + k) - 4$, was sich zu $x \leq 2k - 4$ umstellt.

Zusatzbemerkung: Doppeltes Abzählen

Die Aussage, $n \leq 2n - 4$ in bipartiten planaren Graphen folgt aus Eulers Formel ($n + f - 2 = m$) mittels doppeltem Abzählen.

Da es keine ungeraden Kreise gibt, ist jede Facette zu mindestens 4 Kanten inzident. Weist man jeder Kante zwei Token zu (eins von jeder Facette), so hat man insgesamt mindestens $4f$ Token; also $2m \geq 4f$ und damit $f \leq m/2$.

Zusammen mit Eulers Formel erhält man also $m = n + f - 2 \leq n + m/2 - 2$. Umstellen nach m liefert $m/2 \leq n - 2$ und damit $m \leq 2n - 4$.

Knoten mit Grad *1*

Anders als bei Vertex Cover kann man Knoten mit Grad *1* nicht einfach löschen. Wir wissen zwar, dass sie nie in der optimalen Lösung vorkommen können, aber sie zu löschen und den Nachbarn auszuwählen stellt den Zusammenhang nicht sicher.

Was man aber machen kann: Wenn man einen Knoten v mit mehrere Nachbarn mit Grad *1* hat, dann kann man alle diese Nachbarn bis auf einen löschen.

Wir wissen dann, dass jeder Knoten in A nur maximal einen Grad *1* Nachbarn in B hat. Damit ist die Anzahl Grad *1* Knoten in B durch k beschränkt.

Knoten mit Grad *2*

Grad *2* Knoten braucht man tendenziell auch nicht ins Vertex Cover aufnehmen, außer es handelt sich um Cutvertices.

Grad *2* Cutvertex

Sei v ein Cutvertex mit Grad 2 und seien u und w seine Nachbarn. Wenn man v nicht auswählt, dann muss man u und w auswählen, was aber nicht zu einem zusammenhängenden Vertex Cover führen kann. Wir müssen v also auswählen.

Wir können v dann loswerden, indem wir den Knoten kontrahieren (lösche v und füge die Kante uw ein) und k um eins reduzieren.

Um zu zeigen, dass diese Regel sicher ist, betrachte (G, k) und die reduzierte Instanz $(G', k - 1)$. Dann:

- Sei A eine Lösung für (G, k), dann enthält diese Lösung v und mindestens einen der Knoten u oder w (angenommen G ist nicht sehr klein). Damit ist $A - v$ eine Lösung für $(G', k - 1)$:
    - Die neue Kante ist abgedeckt.
    - Alle anderen Kanten sind abgedeckt.
    - Wenn $G[A]$ zusammenhängend, dann auch $G'[A - v]$ zusammenhängend.
- Sei A eine Lösung für $(G', k - 1)$, dann liefert $A + v$ eine Lösung für (G, k).

Andere Grad *2* Knoten

Behauptung: Andere Grad *2* Knoten braucht man nie auswählen.

Sei v ein Grad *2* Knoten, der kein Cutvertex ist und sei A eine Lösung, die v enthält. Seien u und w wieder die Nachbarn von v. Damit $G[A]$ zusammenhängend ist, muss $u \in A$ oder $w \in A$ gelten.

Betrachte zunächst den Fall, dass $u \in A$ und $w \notin A$. Dann hat w einen Nachbarn w' (da v kein Cutvertex ist) und es muss $w' \in A$ gelten (da sonst ww' nicht abgedeckt wäre). Offensichtlich ist $A - v + w$ weiterhin ein Vertex Cover und dank $w' \in A$ ist es auch zusammenhängend.

Wenn $u, w \in A$, dann ist offensichtlich $A - v$ ebenfalls ein Vertex Cover. Es könnte aber sein, dass es nicht zusammenhängend ist. Dann sind aber u und v in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten in $G[A]$. Betrachte nun einen Kreis C in G auf dem v (und damit u und w) liegt. Wenn u und w in unterschiedlichen Komponenten von $G[A]$ liegen, dann gibt es auf C drei konsekutive Knoten a, b und c, sodass $b \notin A$, $a, c \in A$ und a in der Zusammenhangskomponente von u und c in der von w. Damit ist $A - v + b$ wieder ein zusammenhängendes Vertex Cover.

Das ergibt nun folgende Reduktionsregel: Ersetze den Konten v durch zwei Grad 1 Knoten v_1 und v_2, die zu u bzw. w verbunden sind.

Anzahl Grad 2 Knoten

Nach erschöpfender Anwendung der beiden obigen Reduktionsregeln bleibt kein Knoten mit Grad 2 übrig.

Zusammenfassung

Damit erhalten wir insgesamt, dass B höchstens k Knoten mit Grad 1 und höchstens $2k$ Knoten mit höherem Grad enthalten kann. Damit ist die Instanz unlösbar, falls sie nach Anwendung aller Reduktionsregeln noch mehr als $4k$ Knoten enthält ($3k$ für B, k für A).