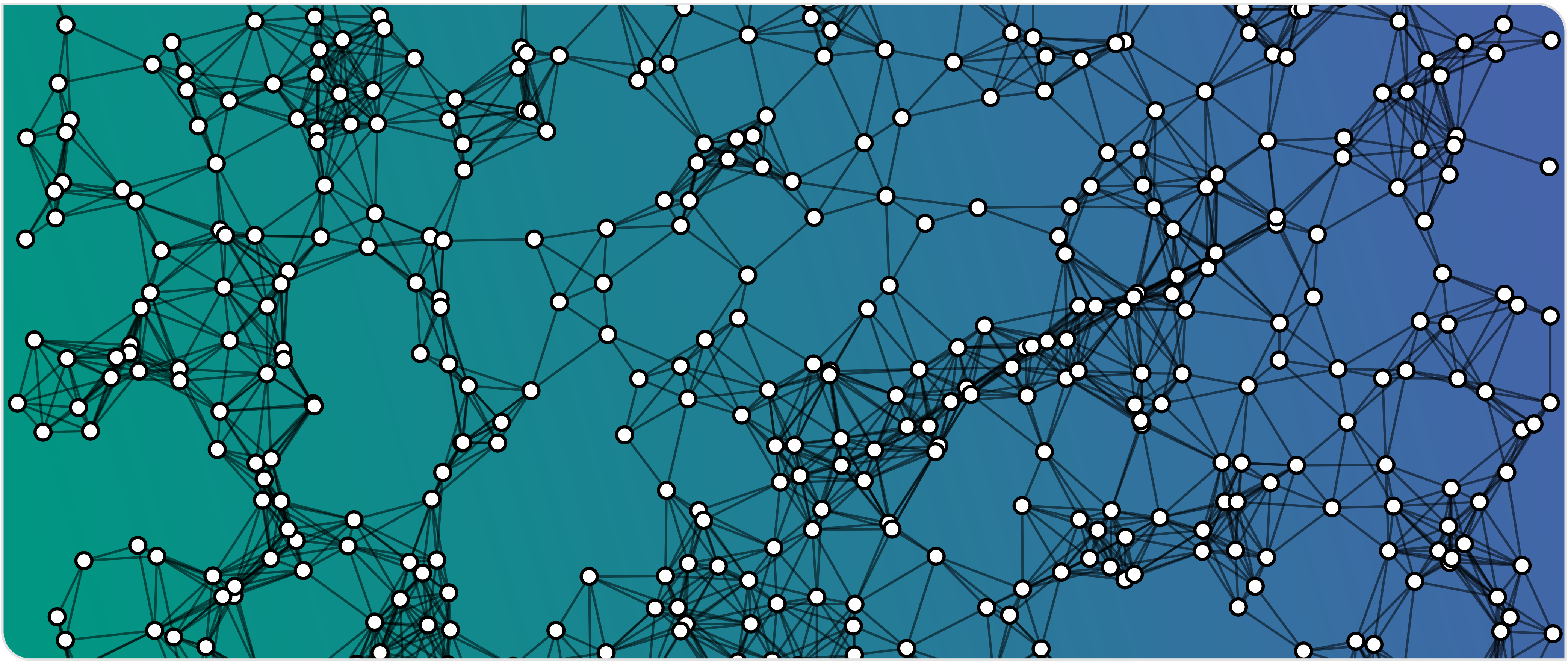
Karlsruher Institut für Technologie

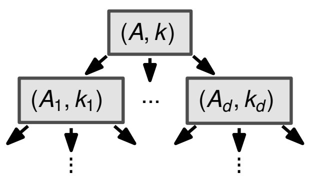
Parametrisierte Algorithmen

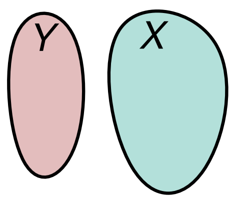
Untere Schranken: Reduktionen und W-Hierarchie

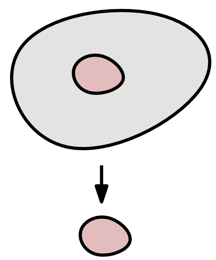


Inhalt

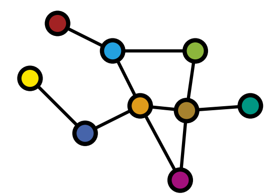
Basic Toolbox
- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung

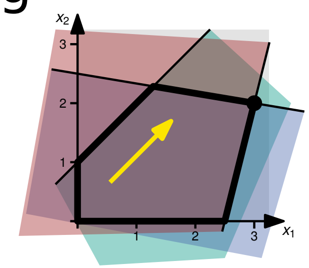


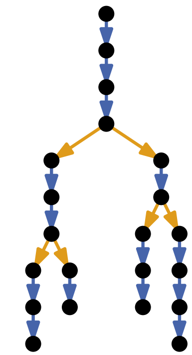




Erweiterte Toolbox
- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding

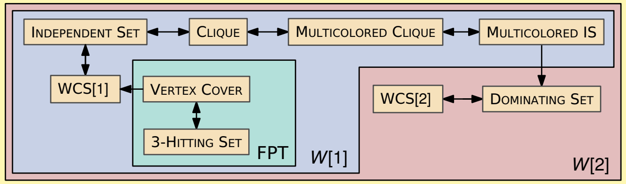


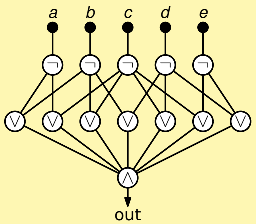




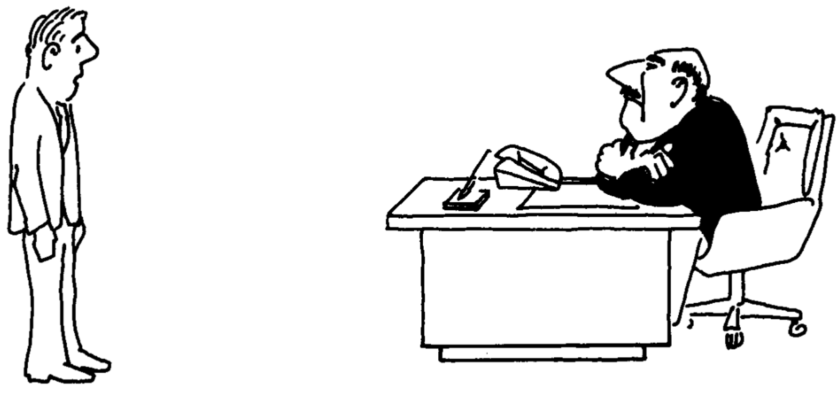
Baumweite
- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem

Untere Schranken
- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH

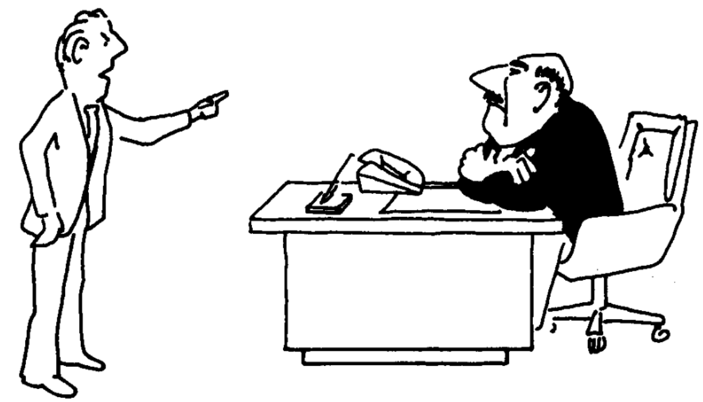




Was bringen untere Schranken?



“I can’t find an efficient algorithm, I guess I’m just too dumb.”



“I can’t find an efficient algorithm, because no such algorithm is possible!”

Problem

- nicht-Existenz eines Algorithmus ist schwer zu zeigen

Lösung

- zeige: mein Problem effizient lösbar $\Rightarrow$ ein bekanntes schwieriges Problem effizient lösbar
- Werkzeug: Reduktionen zwischen Problemen

“I can’t find an efficient algorithm, but neither can all these famous people.”

Polynomielle Reduktionen

Reduktion von Problem $\mathcal{L}$ zu Problem $\mathcal{L}'$

- bildet jede Instanz I von $\mathcal{L}$ auf eine Instanz I' von $\mathcal{L}'$ ab
- I ist ja-Instanz $\Leftrightarrow$ I' ist ja-Instanz
- die Abbildung muss in polynomieller Zeit berechnet werden können

Folgerung

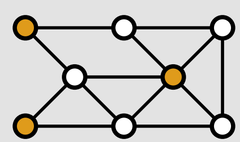
- polynomieller Algorithmus für $\mathcal{L}'$ $\Rightarrow$ polynomiellen Algorithmus für $\mathcal{L}$
- mein Problem $\mathcal{L}'$ effizient lösbar $\Rightarrow$ bekanntes schwieriges Problem $\mathcal{L}$ effizient lösbar (zumindest, wenn „effizient“ = „polynomiell“)

Beispiel

- reduziere Independent Set auf Vertex Cover
- triviale Reduktion: G hat IS der Größe k $\Leftrightarrow$ G hat VC der Größe $n-k$
- also: VC $\in$ P $\Rightarrow$ IS $\in$ P
- gilt auch VC $\in$ FPT $\Rightarrow$ IS $\in$ FPT?
  $\rightarrow$ nein, der Parameter wird zu groß
- für „effizient“ = „FPT“ benötigt man andere Reduktionen

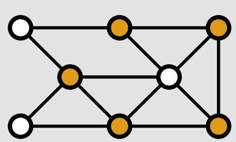
(implizite Annahme: Lösungsgröße ist Parameter)

Independent Set



$V' \subseteq V$, sodass
$\forall e \in E\colon |e \cap V'| \leq 1$

Vertex Cover



$V' \subseteq V$, sodass
$\forall e \in E\colon |e \cap V'| \geq 1$

Parametrisierte Reduktionen

Reduktion von Problem $\mathcal{L}$ zu Problem $\mathcal{L}'$

- bildet jede Instanz (I, k) von $\mathcal{L}$ auf eine Instanz (I', k') von $\mathcal{L}'$ ab
- (I, k) ist ja-Instanz $\Leftrightarrow$ (I', k') ist ja-Instanz; mit $k' \leq g(k)$
- die Abbildung muss in FPT-Zeit $(f(k) \cdot |I|^{O(1)})$ berechenbar sein

(*f* und *g* sind berechenbare Funktionen)

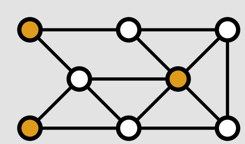
Folgerung

- FPT-Algorithmus für $\mathcal{L}'$ $\Rightarrow$ FPT Algorithmus für $\mathcal{L}$
- mein Problem $\mathcal{L}'$ effizient lösbar $\Rightarrow$ bekanntes schwieriges Problem $\mathcal{L}$ effizient lösbar (zumindest, wenn „effizient“ = „FPT“)

Beispiel

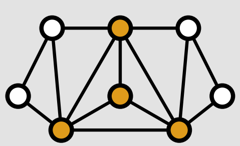
- reduziere Independent Set auf Clique
- G hat IS der Größe k $\Leftrightarrow$ Komplement von G hat Clique der Größe k
- also: Clique $\in$ FPT $\Rightarrow$ IS $\in$ FPT
- Umkehrung gilt auch, also: Clique $\in$ FPT $\Leftrightarrow$ IS $\in$ FPT
- Vermutung: Clique, IS $\notin$ FPT

Independent Set



$V' \subseteq V$, sodass $\forall e \in E\colon |e \cap V'| \leq 1$

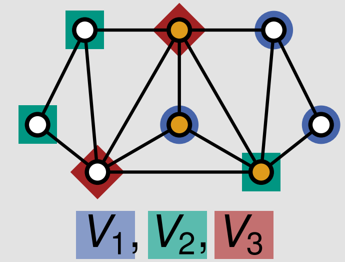
Clique



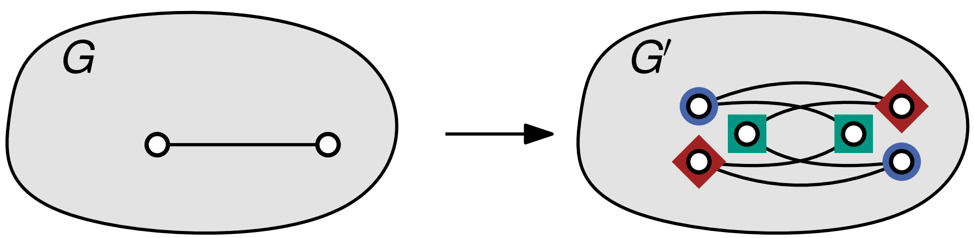
$V' \subseteq V$, sodass $G[V']$ vollständig

Bunte Cliquen

Problem: MULTICOLORED CLIQUE
Sei $G = (V, E)$ ein Graph, k ein Parameter und $(V_1, \dots, V_k)$ ein Partitionierung der Knoten. Gibt es eine Clique $V' \subseteq V$ der Größe k, sodass $|V' \cap V_i| = 1$ für alle i?



Reduktion: von CLIQUE auf MULTICOLORED CLIQUE



Instanz $(G, 3)$ von CLIQUE

Instanz von MC CLIQUE: $(G', 3, (V_1, V_2, V_3))$

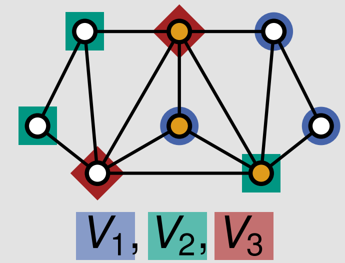
- ersetzte $v \in V$ durch $v^1, \dots, v^k$ mit $v^i \in V_i$
- für $uv \in E$ verbinde u^i mit v^j für alle $i \neq j$
- $k = k'$

G hat Clique der Größe $k \Rightarrow G'$ hat bunte Clique der Größe k

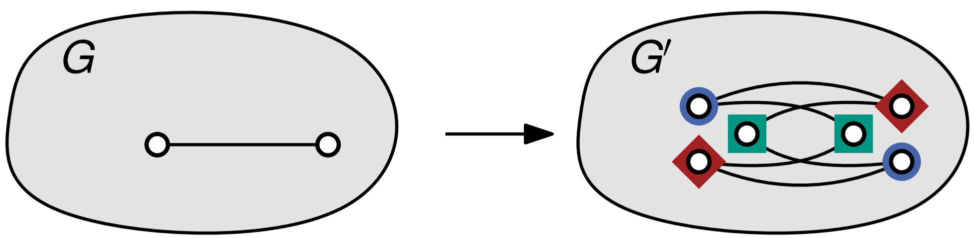
- sei $v_1, \dots, v_k$ eine Clique in G
- dann ist $v_1^1, \dots, v_k^k$ eine Clique in G'
- alle Knoten haben unterschiedliche Farben

Bunte Cliquen

Problem: Multicolored Clique
Sei $G = (V, E)$ ein Graph, k ein Parameter und $(V_1, \dots, V_k)$ ein Partitionierung der Knoten. Gibt es eine Clique $V' \subseteq V$ der Größe k, sodass $|V' \cap V_i| = 1$ für alle i?



Reduktion: von Clique auf Multicolored Clique



Instanz $(G, 3)$ von Clique

Instanz von MC Clique: $(G', 3, (V_1, V_2, V_3))$

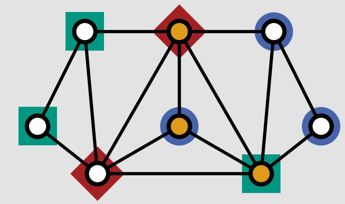
- ersetzte $v \in V$ durch $v^1, \dots, v^k$ mit $v^i \in V_i$
- für $uv \in E$ verbinde u^i mit v^j für alle $i \neq j$
- $k = k'$

G' hat bunte Clique der Größe $k \Rightarrow G$ hat Clique der Größe k

- sei $v^1_{\pi(1)}, \dots, v^k_{\pi(k)}$ bunte Clique in G mit $\pi : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, n\}$
- π ist injektiv (die bunte Clique enthält keine zwei Kopien desselben Knotens)
- damit sind $v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}$ k unterschiedliche Knoten, die in G eine Clique bilden

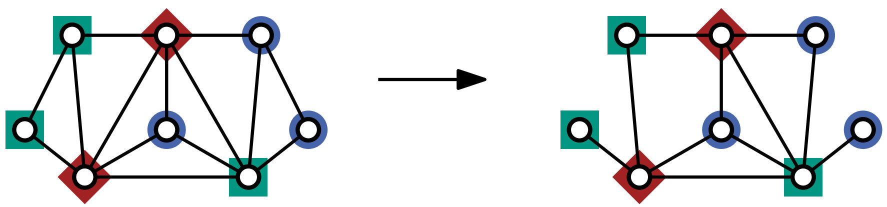
Bunte Cliquen

Problem: Multicolored Clique
Sei $G = (V, E)$ ein Graph, k ein Parameter und $(V_1, \dots, V_k)$ ein Partitionierung der Knoten. Gibt es eine Clique $V' \subseteq V$ der Größe k, sodass $|V' \cap V_i| = 1$ für alle i?



V_1, V_2, V_3

Reduktion: von Multicolored Clique auf Clique



Instanz von MC Clique: $(G, 3, (V_1, V_2, V_3))$

Instanz $(G', 3)$ von Clique

- lösche Kanten zwischen gleichfarbigen Knoten
- $k' = k$

G hat bunte Clique der Größe k $\Rightarrow$ G' hat Clique der Größe k

- aus der bunten Clique wurden keine Kanten gelöscht
- damit bleibt sie eine Clique der Größe k in G'

G' hat Clique der Größe k $\Rightarrow$ G hat bunte Clique der Größe k

- in G' gibt es keine adjazente Knoten der gleichen Farbe
- jede Clique muss bunt sein

Bisherige FPT-Reduktionen

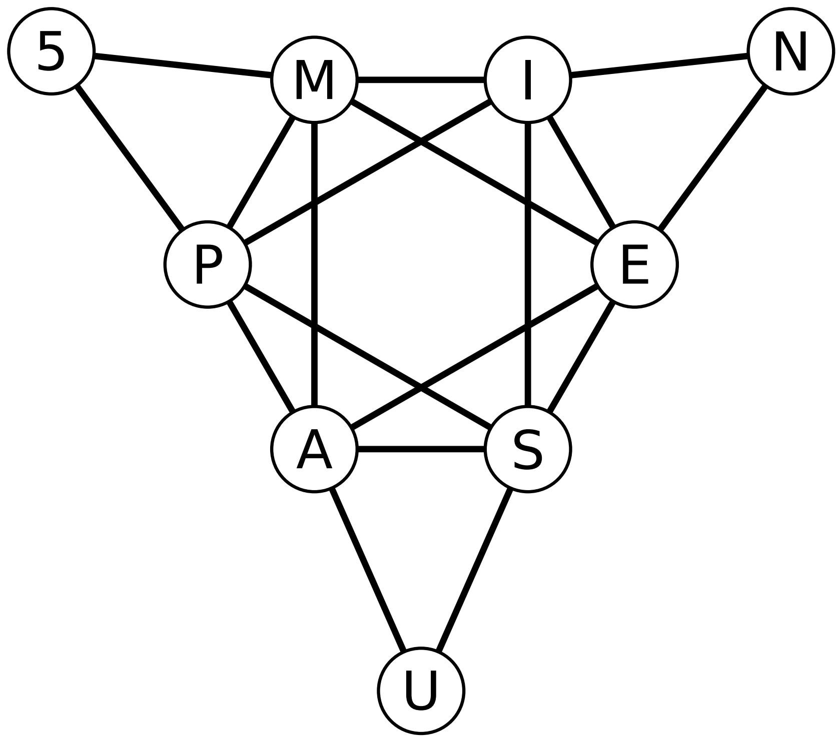
INDEPENDENT SET ↔ CLIQUE ↔ MULTICOLORED CLIQUE ↔ MULTICOLORED IS

(genauso wie für INDEPENDENT SET ↔ CLIQUE)

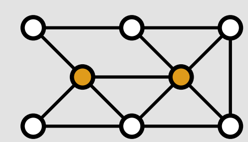
Dominating Set

Ziel

- wähle möglichst wenige Knoten aus
- für jeden Knoten gilt: er selbst oder ein Nachbar ist ausgewählt



DOMINATING SET



$V' \subseteq V$, sodass
$\forall v \in V : |N[v] \cap V'| \geq 1$

DOMINATING SET

Reduziere MULTICOLORED INDEPENDENT SET auf DOMINATING SET

- erzwingen folgende Eigenschaften mittels DOMINATING SET Instanzen
  - erzwinge die Wahl genau eines Elements für jede Farbklasse
  - verbiete die gleichzeitige Wahl von gewissen Knotenpaaren

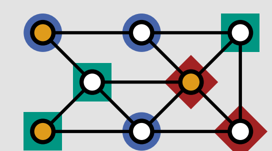
Ein Element aus jeder Farbklasse

- Knoten x_i mit Kanten zu allen Knoten in V_i und ohne weitere Kanten

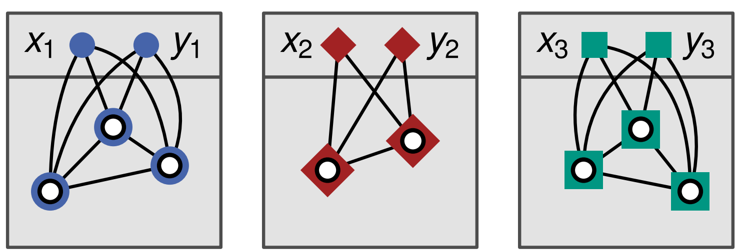
  (erzwingt die Wahl mindestens eines Knotens aus $V_i \cup \{x_i\}$)
- Problem: man könnte x_i wählen
- Lösung: erstelle weiteren Knoten y_i genauso

  (x_i und y_i zu wählen ist zu teuer für ein DS der Größe k)
- damit es genügt einen Knoten aus V_i zu wählen: erstelle Clique auf diesen Knoten

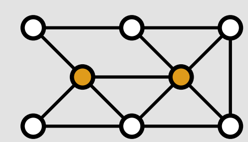
MC INDEPENDENT SET



$V' \subseteq V$ bunt, sodass $\forall e \in E \colon |e \cap V'| \leq 1$



DOMINATING SET



$V' \subseteq V$, sodass $\forall v \in V \colon |N[v] \cap V'| \geq 1$

Dominating Set

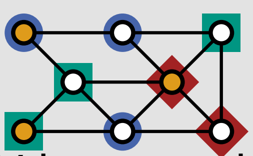
Reduziere Multicolored Independent Set auf Dominating Set

- erzwingen folgende Eigenschaften mittels Dominating Set Instanzen
  - erzwinge die Wahl genau eines Elements für jede Farbklasse ✓
  - verbiete die gleichzeitige Wahl von gewissen Knotenpaaren ✓

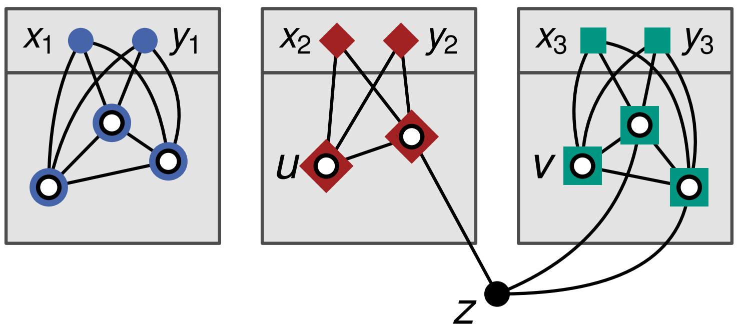
Verbiete gleichzeitige Wahl von *u* und *v*

- Idee: füge Knoten z ein, der immer abgedeckt ist, außer wenn u und v ausgewählt wurden
  - verbinde z weder mit u noch mit v
  - aber mit allen anderen Knoten aus deren Farbklassen

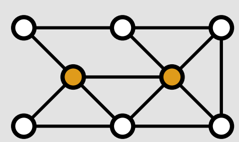
MC Independent Set



$V' \subseteq V$ bunt, sodass $\forall e \in E \colon |e \cap V'| \leq 1$



Dominating Set



$V' \subseteq V$, sodass $\forall v \in V \colon |N[v] \cap V'| \geq 1$

Bisherige FPT-Reduktionen

$$\begin{tikzcd} \textsc{Independent Set} \arrow[r, leftrightarrow] & \textsc{Clique} \arrow[r, leftrightarrow] & \textsc{Multicolored Clique} \arrow[r, leftrightarrow] & \textsc{Multicolored IS} \arrow[d] \\ & & & \textsc{Dominating Set} \end{tikzcd}$$

Lässt sich die letzte Reduktion auch umkehren?

- wissen wir nicht; Vermutung: nicht umkehrbar
- Dominating Set ist also (vermutlich) echt schwerer als Clique oder Independent Set (DS $\in$ FPT $\Rightarrow$ IS $\in$ FPT, aber nicht umgekehrt)
- wir brauchen also einen abgestuften Begriff der Schwere

Vergleich mit der Komplexitätsklasse P

- hier reicht üblicherweise ein Begriff: NP-Schwere
- es gibt aber auch intermediate-Probleme (angenommen P $\neq$ NP)
- es ist allerdings kein natürliches Problem aus NPI bekannt (Kandidaten: Primfaktorzerlegung, Graphisomorphie)

Und jetzt?

- definiere Hierarchie an Komplexitätsklassen
- benutze dazu prototypische vollständige Probleme für jede Stufe

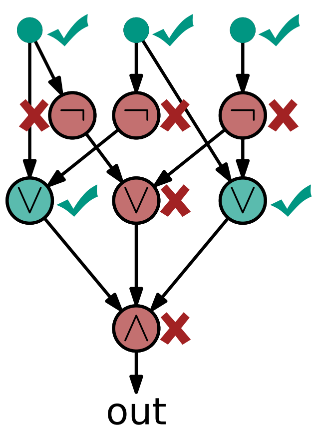
Weighted Circuit Satisfiability

Boolesche Schaltkreise

- gerichteter azyklischer Graph (DAG) mit folgenden Knotentypen:
  - Quellen (Eingangsgrad 0) sind **Eingabeknoten** ●
  - **Negationsknoten** haben Eingangsgrad 1 $\neg$
  - **und-** bzw. **oder-Knoten** haben Eingangsgrad ≥ 2 $\vee$ $\wedge$
  - eine Senke (Ausgangsgrad 0) ist der **Ausgabeknoten** $\rightarrow$ out
- eine Belegung der Eingabeknoten mit 0 bzw. 1 ergibt Belegung für alle anderen Knoten (auf die offensichtliche Art und Weise)
- eine Belegung ist **erfüllend**, wenn der Ausgabeknoten Wert 1 hat
- **Gewicht** einer Belegung = Anzahl verwendeter 1en

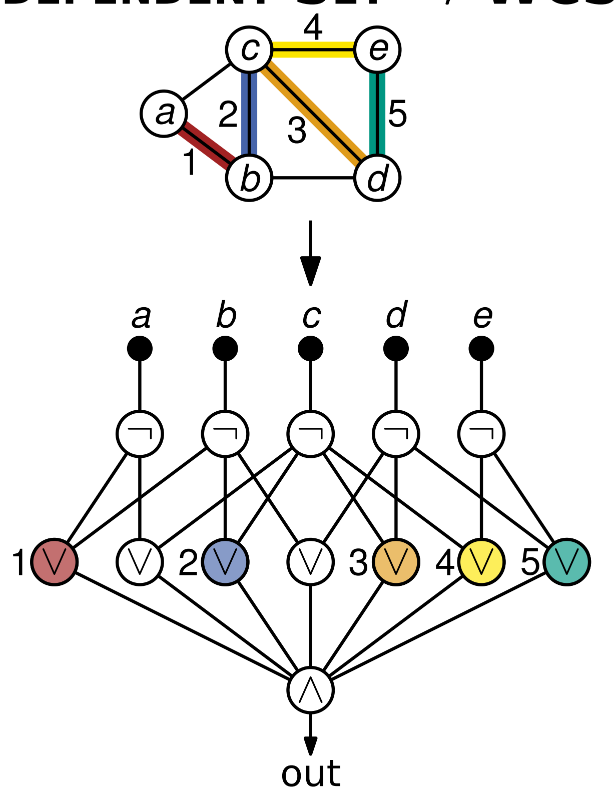
Problem: Weighted Circuit Satisfiability (WCS)
Gegeben ein Boolescher Schaltkreis und ein Parameter k.
Gibt es eine erfüllende Belegung mit Gewicht genau k?

Beispiel

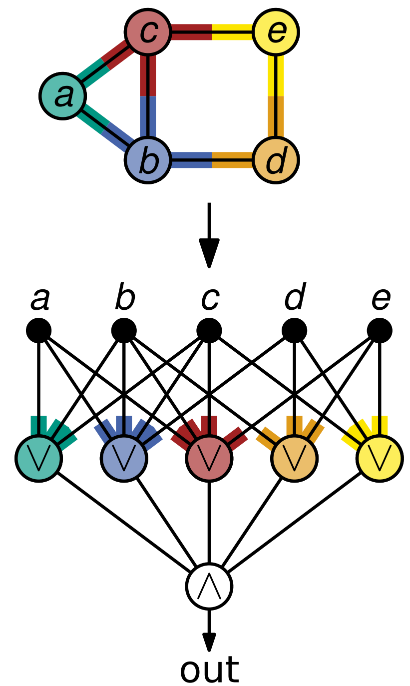


Reduktionen so weit das Auge reicht

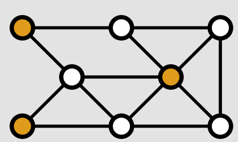
Independent Set → WCS



Dominating Set → WCS

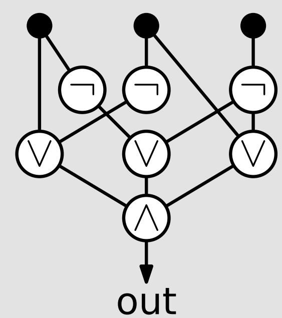


Independent Set

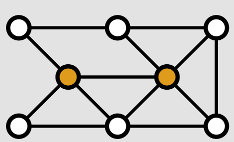


$V' \subseteq V$, sodass
$\forall e \in E \colon |e \cap V'| \leq 1$

WCS



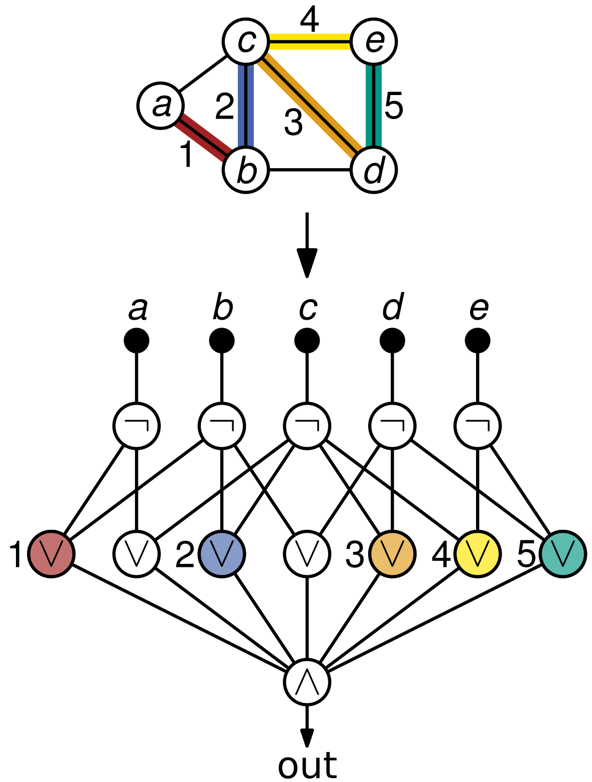
Dominating Set



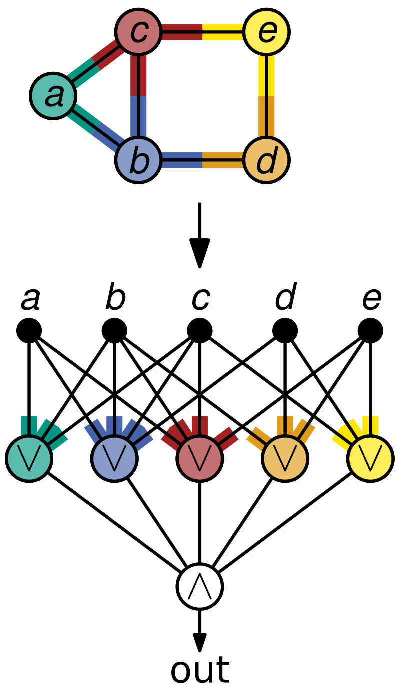
$V' \subseteq V$, sodass
$\forall v \in V \colon |N[v] \cap V'| \geq 1$

Reduktionen so weit das Auge reicht

Independent Set → WCS



Dominating Set → WCS



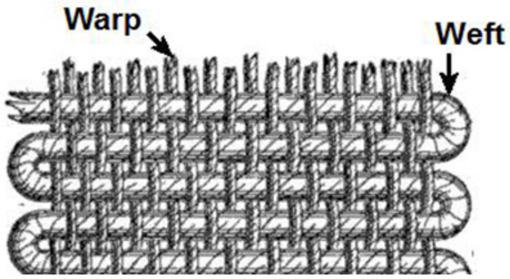
Beobachtungen

- die Schaltkreise haben beide konstante Tiefe
- der Schaltkreis für DS enthält mehr Knoten mit Eingangsgrad > 2
- ist DS deshalb schwerer (bezüglich FPT) als IS?

Weft

Definition
Der **Weft** eines Booleschen Schaltkreises ist die maximale Anzahl an Knoten mit Eingangsgrad > 2 auf einem gerichteten Pfad.

Problem
WCS$[\boldsymbol{t}]$ ist WCS eingeschränkt auf Schaltkreise mit konstanter Tiefe und Weft maximal t.

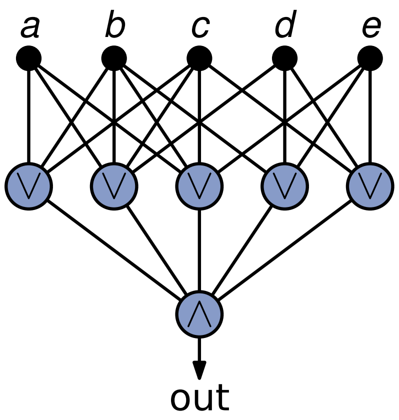


Definition
Die Klasse $\boldsymbol{W}[\boldsymbol{t}]$ enthält die Probleme, die eine parametrisierte Reduktion auf WCS$[t]$ zulassen.

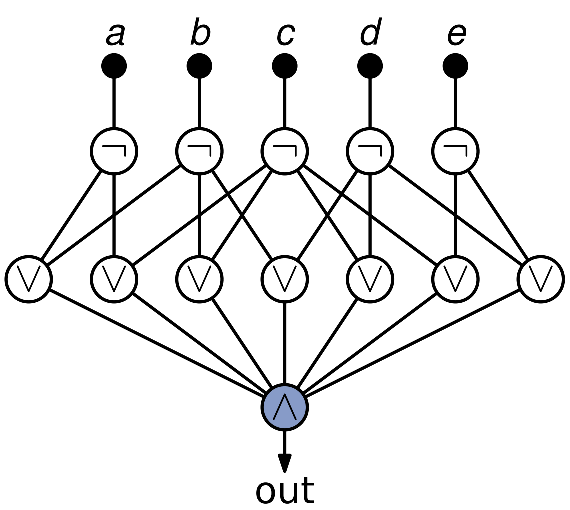
Eben gesehen

- Independent Set $\in W[1]$
- Dominating Set $\in W[2]$

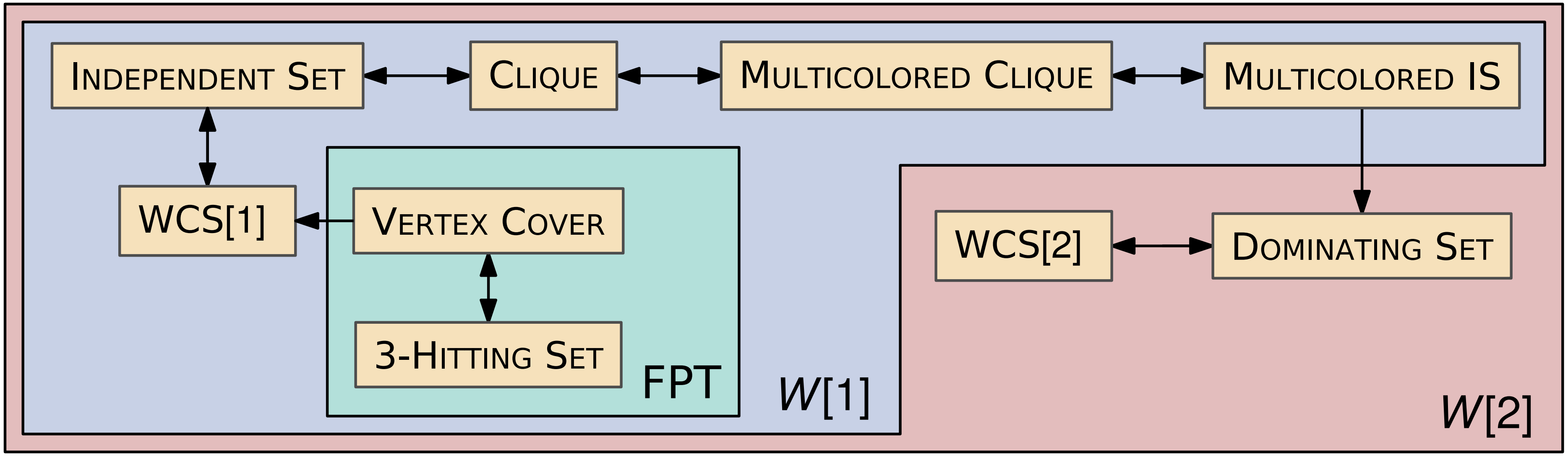
Weft 2



Weft 1



Bisherige FPT-Reduktionen



Weitere Reduktionen

- man kann auch WCS[1] auf INDEPENDENT SET reduzieren
- und WCS[2] auf DOMINATING SET
- man kann also jedes Problem aus $W[1]$ auf IS reduzieren
- solche Probleme nennt man $W[1]$-vollständig
- analog ist DS $W[2]$-vollständig
- beachte: $W[1] \subseteq W[2]$ Warum?
- außerdem gilt: FPT $\subseteq W[1] \subseteq W[2]$ Warum?

Zusammenfassung

Die W-Hierarchie

- Komplexitätsklassen FPT $\subseteq W[1] \subseteq W[2] \subseteq W[3] \subseteq \cdots$
- $W[t]$ definiert über ein prototypisches vollständiges Problem WCS[t]:
  $\mathcal{L} \in W[t] \Leftrightarrow \mathcal{L}$ auf WCS[t] reduzierbar (mittels FPT-Reduktion)
- Vermutung: jede der Inklusionen ist echt

Ist mein $W[t]$-Vollständigkeitsbeweis nutzlos, falls $W[t]$ = FPT?

- man weiß trotzdem: ich finde keinen FPT-Algo, weil sich da ein fundamentales ungelöstes Problem versteckt, nicht weil ich zu dumm bin
- findet man einen FPT-Algo für ein vollständiges Problem, so liefern die Reduktionen weitere FPT-Algos

Wie zeige ich, dass mein Problem schwer ist?

- reduziere von anderen schweren Problemen
- Reduktion von Independent Set oder Clique zeigt $W[1]$-Schwere
- Reduktion von Dominating Set oder Hitting Set zeigt $W[2]$-Schwere