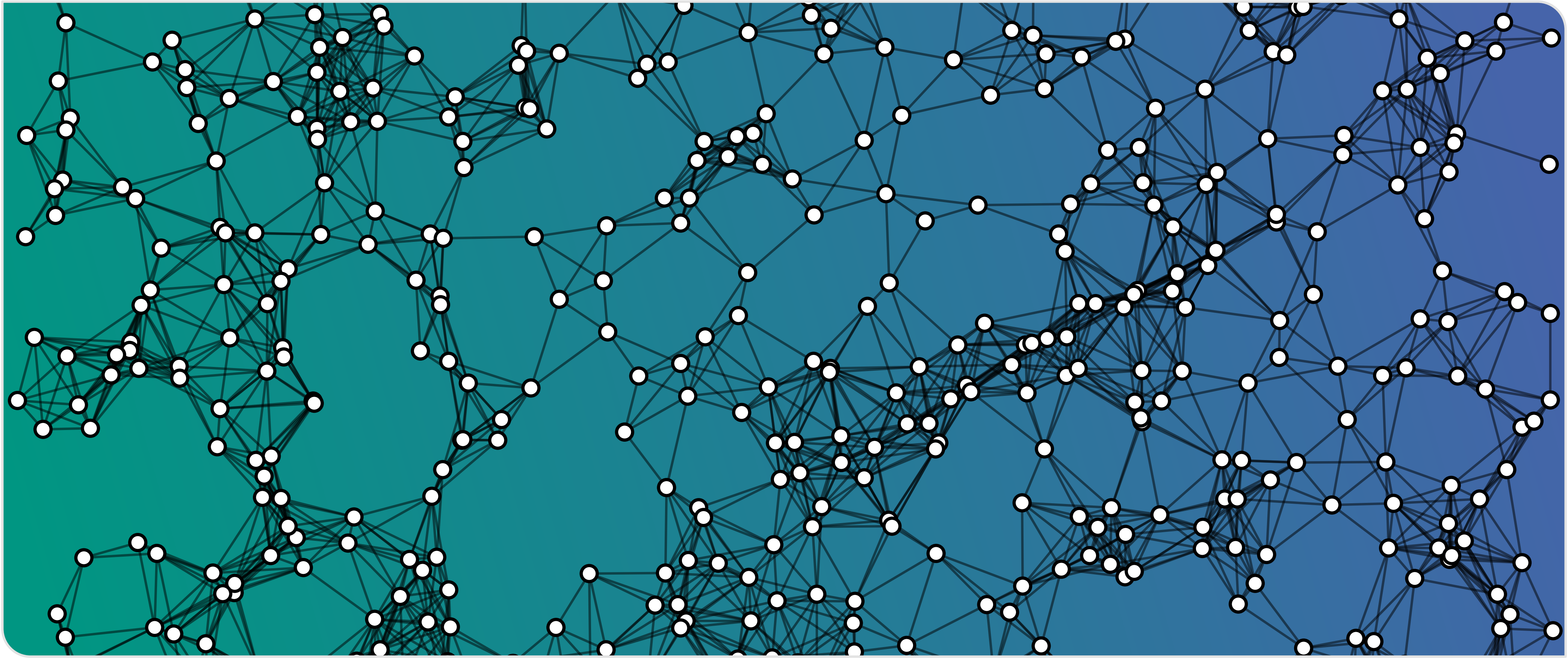
Karlsruher Institut für Technologie

# Parametrisierte Algorithmen

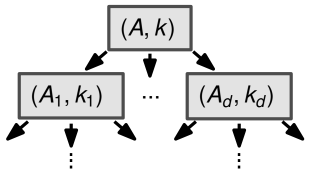
## Baumweite: Courcelles Theorem und chordale Graphen

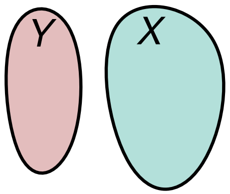


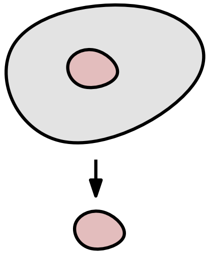
# Inhalt

## Basic Toolbox

- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung

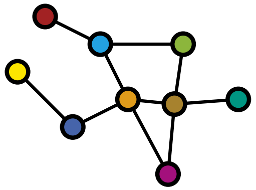


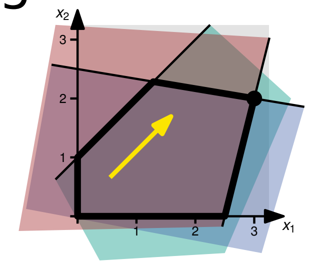



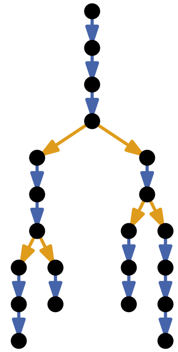



## Erweiterte Toolbox

- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding





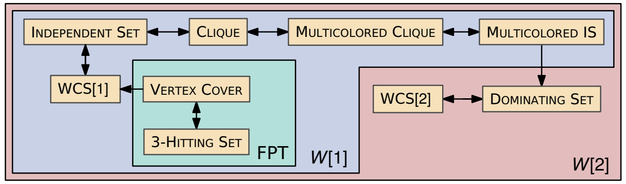



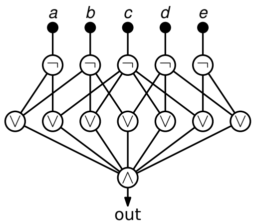
## Baumweite

- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem

## Untere Schranken

- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH



# Courcelles Theorem

## Vorherige Vorlesungen

- dynamische Programme über Baumzerlegungen

# Courcelles Theorem

## Vorherige Vorlesungen

- dynamische Programme über Baumzerlegungen
- liefert FPT-Algorithmus (bezgl. Baumweite) für sehr viele Probleme:

VERTEX COVER MAXCUT STEINER TREE HAMILTON CYCLE LONGEST CYCLE CYCLE PACKING
DOMINATING SET ODD CYCLE TRANSVERSAL LONGEST PATH CONNECTED DOMINATING SET
INDEPENDENT SET FEEDBACK VERTEX SET HAMILTON PATH CONNECTED VERTEX COVER
CHROMATIC NUMBER CONNECTED FEEDBACK VERTEX SET

# Courcelles Theorem

## Vorherige Vorlesungen

- dynamische Programme über Baumzerlegungen
- liefert FPT-Algorithmus (bezgl. Baumweite) für sehr viele Probleme:

VERTEX COVER  MAXCUT  STEINER TREE  HAMILTON CYCLE  LONGEST CYCLE  CYCLE PACKING
DOMINATING SET  ODD CYCLE TRANSVERSAL  LONGEST PATH  CONNECTED DOMINATING SET
INDEPENDENT SET  FEEDBACK VERTEX SET  HAMILTON PATH  CONNECTED VERTEX COVER
CHROMATIC NUMBER  CONNECTED FEEDBACK VERTEX SET

## Heute

- Metatheorem der Form: wenn ein Problem Eigenschaft $XY$ hat, dann gibt es einen FPT-Algorithmus (bezgl. Baumweite)

# Courcelles Theorem

## Vorherige Vorlesungen

- dynamische Programme über Baumzerlegungen
- liefert FPT-Algorithmus (bezgl. Baumweite) für sehr viele Probleme:

VERTEX COVER  MAXCUT  STEINER TREE  HAMILTON CYCLE  LONGEST CYCLE  CYCLE PACKING
DOMINATING SET  ODD CYCLE TRANSVERSAL  LONGEST PATH  CONNECTED DOMINATING SET
INDEPENDENT SET  FEEDBACK VERTEX SET  HAMILTON PATH  CONNECTED VERTEX COVER
CHROMATIC NUMBER  CONNECTED FEEDBACK VERTEX SET

## Heute

- Metatheorem der Form: wenn ein Problem Eigenschaft *XY* hat, dann gibt es einen FPT-Algorithmus (bezgl. Baumweite)
- Theorem wird hier nicht bewiesen

# Courcelles Theorem

## Vorherige Vorlesungen

- dynamische Programme über Baumzerlegungen
- liefert FPT-Algorithmus (bezgl. Baumweite) für sehr viele Probleme:

VERTEX COVER MAXCUT STEINER TREE HAMILTON CYCLE LONGEST CYCLE CYCLE PACKING DOMINATING SET ODD CYCLE TRANSVERSAL LONGEST PATH CONNECTED DOMINATING SET INDEPENDENT SET FEEDBACK VERTEX SET HAMILTON PATH CONNECTED VERTEX COVER CHROMATIC NUMBER CONNECTED FEEDBACK VERTEX SET

## Heute

- Metatheorem der Form: wenn ein Problem Eigenschaft $XY$ hat, dann gibt es einen FPT-Algorithmus (bezgl. Baumweite)
- Theorem wird hier nicht bewiesen
- aber ich verrate euch, was $XY$ ist

# $\mathbf{MSO_2}$ auf Graphen

(MSO = Monadische Prädikatenlogik zweiter Ordnung)

## Beispiel: Was drückt die folgende Formel aus?

- $G = (V, E)$ ist ein Graph und $X \subseteq V$
- $\mathrm{inc}(v, e)$ für $v \in V$ und $e \in E$ ist wahr $\Leftrightarrow$ $v$ ist ein Endpunkt von $e$

$$\begin{aligned} A(X) = \forall_{Y \subseteq V} \Big[ &(\exists_{u,v \in X} u \in Y \wedge v \notin Y) \\ &\Rightarrow (\exists_{e \in E} \exists_{u,v \in X} \mathrm{inc}(u, e) \wedge \mathrm{inc}(v, e) \wedge u \in Y \wedge v \notin Y) \Big] \end{aligned}$$

# $\mathbf{MSO_2}$ auf Graphen

(MSO = Monadische Prädikatenlogik zweiter Ordnung)

## Beispiel: Was drückt die folgende Formel aus?

- $G = (V, E)$ ist ein Graph und $X \subseteq V$
- $\mathrm{inc}(v, e)$ für $v \in V$ und $e \in E$ ist wahr $\Leftrightarrow$ $v$ ist ein Endpunkt von $e$

$$A(X) = \forall_{Y \subseteq V} \Big[ (\exists_{u,v \in X} u \in Y \wedge v \notin Y) \\ \Rightarrow (\exists_{e \in E} \exists_{u,v \in X} \mathrm{inc}(u, e) \wedge \mathrm{inc}(v, e) \wedge u \in Y \wedge v \notin Y) \Big]$$

- Lösung: $A(X) = \text{wahr} \Leftrightarrow X \subseteq V$ induziert zusammenh. Graphen

# $\text{MSO}_2$ auf Graphen

(MSO = Monadische Prädikatenlogik zweiter Ordnung)

## Beispiel: Was drückt die folgende Formel aus?

- $G = (V, E)$ ist ein Graph und $X \subseteq V$
- $\text{inc}(v, e)$ für $v \in V$ und $e \in E$ ist wahr $\Leftrightarrow$ $v$ ist ein Endpunkt von $e$

$$A(X) = \forall_{Y \subseteq V} \Big[ (\exists_{u,v \in X} u \in Y \land v \notin Y) \\ \Rightarrow (\exists_{e \in E} \exists_{u,v \in X} \text{inc}(u, e) \land \text{inc}(v, e) \land u \in Y \land v \notin Y) \Big]$$

- Lösung: $A(X) = \text{wahr} \Leftrightarrow X \subseteq V$ induziert zusammenh. Graphen

## Was erlaubt $\text{MSO}_2$?

# $MSO_2$ auf Graphen

(MSO = Monadische Prädikatenlogik zweiter Ordnung)

**Beispiel: Was drückt die folgende Formel aus?**

- $G = (V, E)$ ist ein Graph und $X \subseteq V$
- $\text{inc}(v, e)$ für $v \in V$ und $e \in E$ ist wahr $\Leftrightarrow$ $v$ ist ein Endpunkt von $e$

$$A(X) = \forall_{Y \subseteq V} \Big[ (\exists_{u,v \in X} u \in Y \land v \notin Y) \\ \Rightarrow (\exists_{e \in E} \exists_{u,v \in X} \text{inc}(u, e) \land \text{inc}(v, e) \land u \in Y \land v \notin Y) \Big]$$

- Lösung: $A(X) = \text{wahr} \Leftrightarrow X \subseteq V$ induziert zusammenh. Graphen

**Was erlaubt $MSO_2$?**

**Second Order:** zusätzlich zur Quantifizierung über Elemente (first order) auch über Relationen

first order: $\forall_{v \in V}$

second order: $\forall_{Y \subseteq V}$ $\forall_{Y \subseteq V \times V}$ $\forall_{Y \subseteq V \times V \times V}$

# $\text{MSO}_2$ auf Graphen

(MSO = Monadische Prädikatenlogik zweiter Ordnung)

## Beispiel: Was drückt die folgende Formel aus?

- $G = (V, E)$ ist ein Graph und $X \subseteq V$
- $\text{inc}(v, e)$ für $v \in V$ und $e \in E$ ist wahr $\Leftrightarrow$ $v$ ist ein Endpunkt von $e$

$$A(X) = \forall_{Y \subseteq V} \Big[ (\exists_{u,v \in X} u \in Y \wedge v \notin Y) \\ \Rightarrow (\exists_{e \in E} \exists_{u,v \in X} \text{inc}(u, e) \wedge \text{inc}(v, e) \wedge u \in Y \wedge v \notin Y) \Big]$$

- Lösung: $A(X) = \text{wahr} \Leftrightarrow X \subseteq V$ induziert zusammenh. Graphen

## Was erlaubt $\text{MSO}_2$?

**Second Order:** zusätzlich zur Quantifizierung über Elemente (first order) auch über Relationen

first order: $\forall_{v \in V}$

second order: $\forall_{Y \subseteq V}$ $\cancel{\forall_{Y \subseteq V \times V}}$ $\cancel{\forall_{Y \subseteq V \times V \times V}}$

**Monadic:** nur einstellig Relationen

# $MSO_2$ auf Graphen

(MSO = Monadische Prädikatenlogik zweiter Ordnung)

## Beispiel: Was drückt die folgende Formel aus?

- $G = (V, E)$ ist ein Graph und $X \subseteq V$
- $\mathrm{inc}(v, e)$ für $v \in V$ und $e \in E$ ist wahr $\Leftrightarrow$ $v$ ist ein Endpunkt von $e$

$$A(X) = \forall_{Y \subseteq V} \Big[ (\exists_{u,v \in X} u \in Y \wedge v \notin Y) \\ \Rightarrow (\exists_{e \in E} \exists_{u,v \in X} \mathrm{inc}(u, e) \wedge \mathrm{inc}(v, e) \wedge u \in Y \wedge v \notin Y) \Big]$$

- Lösung: $A(X) = \text{wahr} \Leftrightarrow X \subseteq V$ induziert zusammenh. Graphen

## Was erlaubt $MSO_2$?

**Second Order:** zusätzlich zur Quantifizierung über Elemente (first order) auch über Relationen

first order: $\forall_{v \in V}$

second order: $\forall_{Y \subseteq V}$ $\cancel{\forall_{Y \subseteq V \times V}}$ $\cancel{\forall_{Y \subseteq V \times V \times V}}$

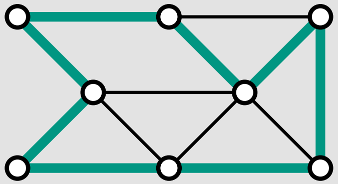
**Monadic:** nur einstellig Relationen

**2:** Quantifizierung über $V$ und über $E$ erlaubt $\forall_{v \in V}$ $\forall_{e \in E}$ $\forall_{V' \subseteq V}$ $\forall_{E' \subseteq E}$

(MSO$_1$ erlaubt nur Quantifizierung über $V$)

# Probleme in $MSO_2$

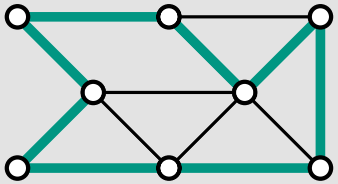
**Problem: HAMILTONKREIS**
Gibt es in einem gegebenen Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält?



**Drücke die Existenz eines Hamiltonkreises in $MSO_2$ aus**

# Probleme in $MSO_2$

**Problem: Hamiltonkreis**
Gibt es in einem gegebenen Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält?

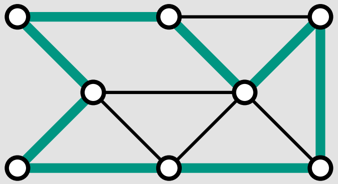


**Drücke die Existenz eines Hamiltonkreises in $MSO_2$ aus**

- beachte: $C \subseteq E$ ist Lösung $\Leftrightarrow$ $G[C]$ ist zusammenh. und 2-regulär

# Probleme in $MSO_2$

**Problem: HAMILTONKREIS**
Gibt es in einem gegebenen Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält?



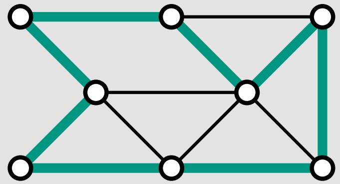
**Drücke die Existenz eines Hamiltonkreises in $MSO_2$ aus**

- beachte: $C \subseteq E$ ist Lösung $\Leftrightarrow$ $G[C]$ ist zusammenh. und 2-regulär
- grobe Formel:

$$\text{hamiltonisch} = \exists_{C \subseteq E}\, \text{conn}(C) \wedge \forall_{v \in V}\, \text{deg2}(v, C)$$

# Probleme in $MSO_2$

**Problem: HAMILTONKREIS**
Gibt es in einem gegebenen Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält?



**Drücke die Existenz eines Hamiltonkreises in $MSO_2$ aus**

- beachte: $C \subseteq E$ ist Lösung $\Leftrightarrow$ $G[C]$ ist zusammenh. und 2-regulär
- grobe Formel:

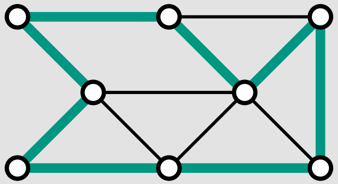
$$\text{hamiltonisch} = \exists_{C \subseteq E} \operatorname{conn}(C) \wedge \forall_{v \in V} \operatorname{deg2}(v, C)$$

- Zusammenhang:

$$\operatorname{conn}(C) = \forall_{Y \subseteq V} \Big[ (\exists_{u,v \in V} u \in Y \wedge v \notin Y) \\ \Rightarrow (\exists_{e \in C} \exists_{u \in Y} \exists_{v \notin Y} \operatorname{inc}(u, e) \wedge \operatorname{inc}(v, e) \Big]$$

# Probleme in $MSO_2$

**Problem: HAMILTONKREIS**
Gibt es in einem gegebenen Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält?



**Drücke die Existenz eines Hamiltonkreises in $MSO_2$ aus**

- beachte: $C \subseteq E$ ist Lösung $\Leftrightarrow$ $G[C]$ ist zusammenh. und 2-regulär
- grobe Formel:

$$\text{hamiltonisch} = \exists_{C \subseteq E} \, \text{conn}(C) \wedge \forall_{v \in V} \, \text{deg2}(v, C)$$

- Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \text{conn}(C) = \forall_{Y \subseteq V} \Big[ & (\exists_{u,v \in V} u \in Y \wedge v \notin Y) \\ & \Rightarrow (\exists_{e \in C} \exists_{u \in Y} \exists_{v \notin Y} \, \text{inc}(u, e) \wedge \text{inc}(v, e) \Big] \end{aligned}$$

- Knotengrad 2:

$$\begin{aligned} \text{deg2}(v, C) = \exists_{e_1, e_2 \in C} \Big[ & e_1 \neq e_2 \wedge \text{inc}(v, e_1) \wedge \text{inc}(v, e_2) \wedge \\ & \big( \forall_{e_3 \in C} \, \text{inc}(v, e_3) \Rightarrow (e_3 = e_1 \vee e_3 = e_2) \big) \Big] \end{aligned}$$

## Courcelles Theorem

**Theorem (ohne Beweis)**
Sei $\varphi$ eine $MSO_2$ Formel und sei $G$ ein Graph zusammen mit einer Auswertung für alle freien Variablen von $\varphi$ und mit einer Baumzerlegung der Weite $t$. Dann gibt es einen Algorithmus, der in $f(|\varphi|, t) \cdot n$ Zeit testet ob $\varphi$ von $G$ erfüllt wird (für eine berechenbare Funktion $f$).

# Courcelles Theorem

**Theorem (ohne Beweis)**
Sei $\varphi$ eine $MSO_2$ Formel und sei $G$ ein Graph zusammen mit einer Auswertung für alle freien Variablen von $\varphi$ und mit einer Baumzerlegung der Weite $t$. Dann gibt es einen Algorithmus, der in $f(|\varphi|, t) \cdot n$ Zeit testet ob $\varphi$ von $G$ erfüllt wird (für eine berechenbare Funktion $f$).

**Beispiel**

- die Eigenschaft einen Hamiltonkreis zu haben kann mit einer konstant großen $MSO_2$ Formel ausgedrückt werden
- $\Rightarrow$ Hamiltonkreis hat einen FPT-Algorithmus bezgl. Baumweite

# Courcelles Theorem

**Theorem (ohne Beweis)**
Sei $\varphi$ eine $\mathrm{MSO}_2$ Formel und sei $G$ ein Graph zusammen mit einer Auswertung für alle freien Variablen von $\varphi$ und mit einer Baumzerlegung der Weite $t$. Dann gibt es einen Algorithmus, der in $f(|\varphi|, t) \cdot n$ Zeit testet ob $\varphi$ von $G$ erfüllt wird (für eine berechenbare Funktion $f$).

**Beispiel**

- die Eigenschaft einen Hamiltonkreis zu haben kann mit einer konstant großen $\mathrm{MSO}_2$ Formel ausgedrückt werden
- $\Rightarrow$ Hamiltonkreis hat einen FPT-Algorithmus bezgl. Baumweite

**Was machen die „freien Variablen“?**

- nützlich, falls Eingabe z.B. aus $G = (V, E)$ und $X \subseteq V$ besteht

# Courcelles Theorem

**Theorem (ohne Beweis)**
Sei $\varphi$ eine $\text{MSO}_2$ Formel und sei $G$ ein Graph zusammen mit einer Auswertung für alle freien Variablen von $\varphi$ und mit einer Baumzerlegung der Weite $t$. Dann gibt es einen Algorithmus, der in $f(|\varphi|, t) \cdot n$ Zeit testet ob $\varphi$ von $G$ erfüllt wird (für eine berechenbare Funktion $f$).

**Beispiel**

- die Eigenschaft einen Hamiltonkreis zu haben kann mit einer konstant großen $\text{MSO}_2$ Formel ausgedrückt werden
- $\Rightarrow$ Hamiltonkreis hat einen FPT-Algorithmus bezgl. Baumweite

**Was machen die „freien Variablen“?**

- nützlich, falls Eingabe z.B. aus $G = (V, E)$ und $X \subseteq V$ besteht
- Beispiel: bei Steiner Baum ist zusätzlich zum Graphen eine Menge von Terminalknoten gegeben

# Courcelles Theorem

**Theorem (ohne Beweis)**
Sei $\varphi$ eine $MSO_2$ Formel und sei $G$ ein Graph zusammen mit einer Auswertung für alle freien Variablen von $\varphi$ und mit einer Baumzerlegung der Weite $t$. Dann gibt es einen Algorithmus, der in $f(|\varphi|, t) \cdot n$ Zeit testet ob $\varphi$ von $G$ erfüllt wird (für eine berechenbare Funktion $f$).

**Beispiel 2:** $k$-Vertex Cover

# Courcelles Theorem

**Theorem (ohne Beweis)**
Sei $\varphi$ eine $\mathrm{MSO}_2$ Formel und sei $G$ ein Graph zusammen mit einer Auswertung für alle freien Variablen von $\varphi$ und mit einer Baumzerlegung der Weite $t$. Dann gibt es einen Algorithmus, der in $f(|\varphi|, t) \cdot n$ Zeit testet ob $\varphi$ von $G$ erfüllt wird (für eine berechenbare Funktion $f$).

**Beispiel 2:** $k$-VERTEX COVER

- grobe Formel:

$$\text{k-vc} = \exists_{X \subseteq V}(\text{vc}(X) \wedge \text{size-k}(X))$$

# Courcelles Theorem

**Theorem (ohne Beweis)**
Sei $\varphi$ eine $MSO_2$ Formel und sei $G$ ein Graph zusammen mit einer Auswertung für alle freien Variablen von $\varphi$ und mit einer Baumzerlegung der Weite $t$. Dann gibt es einen Algorithmus, der in $f(|\varphi|, t) \cdot n$ Zeit testet ob $\varphi$ von $G$ erfüllt wird (für eine berechenbare Funktion $f$).

**Beispiel 2:** $k$-VERTEX COVER

- grobe Formel:

$$\text{k-vc} = \exists_{X \subseteq V}(\text{vc}(X) \wedge \text{size-k}(X))$$

- Abdeckung aller Kanten:

$$\text{vc}(X) = \forall_{e \in E} \exists_{v \in X} \, \text{inc}(v, e)$$

# Courcelles Theorem

**Theorem (ohne Beweis)**
Sei $\varphi$ eine $\text{MSO}_2$ Formel und sei $G$ ein Graph zusammen mit einer Auswertung für alle freien Variablen von $\varphi$ und mit einer Baumzerlegung der Weite $t$. Dann gibt es einen Algorithmus, der in $f(|\varphi|, t) \cdot n$ Zeit testet ob $\varphi$ von $G$ erfüllt wird (für eine berechenbare Funktion $f$).

**Beispiel 2:** $k$-Vertex Cover

- grobe Formel:

$$\text{k-vc} = \exists_{X \subseteq V}(\text{vc}(X) \wedge \text{size-k}(X))$$

- Abdeckung aller Kanten:

$$\text{vc}(X) = \forall_{e \in E} \exists_{v \in X} \, \text{inc}(v, e)$$

- maximal $k$ Knoten:

$$\text{size-k}(X) = \forall_{v_0, \dots, v_k \in V} v_0 \notin X \vee \dots \vee v_k \notin X \vee v_0 = v_1 \vee v_0 = v_2 \vee \dots \vee v_{k-1} = v_k$$

(für $k + 1$ Knoten ist einer nicht in $X$ oder zwei der Knoten sind gleich)

# Courcelles Theorem

**Theorem (ohne Beweis)**
Sei $\varphi$ eine $\text{MSO}_2$ Formel und sei $G$ ein Graph zusammen mit einer Auswertung für alle freien Variablen von $\varphi$ und mit einer Baumzerlegung der Weite $t$. Dann gibt es einen Algorithmus, der in $f(|\varphi|, t) \cdot n$ Zeit testet ob $\varphi$ von $G$ erfüllt wird (für eine berechenbare Funktion $f$).

**Beispiel 2:** $k$-Vertex Cover

- grobe Formel:

$$\text{k-vc} = \exists_{X \subseteq V}(\text{vc}(X) \wedge \text{size-k}(X))$$

- Abdeckung aller Kanten:

$$\text{vc}(X) = \forall_{e \in E} \exists_{v \in X} \text{inc}(v, e)$$

- maximal $k$ Knoten:

$$\text{size-k}(X) = \forall_{v_0,\dots,v_k \in V} v_0 \notin X \vee \cdots \vee v_k \notin X \vee v_0 = v_1 \vee v_0 = v_2 \vee \cdots \vee v_{k-1} = v_k$$

(für $k+1$ Knoten ist einer nicht in $X$ oder zwei der Knoten sind gleich)

**Achtung:** $|\varphi| = |\text{k-vc}|$ hängt von $k$ ab

$\Rightarrow$ Courcelles Theorem liefert nur einen FPT-Algorithmus bezgl. beider Parameter $k$ und $t$

# Courcelles Theorem – Optimierung

Karlsruher Institut für Technologie

**Theorem (ohne Beweis)**
Sei $\varphi$ eine $MSO_2$ Formel mit $p$ freien monadischen Variablen $X_1, \dots, X_p$ und sei $\alpha(x_1, \dots, x_p)$ eine affine Funktion. Sei $G$ ein Graph zusammen mit einer Baumzerlegung der Weite $t$ und mit einer Auswertung für alle freien Variablen von $\varphi$ außer $X_1, \dots, X_p$. Dann gibt es einen Algorithmus, der in $f(|\varphi|, t) \cdot n$ Zeit Auswertungen für $X_1, \dots X_p$ findet, sodass $\varphi(X_1, \dots, X_p) = \texttt{true}$ und $\alpha(|X_1|, \dots, |X_p|)$ maximal oder minimal.

Erinnerung affine Funktion: $\alpha(x_1, \dots, x_p) = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i x_i$

# Courcelles Theorem – Optimierung

**Theorem (ohne Beweis)**
Sei $\varphi$ eine $\mathrm{MSO}_2$ Formel mit $p$ freien monadischen Variablen $X_1, \dots, X_p$ und sei $\alpha(x_1, \dots, x_p)$ eine affine Funktion. Sei $G$ ein Graph zusammen mit einer Baumzerlegung der Weite $t$ und mit einer Auswertung für alle freien Variablen von $\varphi$ außer $X_1, \dots, X_p$. Dann gibt es einen Algorithmus, der in $f(|\varphi|, t) \cdot n$ Zeit Auswertungen für $X_1, \dots X_p$ findet, sodass $\varphi(X_1, \dots, X_p) = \texttt{true}$ und $\alpha(|X_1|, \dots, |X_p|)$ maximal oder minimal.

**Beispiel:** Vertex Cover

Erinnerung affine Funktion: $\alpha(x_1, \dots, x_p) = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i x_i$

# Courcelles Theorem – Optimierung

**Theorem (ohne Beweis)**
Sei $\varphi$ eine $\text{MSO}_2$ Formel mit $p$ freien monadischen Variablen $X_1, \dots, X_p$ und sei $\alpha(x_1, \dots, x_p)$ eine affine Funktion. Sei $G$ ein Graph zusammen mit einer Baumzerlegung der Weite $t$ und mit einer Auswertung für alle freien Variablen von $\varphi$ außer $X_1, \dots, X_p$. Dann gibt es einen Algorithmus, der in $f(|\varphi|, t) \cdot n$ Zeit Auswertungen für $X_1, \dots X_p$ findet, sodass $\varphi(X_1, \dots, X_p) = \texttt{true}$ und $\alpha(|X_1|, \dots, |X_p|)$ maximal oder minimal.

**Beispiel:** Vertex Cover

- eine freie Variable $X \subseteq V$
- Ziel 1: $X$ ist Vertex Cover: $\varphi(X) = \text{vc}(X) = \forall_{e \in E} \exists_{v \in X} \text{inc}(v, e)$

Erinnerung affine Funktion: $\alpha(x_1, \dots, x_p) = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i x_i$

# Courcelles Theorem – Optimierung

Karlsruher Institut für Technologie

**Theorem (ohne Beweis)**
Sei $\varphi$ eine $MSO_2$ Formel mit $p$ freien monadischen Variablen $X_1, \dots, X_p$ und sei $\alpha(x_1, \dots, x_p)$ eine affine Funktion. Sei $G$ ein Graph zusammen mit einer Baumzerlegung der Weite $t$ und mit einer Auswertung für alle freien Variablen von $\varphi$ außer $X_1, \dots, X_p$. Dann gibt es einen Algorithmus, der in $f(|\varphi|, t) \cdot n$ Zeit Auswertungen für $X_1, \dots X_p$ findet, sodass $\varphi(X_1, \dots, X_p) = \texttt{true}$ und $\alpha(|X_1|, \dots, |X_p|)$ maximal oder minimal.

**Beispiel:** VERTEX COVER

- eine freie Variable $X \subseteq V$
- Ziel 1: $X$ ist Vertex Cover: $\varphi(X) = \mathrm{vc}(X) = \forall_{e \in E} \exists_{v \in X} \mathrm{inc}(v, e)$
- Ziel 2: $X$ ist minimal unter allen Vertex Covern: $\alpha(x) = x$

Erinnerung affine Funktion: $\alpha(x_1, \dots, x_p) = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i x_i$

# Courcelles Theorem – Optimierung

**Theorem (ohne Beweis)**
Sei $\varphi$ eine $MSO_2$ Formel mit $p$ freien monadischen Variablen $X_1, \dots, X_p$ und sei $\alpha(x_1, \dots, x_p)$ eine affine Funktion. Sei $G$ ein Graph zusammen mit einer Baumzerlegung der Weite $t$ und mit einer Auswertung für alle freien Variablen von $\varphi$ außer $X_1, \dots, X_p$. Dann gibt es einen Algorithmus, der in $f(|\varphi|, t) \cdot n$ Zeit Auswertungen für $X_1, \dots X_p$ findet, sodass $\varphi(X_1, \dots, X_p) = \mathtt{true}$ und $\alpha(|X_1|, \dots, |X_p|)$ maximal oder minimal.

**Beispiel:** Vertex Cover

- eine freie Variable $X \subseteq V$
- Ziel 1: $X$ ist Vertex Cover: $\varphi(X) = \mathrm{vc}(X) = \forall_{e \in E} \exists_{v \in X} \mathrm{inc}(v, e)$
- Ziel 2: $X$ ist minimal unter allen Vertex Covern: $\alpha(x) = x$

$\Rightarrow$ $|\varphi|$ ist konstant

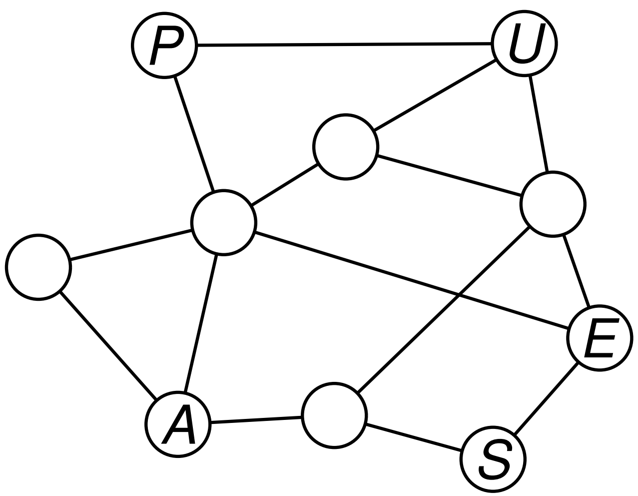
$\Rightarrow$ FPT-Algorithmus für Vertex Cover bezgl. Baumweite

Erinnerung affine Funktion: $\alpha(x_1, \dots, x_p) = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i x_i$

# Was ist das Problem?

## Noch ein Beispiel

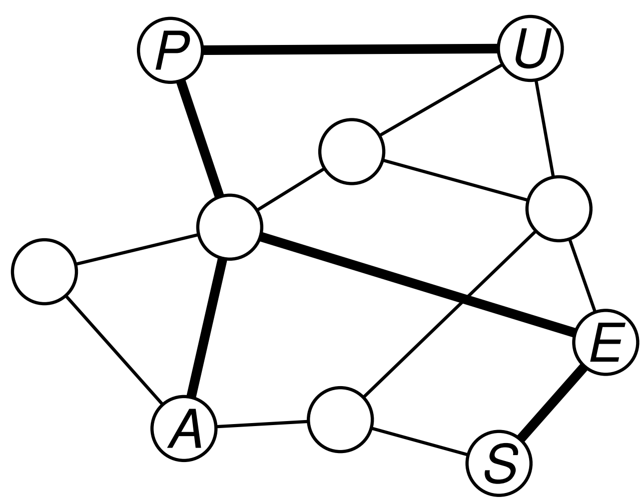
- $G = (V, E)$ ist der gezeigte Graph und $T = \{P, A, U, S, E\} \subseteq V$
- $\varphi(X) = \forall_{Y \subseteq V} \big[ (\exists_{u,v \in T} u \in Y \land v \notin Y)$
  $\Rightarrow (\exists_{u,v \in V} \exists_{e \in X} u \in Y \land v \notin Y \land \mathrm{inc}(u, e) \land \mathrm{inc}(v, e)) \big]$
- $\alpha(x) = x$
- **Aufgabe:** finde $X \subseteq E$, sodass $\alpha(|X|)$ minimal ist



# Was ist das Problem?

## Noch ein Beispiel

- $G = (V, E)$ ist der gezeigte Graph und $T = \{P, A, U, S, E\} \subseteq V$
- $\varphi(X) = \forall_{Y \subseteq V} \Big[ (\exists_{u,v \in T} u \in Y \wedge v \notin Y)$
  $\Rightarrow (\exists_{u,v \in V} \exists_{e \in X} u \in Y \wedge v \notin Y \wedge \mathrm{inc}(u, e) \wedge \mathrm{inc}(v, e)) \Big]$
- $\alpha(x) = x$
- **Aufgabe:** finde $X \subseteq E$, sodass $\alpha(|X|)$ minimal ist




- **Lösung:** zusammenh. Teilgraph mit minimaler Kantenzahl, der alle Knoten aus $T$ enthält $\Rightarrow$ Steiner Baum

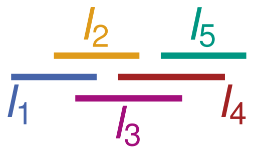
# Evaluation

https://onlineumfrage.kit.edu/evasys/online.php?p=LCZKE

# Intervallgraphen

## Definition

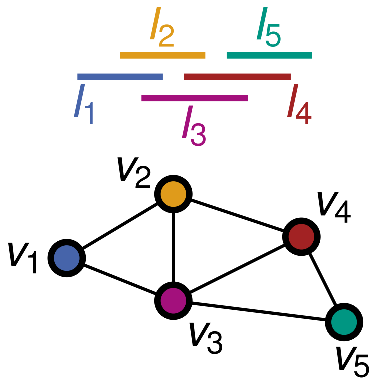
- Menge von $n$ Intervallen $\{I_1, \dots, I_n\}$ in $\mathbb{R}$



# Intervallgraphen

## Definition

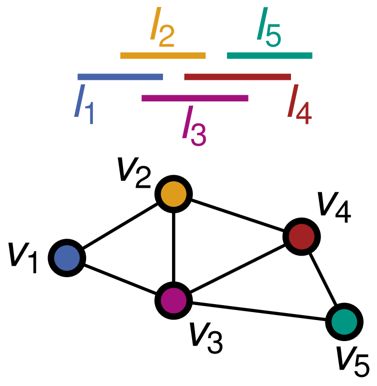
- Menge von $n$ Intervallen $\{I_1, \dots, I_n\}$ in $\mathbb{R}$
- Graph $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{\{v_i, v_j\} \mid I_i \cap I_j \neq \emptyset\}$



# Intervallgraphen

## Definition

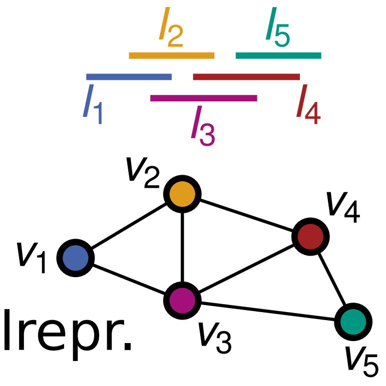
- Menge von $n$ Intervallen $\{I_1, \ldots, I_n\}$ in $\mathbb{R}$
- Graph $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $E = \{\{v_i, v_j\} \mid I_i \cap I_j \neq \emptyset\}$
- $I_1, \ldots, I_n$ heißt **Intervallrepräsentation** von $G$



# Intervallgraphen

**Definition**

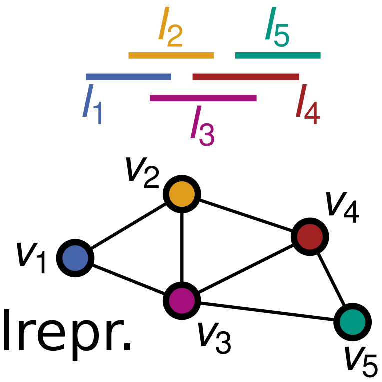
- Menge von $n$ Intervallen $\{I_1, \dots, I_n\}$ in $\mathbb{R}$
- Graph $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{\{v_i, v_j\} \mid I_i \cap I_j \neq \emptyset\}$
- $I_1, \dots, I_n$ heißt **Intervallrepräsentation** von $G$
- ein Graph ist ein **Intervallgraph** $\Leftrightarrow$ er hat eine Intervallrepr.



# Intervallgraphen

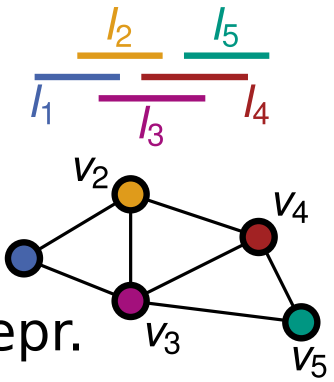
## Definition

- Menge von $n$ Intervallen $\{I_1, \dots, I_n\}$ in $\mathbb{R}$
- Graph $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{\{v_i, v_j\} \mid I_i \cap I_j \neq \emptyset\}$
- $I_1, \dots, I_n$ heißt **Intervallrepräsentation** von $G$
- ein Graph ist ein **Intervallgraph** $\Leftrightarrow$ er hat eine Intervallrepr.




**Was ist die Pfadweite eines Intervallgraphen?**

# Intervallgraphen



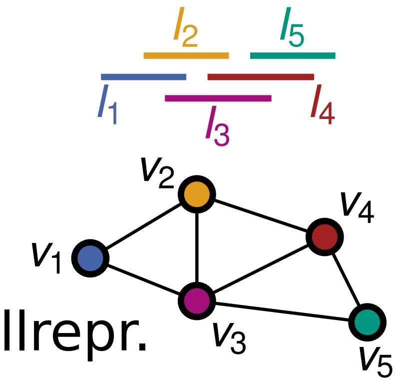

## Definition

- Menge von $n$ Intervallen $\{I_1, \dots, I_n\}$ in $\mathbb{R}$
- Graph $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{\{v_i, v_j\} \mid I_i \cap I_j \neq \emptyset\}$
- $I_1, \dots, I_n$ heißt **Intervallrepräsentation** von $G$
- ein Graph ist ein **Intervallgraph** $\Leftrightarrow$ er hat eine Intervallrepr.

## Was ist die Pfadweite eines Intervallgraphen?

- sei $\omega(G)$ die Cliquengröße und pw$(G)$ die Pfadweite von $G$

# Intervallgraphen



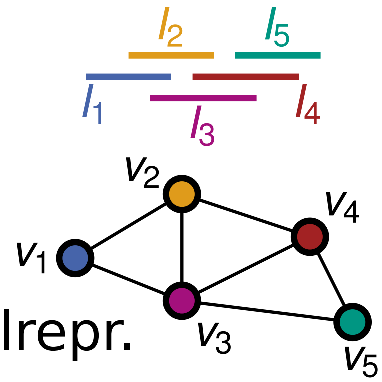

## Definition

- Menge von $n$ Intervallen $\{I_1, \dots, I_n\}$ in $\mathbb{R}$
- Graph $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{\{v_i, v_j\} \mid I_i \cap I_j \neq \emptyset\}$
- $I_1, \dots, I_n$ heißt **Intervallrepräsentation** von $G$
- ein Graph ist ein **Intervallgraph** $\Leftrightarrow$ er hat eine Intervallrepr.

## Was ist die Pfadweite eines Intervallgraphen?

- sei $\omega(G)$ die Cliquengröße und $\mathrm{pw}(G)$ die Pfadweite von $G$
- es gilt: $\mathrm{pw}(G) \leq \omega(G) - 1$ (Intervallrepräsentation liefert Pfadzerlegung)

# Intervallgraphen




**Definition**

- Menge von $n$ Intervallen $\{I_1, \dots, I_n\}$ in $\mathbb{R}$
- Graph $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{\{v_i, v_j\} \mid I_i \cap I_j \neq \emptyset\}$
- $I_1, \dots, I_n$ heißt **Intervallrepräsentation** von $G$
- ein Graph ist ein **Intervallgraph** $\Leftrightarrow$ er hat eine Intervallrepr.

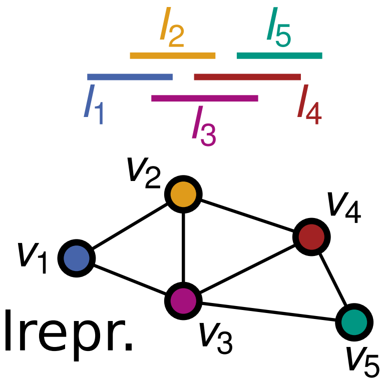
**Was ist die Pfadweite eines Intervallgraphen?**

- sei $\omega(G)$ die Cliquengröße und $\mathrm{pw}(G)$ die Pfadweite von $G$
- es gilt: $\mathrm{pw}(G) \leq \omega(G) - 1$ (Intervallrepräsentation liefert Pfadzerlegung)
- und: $\mathrm{pw}(G) \geq \omega(G) - 1$ (Knoten einer Clique teilen sich eine Bag)

# Intervallgraphen

## Definition

- Menge von $n$ Intervallen $\{I_1, \dots, I_n\}$ in $\mathbb{R}$
- Graph $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{\{v_i, v_j\} \mid I_i \cap I_j \neq \emptyset\}$
- $I_1, \dots, I_n$ heißt **Intervallrepräsentation** von $G$
- ein Graph ist ein **Intervallgraph** $\Leftrightarrow$ er hat eine Intervallrepr.



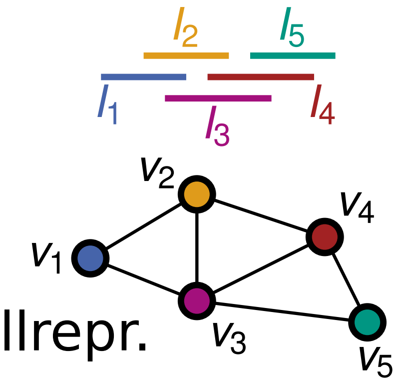

## Was ist die Pfadweite eines Intervallgraphen?

- sei $\omega(G)$ die Cliquengröße und pw$(G)$ die Pfadweite von $G$
- es gilt: $\mathrm{pw}(G) \leq \omega(G) - 1$ (Intervallrepräsentation liefert Pfadzerlegung)
- und: $\mathrm{pw}(G) \geq \omega(G) - 1$ (Knoten einer Clique teilen sich eine Bag)
- $\Rightarrow \mathrm{pw}(G) = \omega(G) - 1$

## Intervallgraphen

### Definition

- Menge von $n$ Intervallen $\{I_1, \dots, I_n\}$ in $\mathbb{R}$
- Graph $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{\{v_i, v_j\} \mid I_i \cap I_j \neq \emptyset\}$
- $I_1, \dots, I_n$ heißt **Intervallrepräsentation** von $G$
- ein Graph ist ein **Intervallgraph** $\Leftrightarrow$ er hat eine Intervallrepr.




### Was ist die Pfadweite eines Intervallgraphen?

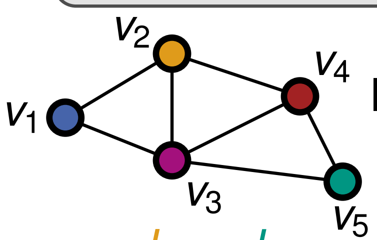
- sei $\omega(G)$ die Cliquengröße und $\mathrm{pw}(G)$ die Pfadweite von $G$
- es gilt: $\mathrm{pw}(G) \leq \omega(G) - 1$ (Intervallrepräsentation liefert Pfadzerlegung)
- und: $\mathrm{pw}(G) \geq \omega(G) - 1$ (Knoten einer Clique teilen sich eine Bag)
- $\Rightarrow \mathrm{pw}(G) = \omega(G) - 1$

### Intervallweite

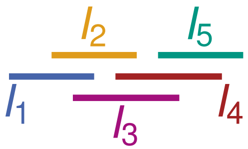
- $\text{interval-width}(G) = \min\{\omega(G') \mid G \subseteq G' \text{ und } G' \text{ ist Intervallgraph}\}$
- $\Rightarrow \mathrm{pw}(G) = \text{interval-width}(G) - 1$

# Chordale Graphen

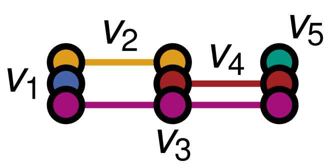
**Definition**
Ein Graph $G$ ist **chordal**, wenn er eine Schnittrepräsentation mit Teilbäumen eines Baumes hat. (statt Teilpfade eines Pfades, wie bei Intervallgraphen)



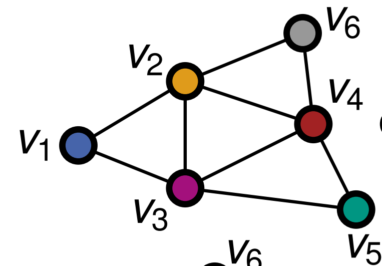

Intervallgraph



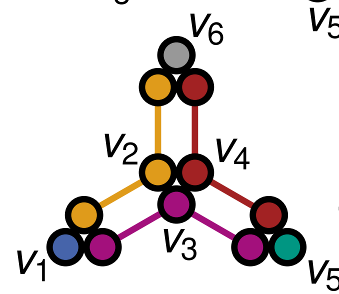

Intervallrepräsentation




Schnittrepräsentation mit Teilpfaden eines Pfads



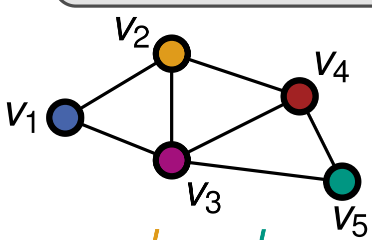

chordaler Graph



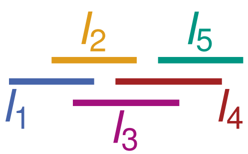

Schnittrepräsentation mit Teilbäumen eines Baums

# Chordale Graphen

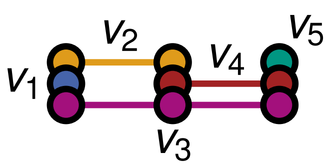
**Definition**
Ein Graph $G$ ist **chordal**, wenn er eine Schnittrepräsentation mit Teilbäumen eines Baumes hat. (statt Teilpfade eines Pfades, wie bei Intervallgraphen)



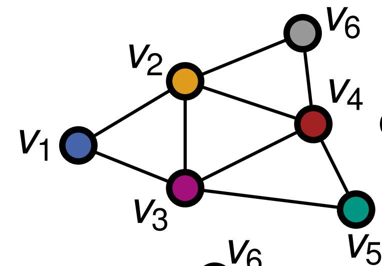

Intervallgraph



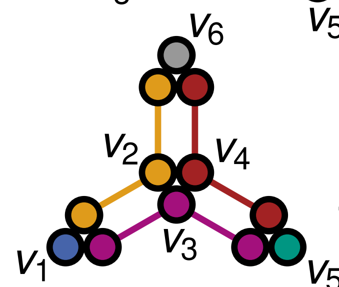

Intervallrepräsentation




Schnittrepräsentation mit Teilpfaden eines Pfads




chordaler Graph



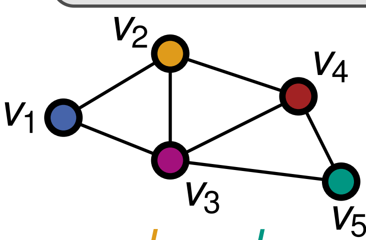

Schnittrepräsentation mit Teilbäumen eines Baums

## Äquivalente Definition

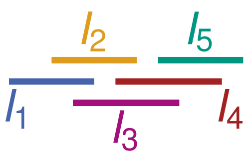
- $G$ chordal $\Leftrightarrow$ $G$ hat keinen induzierten Kreis der Länge 4 oder mehr

# Chordale Graphen

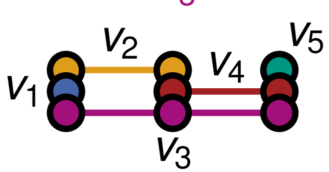
**Definition**
Ein Graph $G$ ist **chordal**, wenn er eine Schnittrepräsentation mit Teilbäumen eines Baumes hat. (statt Teilpfade eines Pfades, wie bei Intervallgraphen)



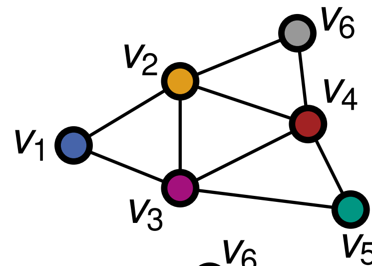

Intervallgraph



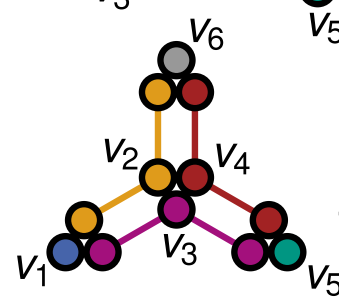

Intervallrepräsentation




Schnittrepräsentation mit Teilpfaden eines Pfads




chordaler Graph




Schnittrepräsentation mit Teilbäumen eines Baums

## Äquivalente Definition

- $G$ chordal $\Leftrightarrow$ $G$ hat keinen induzierten Kreis der Länge 4 oder mehr

## Chordalweite

- chordal-width$(G) = \min\{\omega(G') \mid G \subseteq G'$ und $G'$ ist chordal$\}$
- $\Rightarrow$ tw$(G)$ = chordal-width$(G) - 1$

# Zusammenfassung

Karlsruher Institut für Technologie

## Courcelles Theorem

- Problem in $MSO_2$ ausdrückbar $\Rightarrow$ FPT bezüglich Baumweite

# Zusammenfassung

## Courcelles Theorem

- Problem in $MSO_2$ ausdrückbar $\Rightarrow$ FPT bezüglich Baumweite
- mächtiges Tool, da sich viele Probleme in $MSO_2$ ausdrücken lassen

# Zusammenfassung

## Courcelles Theorem

- Problem in $\mathrm{MSO}_2$ ausdrückbar $\Rightarrow$ FPT bezüglich Baumweite
- mächtiges Tool, da sich viele Probleme in $\mathrm{MSO}_2$ ausdrücken lassen
- **Achtung:** Courcelle liefert nur sehr schlechte Laufzeiten:

# Zusammenfassung

## Courcelles Theorem

- Problem in $MSO_2$ ausdrückbar $\Rightarrow$ FPT bezüglich Baumweite
- mächtiges Tool, da sich viele Probleme in $MSO_2$ ausdrücken lassen
- **Achtung:** Courcelle liefert nur sehr schlechte Laufzeiten:
  - $f(k)$ ist mehrfach exponentiell; denk an: $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^k}}}}}$

# Zusammenfassung

## Courcelles Theorem

- Problem in $MSO_2$ ausdrückbar $\Rightarrow$ FPT bezüglich Baumweite
- mächtiges Tool, da sich viele Probleme in $MSO_2$ ausdrücken lassen
- **Achtung:** Courcelle liefert nur sehr schlechte Laufzeiten:
  - $f(k)$ ist mehrfach exponentiell; denk an: $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^k}}}}}$
  - Höhe des Potenzturms nicht durch eine Konstante beschränkt (linear in der Anzahl alternierender $\forall$ und $\exists$ Quantoren)

# Zusammenfassung

## Courcelles Theorem

- Problem in $MSO_2$ ausdrückbar $\Rightarrow$ FPT bezüglich Baumweite
- mächtiges Tool, da sich viele Probleme in $MSO_2$ ausdrücken lassen
- **Achtung:** Courcelle liefert nur sehr schlechte Laufzeiten:
  - $f(k)$ ist mehrfach exponentiell; denk an: $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^k}}}}}$
  - Höhe des Potenzturms nicht durch eine Konstante beschränkt
    (linear in der Anzahl alternierender $\forall$ und $\exists$ Quantoren)

## Chordale Graphen

- Baumweite = minimale Cliquenzahl von chordalem Supergraphen

# Zusammenfassung

**Courcelles Theorem**

- Problem in $MSO_2$ ausdrückbar $\Rightarrow$ FPT bezüglich Baumweite
- mächtiges Tool, da sich viele Probleme in $MSO_2$ ausdrücken lassen
- **Achtung:** Courcelle liefert nur sehr schlechte Laufzeiten:
  - $f(k)$ ist mehrfach exponentiell; denk an: $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^k}}}}}$
  - Höhe des Potenzturms nicht durch eine Konstante beschränkt (linear in der Anzahl alternierender $\forall$ und $\exists$ Quantoren)

**Chordale Graphen**

- Baumweite = minimale Cliquenzahl von chordalem Supergraphen
- übrigens: die Cliquenzahl eines chordalen Graphen (und eine entsprechende Baumzerlegung) kann man leicht ausrechnen

# Literaturhinweise

**The monadic second-order logic of graphs. I. Recognizable sets of finite graphs**

- Bruno Courcelle [1990]
- Courcelles Theorem

https://doi.org/10.1016/0890-5401(90)90043-H

**Automatic generation of linear-time algorithms from predicate calculus descriptions of problems on recursively constructed graph families**

- Richard B. Borie, R. Gary Parker, Craig A. Tovey [1992]
- unabhängige Wiederentdeckung

https://doi.org/10.1007/BF01758777

**Courcelle's theorem—A game-theoretic approach**

- Joachim Kneis, Alexander Langer, Peter Rossmanith [2011]
- Courcelles Theorem in der „Praxis“

https://doi.org/10.1016/j.disopt.2011.06.001