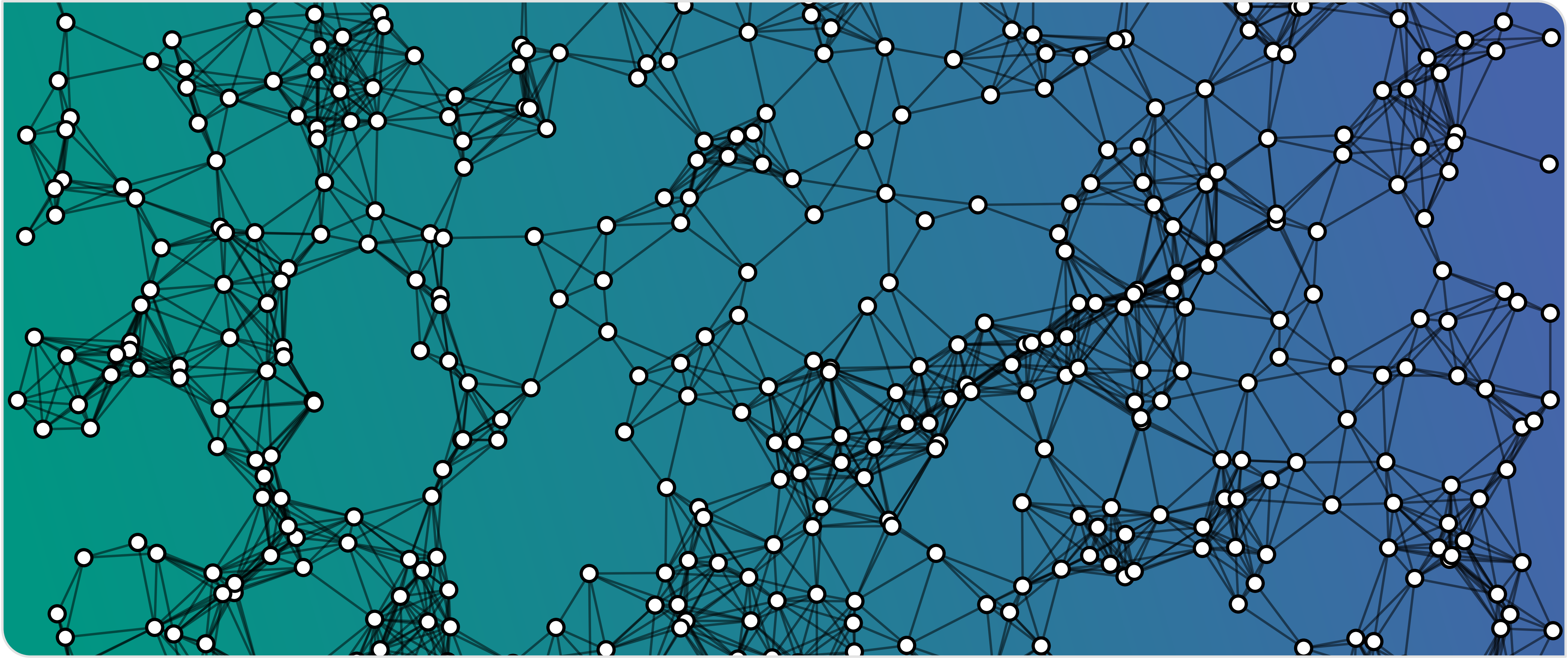
Parametrisierte Algorithmen

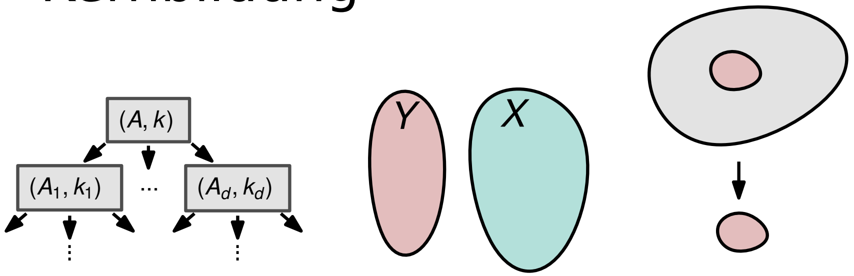
Untere Schranken: parametrisierte Komplexität und Datenbanken



Inhalt

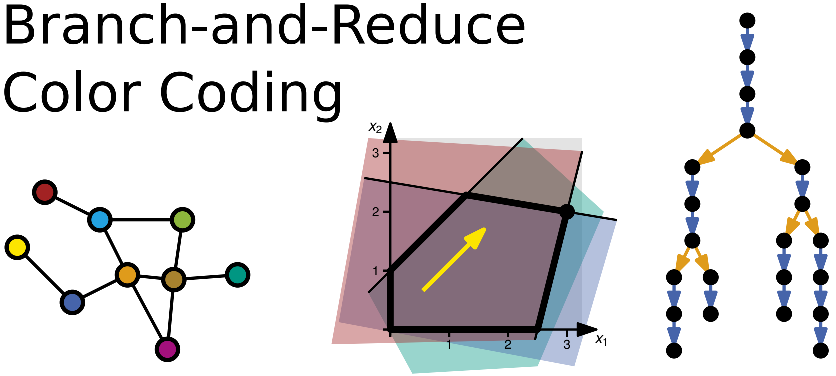
Basic Toolbox

- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung



Erweiterte Toolbox

- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding

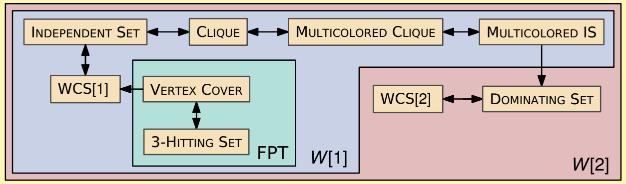


Baumweite

- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem

Untere Schranken

- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH



INDEPENDENT SET

CLIQUE

MULTICOLORED CLIQUE

MULTICOLORED IS

WCS[1]

VERTEX COVER

3-HITTING SET

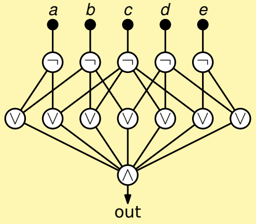
FPT

$W[1]$

WCS[2]

DOMINATING SET

$W[2]$



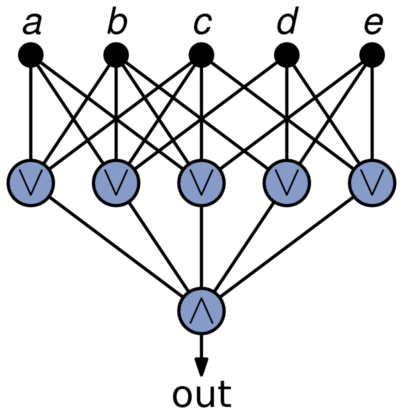
Wiederholung: Boolesche Schaltkreise

Definition
Der **Weft** eines Booleschen Schaltkreises ist die maximale Anzahl an Knoten mit Eingangsgrad > 2 auf einem gerichteten Pfad.

Problem
WCS$[\boldsymbol{t}]$ ist WCS eingeschränkt auf Schaltkreise mit konstanter Tiefe und Weft maximal t.

Definition
Die Klasse $\boldsymbol{W}[\boldsymbol{t}]$ enthält die Probleme, die eine parametrisierte Reduktion auf WCS[t] zulassen.

Weft 2



Bemerkungen

- Problem $\mathcal{L}$ ist $W[t]$-vollständig, wenn
  - $\mathcal{L} \in W[t]$
  - $\mathcal{L}$ $W[t]$-schwer (jedes $\mathcal{L}' \in W[t]$ lässt sich parametrisiert auf $\mathcal{L}$ reduzieren)
- WCS[t] ist per Definition $W[t]$-vollständig
- Vermutung: FPT $\subset W[1] \subset W[2] \subset W[3] \subset \cdots$

Leichte und schwere Reduktionen

Wie zeigen wir $W[t]$-Vollständigkeit?

- reduziere auf und von anderem vollständigen Problem
- für $W[1]$: INDEPENDENT SET oder CLIQUE
- für $W[2]$: DOMINATING SET oder HITTING SET
- für $t > 2$: hier haben wir nur WCS$[t]$ zur Verfügung

Reduktion nach WCS$[t]$

(Enthaltensein in $W[t]$)

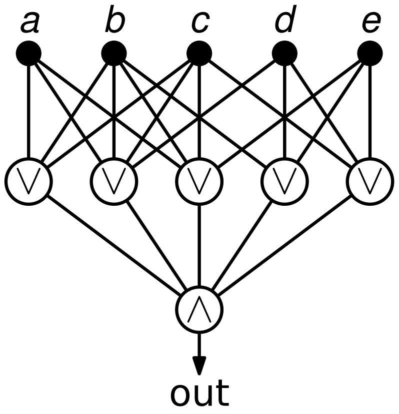
- WCS ist eine mächtige Modellierungssprache
- Reduktion ist üblicherweise relativ einfach

Reduktion von WCS$[t]$

($W[t]$-Schwere)

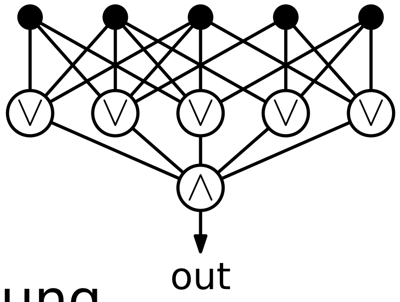
- dieser Teil ist meist deutlich schwerer
- ein Grund: der Schaltkreis kann sehr wüst aussehen

  (nicht so, wie der da →)
- Idee: verbiete wüste Schaltkreise → Normalisierung
- zeige $W[t]$-Schwere für normalisierte Schaltkreise
- und reduziere dann von diesen weiter



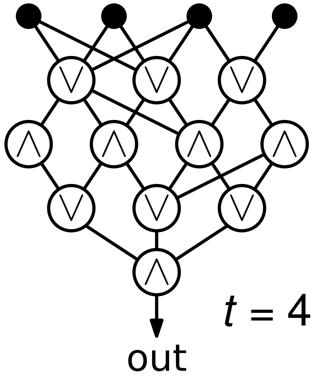
Normalisierte Schaltkreise

Der Schaltkreis für DOMINATING SET



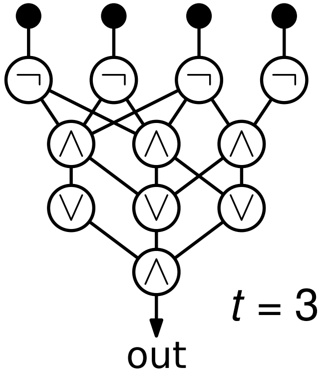
- auf jedem Pfad alternieren $\wedge$- und $\vee$-Knoten
- Ausgabeknoten (unterste Lage) ist ein $\wedge$-Knoten
- nur positive Variablen $\Rightarrow$ Schaltkreis ist **monoton**
- Implikation: Supermenge einer Lösung ist ebenfalls Lösung

WEIGHTED MONOTONE t-NORMALIZED SATISFIABILITY



- t Lagen alternierender $\wedge$- und $\vee$-Knoten
- $\wedge$-Konten als Ausgabeknoten
- keine $\neg$-Knoten erlaubt
- also: $\underbrace{\text{Konj. von Disj. von Konj. ... von}}_{t \text{ „von“s}}$ positiven Literalen

WEIGHTED ANTIMONOTONE t-NORMALIZED SATISFIABILITY

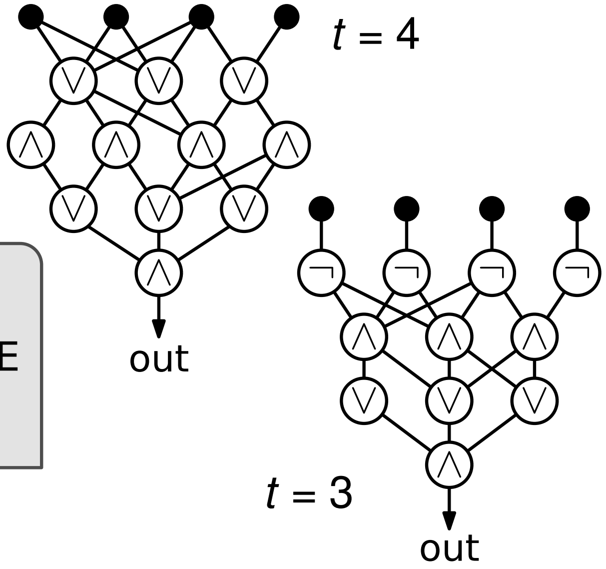


- jetzt muss jeder Eingangsknoten negiert werden
- also: $\underbrace{\text{Konj. von Disj. von Konj. ... von}}_{t \text{ „von“s}}$ negativen Literalen

Normalisierte Schaltkreise

Theorem
Für jedes gerade $t \geq 2$ ist Weighted Monotone t-Normalized Satisfiability $W[t]$-vollständig.

Theorem
Für jedes ungerade $t \geq 3$ ist Weighted Antimonotone t-Normalized Satisfiability $W[t]$-vollständig.



Anmerkungen

- WMNS[t] und WANS[t] sind offensichtlich in $W[t]$ enthalten
- die Schwierigkeit besteht darin $W[t]$-Schwere zu zeigen
- wir können jetzt also von WMNS[t] bzw. WANS[t] reduzieren um $W[t]$-Schwere zu zeigen
- Tendenz: wähle gerades t für Minimierungs- und ungerades t für Maximierungsprobleme

Schlüsselkandidaten in Datenbanken

Definition
Eine Spaltenmenge A ist eine **Unique Column Combination**, wenn die Einschränkung auf A kein Tupel mehrfach enthält.

Beispiel

- keine einzelne Spalte ist unique
- $\{$Vorname, Nachname$\}$ ist unique
- $\{$Geburtstag, Wohnort$\}$ nicht

	Vorname	**Nachname**	**Geburtstag**	**Wohnort**
	Max	Mustermann	1.6.	Karlsruhe
r_2	Bob	Mustermann	7.10.	Berlin
	Bob	Baumeister	4.3.	Hamburg
	Alice	Liddell	4.5.	Wunderland
r_5	Alice	Musterfrau	7.10.	Berlin

Problem: UNIQUE
Gegeben eine Datenbank und ein Parameter k. Gibt es eine Unique Column Combination der Größe maximal k?

Leicht andere Sichtweise

- Zeilenpaar $(r_2, r_5) \Rightarrow$ **Vor-** oder **Nachname** muss enthalten sein
- jedes Zeilenpaar (r_i, r_j) liefert Spaltenmenge $A_{i,j}$ aus der mindestens ein Element gewählt werden muss

Was ist das für ein Problem? → HITTING SET

Unique ist $W[2]$-vollständig

Gerade gesehen

- parametrisierte Reduktion von Unique auf Hitting Set
- Hitting Set ist $W[2]$-vollständig $\Rightarrow$ Unique $\in W[2]$

Zeige: Reduktion von Hitting Set auf Unique

Instanz von Hitting Set

$U = \{a, b, c, d, e\}$

$S_1 = \{a, b, c\}$

$S_2 = \{a, d, e\}$

$S_3 = \{b, d, e\}$

$S_4 = \{b, c\}$

Instanz von Unique

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
r_0	0	0	0	0	0
r_1	1	1	1	0	0
r_2	2	0	0	2	2
r_3	0	3	0	3	3
r_4	0	4	4	0	0

- verwende eine Spalte pro Element
- jedes S_i muss von einem Zeilenpaar repräsentiert werden
- Benutze die 0-Zeile s_0 für jedes Paar
- Paar (r_0, r_i) stellt sicher, dass ein Element aus S_i gewählt wird
- also: Lösung für Unique $\Rightarrow$ Lösung für Hitting Set
- **Achtung:** andere Paare liefern auch Bedingungen
- aber: (r_i, r_j) liefert $S_i \cup S_j$
- r_i von r_0 unterscheidbar $\Rightarrow$ r_i von r_j unterscheidbar
- also: Lösung für Hitting Set $\Rightarrow$ Lösung für Unique

$\Rightarrow$ Unique ist $W[2]$-schwer

Funktionale Abhängigkeiten

Beobachtung

- $\{$Nachname$\}$ ist kein Unique
- der Nachname identifiziert also nicht das gesamte Tupel
- aber: der Nachname identifiziert den Wohnort

Vorname	**Nachname**	**Geburtstag**	**Wohnort**
Max	Mustermann	7.10.	Karlsruhe
Bob	Mustermann	1.6.	Karlsruhe
Bob	Baumeister	7.10.	Karlsruhe
Alice	Liddell	4.5.	Wunderland
Alice	Musterfrau	4.3.	Berlin
	X		A

Definition (Grundsätzliche Annahme: $A \notin X$)

Für eine Spaltenmenge X und eine Spalte A ist $X \to A$ eine **Funktionale Abh.**, wenn $r_i[A] \neq r_j[A] \Rightarrow r_i[X] \neq r_j[X]$ für alle Zeilenpaare (r_i, r_j).

Welche der folgenden Abhängigkeiten gelten?

- $\{$Vorname$\} \to \{$Geburtstag$\}$
- $\{$Geburtstag$\} \to \{$Vorname$\}$
- $\{$Geburtstag$\} \to \{$Wohnort$\}$
- $\{$Vorname$\} \to \{$Wohnort$\}$
- $\{$Vorname, Geburtstag$\} \to \{$Wohnort$\}$
- $\{$Wohnort, Geburtstag$\} \to \{$Vorname$\}$

Funktionale Abhängigkeiten

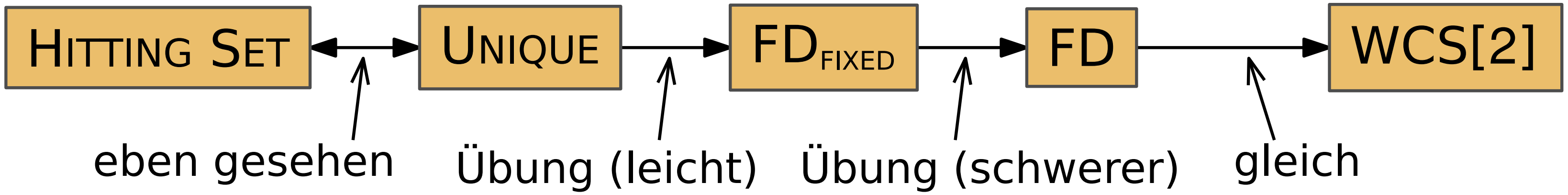
Problem: FD
Gegeben eine Datenbank und ein Parameter k. Gibt es eine funktionale Abhängigkeit $X \to A$ mit $|X| \leq k$?

Zeige $W[2]$-Schwere für FD

- reduziere von UNIQUE
- leichter, wenn im Problem FD die rechte Seite A feststeht

Problem: FD_{FIXED}
Gegeben eine Datenbank, eine Spalte A und ein Parameter k. Gibt es eine funktionale Abhängigkeit $X \to A$ mit $|X| \leq k$?

Reduktionen



- HITTING SET und WCS[2] sind $W[2]$-vollständig
  $\Rightarrow$ FD_{FIXED} und FD sind $W[2]$-vollständig

FD → WCS[2]

Definition (Grundsätzliche Annahme: $A \notin X$)
Für eine Spaltenmenge X und eine Spalte A ist $X \rightarrow A$ eine **Funktionale Abh.**, wenn $r_i[A] \neq r_j[A] \Rightarrow r_i[X] \neq r_j[X]$ für alle Zeilenpaare (r_i, r_j).

Grober Plan

- modelliere die Bedingungen von FD mittels Boolescher Formeln
- verwende für jede Bedingung nur $\vee$ und ein $\wedge$ am Ende (CNF)

  ($\Rightarrow$ Schaltkreis wird 2-normalisiert und damit Weft-2 (wenn auch nicht monoton))

Was sind die Bedingungen? Welche Variablen benutzen wir?

- RHS besteht aus ein genau einer Spalte
- LHS und RHS sind disjunkte Spaltenmengen
- wenn $r_i[A] \neq r_j[A]$ für ein Zeilenpaar (r_i, r_j) und $A \in$ RHS, dann:
  es gibt Spalte B mit $r_i[B] \neq r_j[B]$ und $B \in$ LHS
- Indikatorvariablen x_A und x'_A für $A \in$ LHS bzw. $A \in$ RHS

RHS besteht aus genau einer Spalte

- mindestens eine Spalte: $\bigvee_{\text{Spalte } A} x'_A$
- nicht zwei Spalten A und B in der RHS: $\neg x'_A \vee \neg x'_B$

FD $\rightarrow$ WCS[2]

Definition (Grundsätzliche Annahme: $A \notin X$)
Für eine Spaltenmenge X und eine Spalte A ist $X \rightarrow A$ eine **Funktionale Abh.**, wenn $r_i[A] \neq r_j[A] \Rightarrow r_i[X] \neq r_j[X]$ für alle Zeilenpaare (r_i, r_j).

Grober Plan

- modelliere die Bedingungen von FD mittels Boolescher Formeln
- verwende für jede Bedingung nur $\vee$ und ein $\wedge$ am Ende (CNF)

  ($\Rightarrow$ Schaltkreis wird 2-normalisiert und damit Weft-2 (wenn auch nicht monoton))

Was sind die Bedingungen? Welche Variablen benutzen wir?

- RHS besteht aus ein genau einer Spalte
- LHS und RHS sind disjunkte Spaltenmengen
- wenn $r_i[A] \neq r_j[A]$ für ein Zeilenpaar (r_i, r_j) und $A \in$ RHS, dann:
  es gibt Spalte B mit $r_i[B] \neq r_j[B]$ und $B \in$ LHS
- Indikatorvariablen x_A und x'_A für $A \in$ LHS bzw. $A \in$ RHS

LHS und RHS sind disjunkt

- für jede Spalte A: $\neg x_A \vee \neg x'_A$

FD $\rightarrow$ WCS[2]

Definition (Grundsätzliche Annahme: $A \notin X$)
Für eine Spaltenmenge X und eine Spalte A ist $X \rightarrow A$ eine **Funktionale Abh.**, wenn $r_i[A] \neq r_j[A] \Rightarrow r_i[X] \neq r_j[X]$ für alle Zeilenpaare (r_i, r_j).

Grober Plan

- modelliere die Bedingungen von FD mittels Boolescher Formeln
- verwende für jede Bedingung nur $\vee$ und ein $\wedge$ am Ende (CNF)
  ($\Rightarrow$ Schaltkreis wird 2-normalisiert und damit Weft-2 (wenn auch nicht monoton))

Was sind die Bedingungen? Welche Variablen benutzen wir?

- RHS besteht aus ein genau einer Spalte
- LHS und RHS sind disjunkte Spaltenmengen
- wenn $r_i[A] \neq r_j[A]$ für ein Zeilenpaar (r_i, r_j) und $A \in$ RHS, dann:
  es gibt Spalte B mit $r_i[B] \neq r_j[B]$ und $B \in$ LHS
- Indikatorvariablen x_A und x'_A für $A \in$ LHS bzw. $A \in$ RHS

LHS und RHS bilden funktionale Abhängigkeit

- für jede Spalte A, und jedes Paar (r_i, r_j) mit $r_i[A] \neq r_j[A]$:

$$\neg x'_A \vee \bigvee_{\substack{\text{Spalte } A \neq B \\ r_i[B] \neq r_j[B]}} x_B$$

FD $\rightarrow$ WCS[2]

Definition (Grundsätzliche Annahme: $A \notin X$)
Für eine Spaltenmenge X und eine Spalte A ist $X \rightarrow A$ eine **Funktionale Abh.**, wenn $r_i[A] \neq r_j[A] \Rightarrow r_i[X] \neq r_j[X]$ für alle Zeilenpaare (r_i, r_j).

Grober Plan

- modelliere die Bedingungen von FD mittels Boolescher Formeln
- verwende für jede Bedingung nur $\vee$ und ein $\wedge$ am Ende (CNF)
  ($\Rightarrow$ Schaltkreis wird 2-normalisiert und damit Weft-2 (wenn auch nicht monoton))

Was sind die Bedingungen? Welche Variablen benutzen wir?

- RHS besteht aus ein genau einer Spalte
- LHS und RHS sind disjunkte Spaltenmengen
- wenn $r_i[A] \neq r_j[A]$ für ein Zeilenpaar (r_i, r_j) und $A \in$ RHS, dann:
  es gibt Spalte B mit $r_i[B] \neq r_j[B]$ und $B \in$ LHS
- Indikatorvariablen x_A und x'_A für $A \in$ LHS bzw. $A \in$ RHS

Theorem
Die Probleme UNIQUE, FD$_{\text{FIXED}}$ und FD sind $W[2]$-vollständig.

Inclusion Dependency

Ziel: finde Daten in einer Datenbank, die in einer anderen enthalten sind

Schema R

A	B	C
1	1	1
3	1	2
1	2	1
2	3	3
3	4	4

Schema S

D	E	F	G
4	1	3	1
3	3	4	1
3	3	3	2
4	2	1	3
2	4	1	3
4	4	4	3

- betrachte Spalten $X = \{A, C\} \subseteq R$
- und Abbildung $\sigma \colon X \to S$ mit $\sigma(A) = G$ und $\sigma(C) = E$
- Tupel für X: $\{11, 32, 23, 34\}$

$\rotatebox{90}{$\subseteq$}$

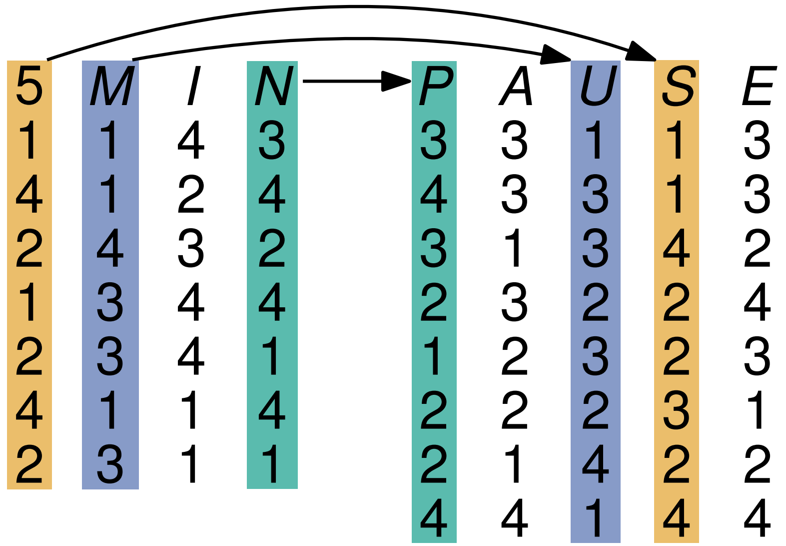
- Tupel für $\sigma(X)$: $\{11, 13, 23, 32, 34\}$

Definition
Betrachte die Instanzen r und s zweier Schemata R bzw. S. Eine Teilmenge $X \subseteq R$ zusammen mit einer injektiven Abbildung $\sigma \colon X \to S$ ist eine **Inclusion Dependency**, wenn $r[X] \subseteq s[\sigma(X)]$.

Problem: IND
Gegeben seien zwei Datenbanken r und s sowie ein Parameter k. Gibt es eine Inclusion Dependency der Größe k?

Problem: IND$_{\text{FIXED}}$
Gegeben seien r und s mit gleichem Schema und ein Parameter k. Gibt es eine Inclusion Dependency der Größe k mit der Identität als σ?

Finde die größte Inclusion Dependency



5	M	I	N
1	1	4	3
4	1	2	4
2	4	3	2
1	3	4	4
2	3	4	1
4	1	1	4
2	3	1	1

P	A	U	S	E
3	3	1	1	3
4	3	3	1	3
3	1	3	4	2
2	3	2	2	4
1	2	3	2	3
2	2	2	3	1
2	1	4	2	2
4	4	1	4	4

Lösung

- $X = \{5, M, N\}$
- $\sigma(5) = S$, $\sigma(M) = U$ und $\sigma(N) = P$

Definition
Betrachte die Instanzen r und s zweier Schemata R bzw. S. Eine Teilmenge $X \subseteq R$ zusammen mit einer injektiven Abbildung $\sigma\colon X \to S$ ist eine **Inclusion Dependency**, wenn $r[X] \subseteq s[\sigma(X)]$.

IND ist *W*[3]-Vollständig

$\text{IND}_{\text{FIXED}}$ und IND

- Reduktion von $\text{IND}_{\text{FIXED}}$ auf IND ist einfach

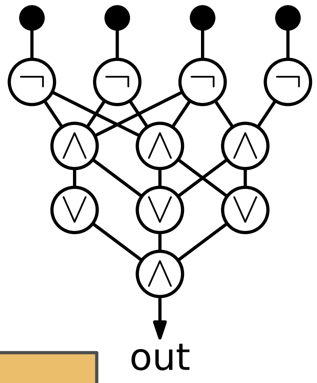
$\text{IND}_{\text{FIXED}} \rightarrow \text{IND}$

Wie?

IND und WANS[3]

- Reduktion von IND auf WANS[3]
- modelliere die IND-Bedingungen als Boolesche Formel
- stelle sicher: es ist eine Konjunktion von Disjunktionen von Konjunktionen von negierten Variablen

$\text{IND} \rightarrow \text{WANS[3]}$



WANS[3] und $\text{IND}_{\text{FIXED}}$

- Reduktion von WANS[3] auf $\text{IND}_{\text{FIXED}}$
- modelliere antimonotone 3-normalisierte Boolesche Formeln mittels zweier Datenbanken

$\text{WANS[3]} \rightarrow \text{IND}_{\text{FIXED}}$

Gesamtplan: $\text{WANS[3]} \rightarrow \text{IND}_{\text{FIXED}} \rightarrow \text{IND} \rightarrow \text{WANS[3]}$

WANS[3] $\rightarrow$ IND$_{\text{FIXED}}$

IND$_{\text{FIXED}}$ aufgefasst als Boolesche Funktion

- fasse eine Spaltenmenge als 01-String auf

  (Bsp: $\{A, C\} \widehat{=} 101$)
- betrachte $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, mit $f(x) = 1 \Leftrightarrow x$ ist Inclusion Dependency für (r, s)

  (Bsp: $f(101) = 1$, $f(110) = 0$)

Datenbank r

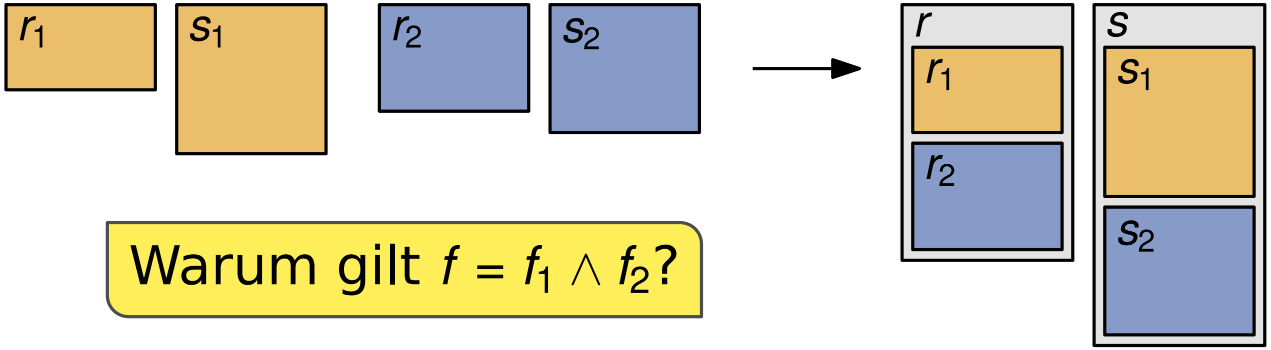
A	B	C
1	1	1
3	1	2
1	2	1
2	3	3
3	4	4

Datenbank s

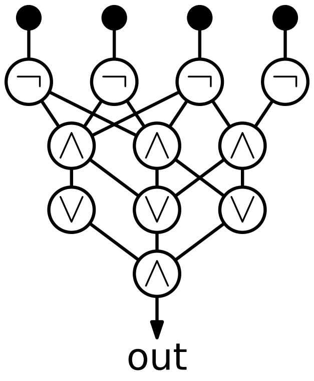
A	B	C
1	3	1
1	4	3
2	3	3
3	1	2
3	1	4
3	4	4

Verundung von zwei Instanzen (über dem gleichen Schema)

- betrachte Instanzen (r_1, s_1) und (r_2, s_2) mit Funktionen f_1 bzw. f_2
- git es Instanz (r, s), sodass $f = f_1 \wedge f_2$?
- Idee: sorge dafür, dass (r_1, s_1) und (r_2, s_2) disjunkte Werte haben und schreibe die Instanzen einfach untereinander



Warum gilt $f = f_1 \wedge f_2$?



WANS[3] → IND$_{\text{FIXED}}$

Lemma
Gegeben zwei IND$_{\text{FIXED}}$-Instanzen mit Indikatorfunktionen f_1 und f_2, dann gibt es eine (nicht zu große) IND$_{\text{FIXED}}$-Instanz mit Indikatorfunktion $f_1 \land f_2$.

Zwischenstand

- Konjunktionen können wir also schon modellieren
- können wir auf ähnliche Art auch Disjunktionen modellieren?
- falls ja, dann wäre IND$_{\text{FIXED}}$ sogar $W[t]$-schwer, für beliebiges t

Ziel: modelliere Disjunktion von Konjunktionen von negierten Variablen

$\varphi = c_1 \lor c_2 \lor c_3$

$c_1 = (\neg x_1 \land \neg x_2 \land \neg x_3)$

$c_2 = (\neg x_2 \land \neg x_4 \land \neg x_5)$

$c_3 = (\neg x_1 \land \neg x_3 \land \neg x_4 \land \neg x_6)$

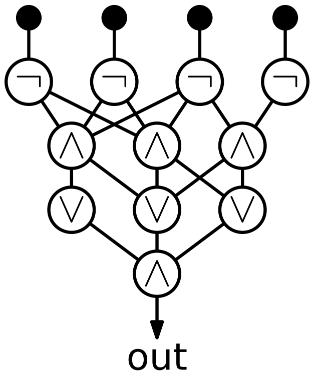
r:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	0	0	0	0	0

s:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1

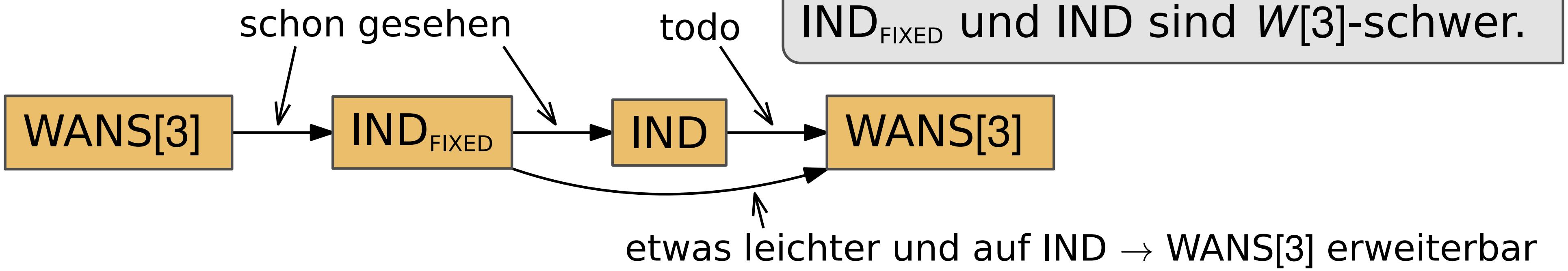
- ein einzelnes c_i darstellen ist leicht
- Veroderung der c_i: biete in s jedes der c_i einmal an



Check: Lösung für φ liefert Lösung für (r, s) und umgekehrt

Zwischenstand

Theorem
$\text{IND}_{\text{FIXED}}$ und IND sind $W[3]$-schwer.



etwas leichter und auf IND → WANS[3] erweiterbar

Welche Bedingungen müssen wir modellieren?

- einzelnes Zeilenpaar (r_i, s_j): wähle gewisse Elemente nicht

	A_1	A_2	A_3	A_4
r_j	1	0	1	0

	A_1	A_2	A_3	A_4
s_j	1	1	0	0

$$\longrightarrow \neg x_2 \wedge \neg x_3$$

- r_i und mehrere Zeilen in s: erfülle eine der vorherigen Bedingungen

	A_1	A_2	A_3	A_4
r_j	1	0	1	0

	A_1	A_2	A_3	A_4
s_1	1	1	0	0
s_2	0	1	1	0

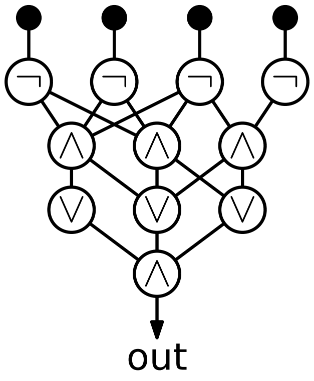
$$\longrightarrow \overset{(r_j \mapsto s_1)}{\neg x_2 \wedge \neg x_3} \vee \overset{(r_j \mapsto s_2)}{\neg x_1 \wedge \neg x_2}$$

- mehrere Zeilen in r: erfülle Bedingungen für jede Zeile

	A_1	A_2	A_3	A_4
r_1	1	0	1	0
r_2	0	1	0	1

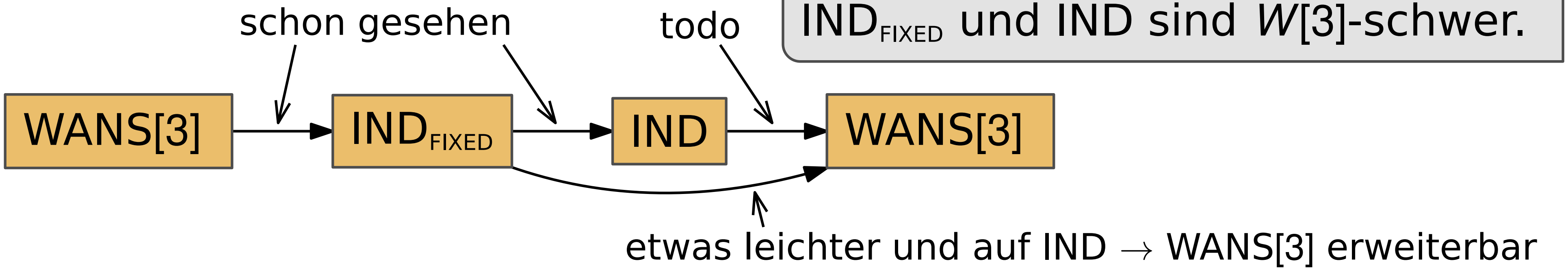
	A_1	A_2	A_3	A_4
s_1	1	1	0	0
s_2	0	1	1	0

$$\longrightarrow \left(\overset{(r_1 \mapsto s_1)}{\neg x_2 \wedge \neg x_3} \vee \overset{(r_1 \mapsto s_2)}{\neg x_1 \wedge \neg x_2}\right) \wedge \left(\underset{(r_2 \mapsto s_1)}{\neg x_1 \wedge \neg x_4} \vee \underset{(r_2 \mapsto s_2)}{\neg x_3 \wedge \neg x_4}\right)$$



Zwischenstand

Theorem
IND$_{\text{FIXED}}$ und IND sind $W[3]$-schwer.


schon gesehen

todo

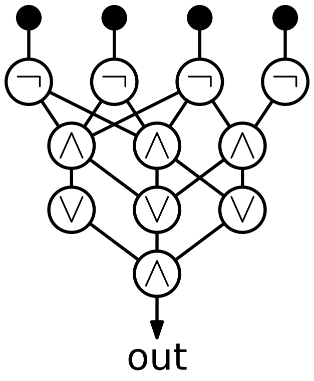
WANS[3] → IND$_{\text{FIXED}}$ → IND → WANS[3]

etwas leichter und auf IND → WANS[3] erweiterbar

Erweiterung auf IND → WANS[3]

- benutze Variablen $x_{i,j}$ mit der Bedeutung, dass $x_{i,j} = 1 \Leftrightarrow$ Spalte i in R wird ausgewählt und auf Spalte j in S abgebildet
- sorge dafür, dass man eine Bijektion erhält
- kombiniere das, mit den Bedingungen von vorher

Theorem
IND$_{\text{FIXED}}$ und IND sind $W[3]$-vollständig.



Zusammenfassung

Normalisierte Schaltkreise

- bei Reduktionen von WCS können wir mit recht aufgeräumten Schaltkreisen starten
- brauchen uns dann nicht mehr um Weft t kümmern (stattdessen: Anzahl alternierender Ebenen)
- gerades t: monoton; ungerades t: antimonoton

Dependency Detection

- es müssen nicht immer nur Graphen sein
- es gibt auch natürliche $W[3]$-vollständige Probleme
- erklärt nicht, warum funktionale Abhängigkeiten in der Praxis schnell ausgerechnet werden können

  (tatsächlich können sogar alle inklusionsminimalen UCCs/FDs aufgezählt werden)

Literaturhinweise

The Parameterized Complexity of Dependency Detection in Relational Databases

- Thomas Bläsius, Tobias Friedrich, Martin Schirneck [2016]
- enthält die eben gesehenen Reduktionen

`doi.org/10.4230/LIPIcs.IPEC.2016.6`

Profiling relational data: a survey

- Ziawasch Abedjan, Lukasz Golab, Felix Naumann [2015]
- Überblick zum Finden von Abhängigkeiten in Datenbanken

`doi.org/10.1007/s00778-015-0389-y`

Hitting Set Enumeration with Partial Information for Unique Column Combination Discovery

- Johann Birnick, Thomas Bläsius, Tobias Friedrich, Felix Naumann, Thorsten Papenbrock, Martin Schirneck [2020]
- in der Praxis effizienter Algo zum Aufzählen von Unique Colum Combinations

`doi.org/10.14778/3407790.3407824`

Discovering Functional Dependencies through Hitting Set Enumeration

- Tobias Bleifuß, Thorsten Papenbrock, Thomas Bläsius, Martin Schirneck, Felix Naumann [2024]
- in der Praxis effizienter Algo zum Aufzählen von funktionalen Abhängigkeiten

`doi.org/10.1145/3639298`