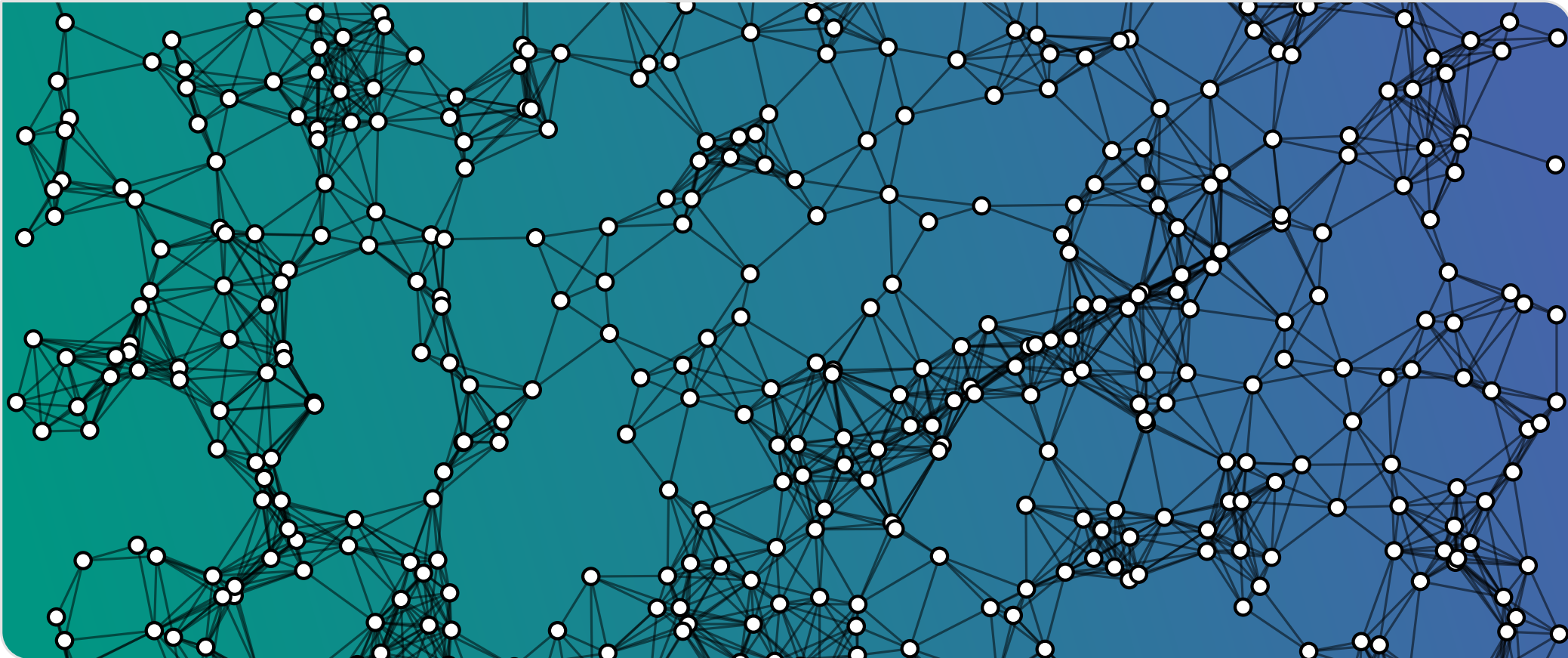


# Parametrisierte Algorithmen

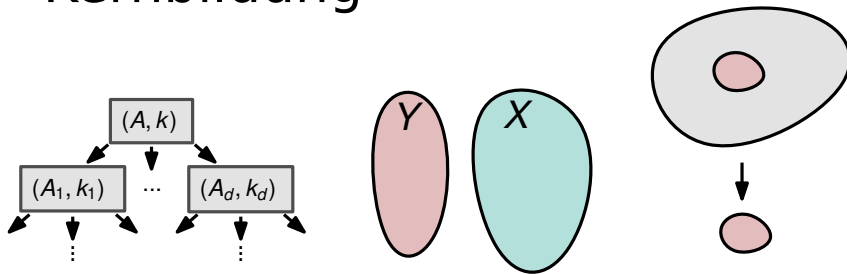
## Baumweite: Courcelles Theorem und chordale Graphen



# Inhalt

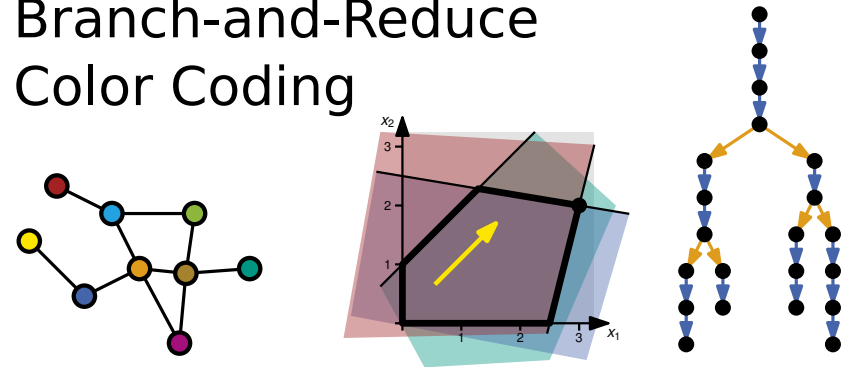
## Basic Toolbox

- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung



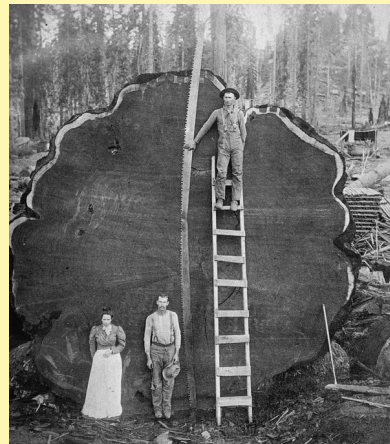
## Erweiterte Toolbox

- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding



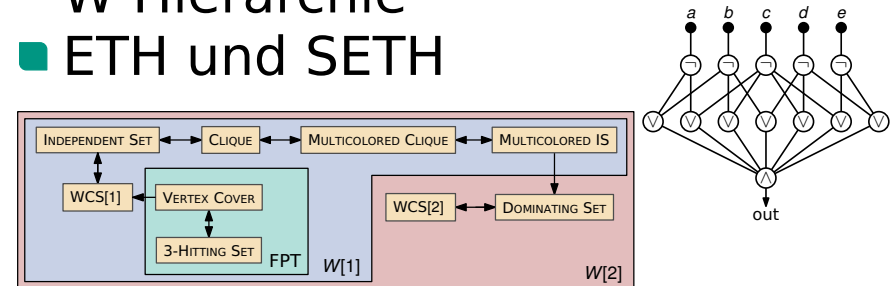
## Baumweite

- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem



## Untere Schranken

- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH



# Courcelles Theorem

## Vorherige Vorlesungen

- dynamische Programme über Baumzerlegungen
- liefert FPT-Algorithmus (bezgl. Baumweite) für sehr viele Probleme:

VERTEX COVER    MAXCUT    STEINER TREE    HAMILTON CYCLE    LONGEST CYCLE    CYCLE PACKING  
DOMINATING SET    ODD CYCLE TRANSVERSAL    LONGEST PATH    CONNECTED DOMINATING SET  
INDEPENDENT SET    FEEDBACK VERTEX SET    HAMILTON PATH    CONNECTED VERTEX COVER  
CHROMATIC NUMBER    CONNECTED FEEDBACK VERTEX SET

## Heute

- Metatheorem der Form: wenn ein Problem Eigenschaft  $XY$  hat, dann gibt es einen FPT-Algorithmus (bezgl. Baumweite)
- Theorem wird hier nicht bewiesen
- aber ich verrate euch, was  $XY$  ist

# MSO<sub>2</sub> auf Graphen

(MSO = Monadische Prädikatenlogik zweiter Ordnung)

## Beispiel: Was drückt die folgende Formel aus?

- $G = (V, E)$  ist ein Graph und  $X \subseteq V$
- $\text{inc}(v, e)$  für  $v \in V$  und  $e \in E$  ist wahr  $\Leftrightarrow v$  ist ein Endpunkt von  $e$

$$A(X) = \forall Y \subseteq V [(\exists u, v \in X u \in Y \wedge v \notin Y) \\ \Rightarrow (\exists e \in E \exists u, v \in X \text{inc}(u, e) \wedge \text{inc}(v, e) \wedge u \in Y \wedge v \notin Y)]$$

- Lösung:  $A(X) = \text{wahr} \Leftrightarrow X \subseteq V$  induziert zusammenh. Graphen

## Was erlaubt MSO<sub>2</sub>?

**Second Order:** zusätzlich zur Quantifizierung über Elemente (first order) auch über Relationen

first order:	second order:
$\forall v \in V$	$\forall Y \subseteq V$ <del><math>\forall Y \subseteq V \times V</math></del> <del><math>\forall Y \subseteq V \times V \times V</math></del>

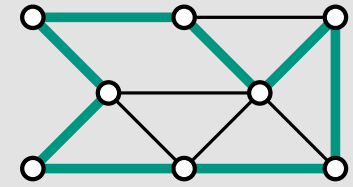
**Monadic:** nur einstellig Relationen

**2:** Quantifizierung über  $V$  und über  $E$  erlaubt  $\forall v \in V \forall e \in E \forall V' \subseteq V \forall E' \subseteq E$   
 (MSO<sub>1</sub> erlaubt nur Quantifizierung über  $V$ )

# Probleme in MSO<sub>2</sub>

## Problem: HAMILTONKREIS

Gibt es in einem gegebenen Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält?



## Drücke die Existenz eines Hamiltonkreises in MSO<sub>2</sub> aus

- beachte:  $C \subseteq E$  ist Lösung  $\Leftrightarrow G[C]$  ist zusammenh. und 2-regulär
- grobe Formel:

$$\text{hamiltonisch} = \exists_{C \subseteq E} \text{conn}(C) \wedge \forall_{v \in V} \text{deg}2(v, C)$$

- Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \text{conn}(C) &= \forall_{Y \subseteq V} [(\exists_{u,v \in V} u \in Y \wedge v \notin Y) \\ &\Rightarrow (\exists_{e \in C} \exists_{u \in Y} \exists_{v \notin Y} \text{inc}(u, e) \wedge \text{inc}(v, e))] \end{aligned}$$

- Knotengrad 2:

$$\begin{aligned} \text{deg}2(v, C) &= \exists_{e_1, e_2 \in C} [e_1 \neq e_2 \wedge \text{inc}(v, e_1) \wedge \text{inc}(v, e_2) \wedge \\ &(\forall_{e_3 \in C} \text{inc}(v, e_3) \Rightarrow (e_3 = e_1 \vee e_3 = e_2))] \end{aligned}$$

# Courcelles Theorem

## Theorem (ohne Beweis)

Sei  $\varphi$  eine  $\text{MSO}_2$  Formel und sei  $G$  ein Graph zusammen mit einer Auswertung für alle freien Variablen von  $\varphi$  und mit einer Baumzerlegung der Weite  $t$ . Dann gibt es einen Algorithmus, der in  $f(|\varphi|, t) \cdot n$  Zeit testet ob  $\varphi$  von  $G$  erfüllt wird (für eine berechenbare Funktion  $f$ ).

## Beispiel

- die Eigenschaft einen Hamiltonkreis zu haben kann mit einer konstant großen  $\text{MSO}_2$  Formel ausgedrückt werden
- $\Rightarrow$  HAMILTONKREIS hat einen FPT-Algorithmus bezgl. Baumweite

## Was machen die „freien Variablen“?

- nützlich, falls Eingabe z.B. aus  $G = (V, E)$  und  $X \subseteq V$  besteht
- Beispiel: bei STEINER BAUM ist zusätzlich zum Graphen eine Menge von Terminalknoten gegeben

# Courcelles Theorem

## Theorem (ohne Beweis)

Sei  $\varphi$  eine  $\text{MSO}_2$  Formel und sei  $G$  ein Graph zusammen mit einer Auswertung für alle freien Variablen von  $\varphi$  und mit einer Baumzerlegung der Weite  $t$ . Dann gibt es einen Algorithmus, der in  $f(|\varphi|, t) \cdot n$  Zeit testet ob  $\varphi$  von  $G$  erfüllt wird (für eine berechenbare Funktion  $f$ ).

## Beispiel 2: $k$ -VERTEX COVER

- grobe Formel:

$$k\text{-vc} = \exists X \subseteq V (\text{vc}(X) \wedge \text{size-}k(X))$$

- Abdeckung aller Kanten:

$$\text{vc}(X) = \forall e \in E \exists v \in X \text{inc}(v, e)$$

- maximal  $k$  Knoten:

$$\text{size-}k(X) = \forall v_0, \dots, v_k \in V v_0 \notin X \vee \dots \vee v_k \notin X \vee v_0 = v_1 \vee v_0 = v_2 \vee \dots \vee v_{k-1} = v_k$$

(für  $k + 1$  Knoten ist einer nicht in  $X$  oder zwei der Knoten sind gleich)

**Achtung:**  $|\varphi| = |k\text{-vc}|$  hängt von  $k$  ab

⇒ Courcelles Theorem liefert nur einen FPT-Algorithmus bezgl. beider Parameter  $k$  und  $t$

# Courcelles Theorem - Optimierung

## Theorem (ohne Beweis)

Sei  $\varphi$  eine  $\text{MSO}_2$  Formel mit  $p$  freien monadischen Variablen  $X_1, \dots, X_p$  und sei  $\alpha(x_1, \dots, x_p)$  eine affine Funktion. Sei  $G$  ein Graph zusammen mit einer Baumzerlegung der Weite  $t$  und mit einer Auswertung für alle freien Variablen von  $\varphi$  außer  $X_1, \dots, X_p$ . Dann gibt es einen Algorithmus, der in  $f(|\varphi|, t) \cdot n$  Zeit Auswertungen für  $X_1, \dots, X_p$  findet, sodass  $\varphi(X_1, \dots, X_p) = \text{true}$  und  $\alpha(|X_1|, \dots, |X_p|)$  maximal oder minimal.

## Beispiel: VERTEX COVER

- eine freie Variable  $X \subseteq V$
  - Ziel 1:  $X$  ist Vertex Cover:  $\varphi(X) = \text{vc}(X) = \forall_{e \in E} \exists_{v \in X} \text{inc}(v, e)$
  - Ziel 2:  $X$  ist minimal unter allen Vertex Covern:  $\alpha(x) = x$
- ⇒  $|\varphi|$  ist konstant
- ⇒ FPT-Algorithmus für VERTEX COVER bezgl. Baumweite

Erinnerung affine Funktion:  $\alpha(x_1, \dots, x_p) = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i x_i$





# Evaluation

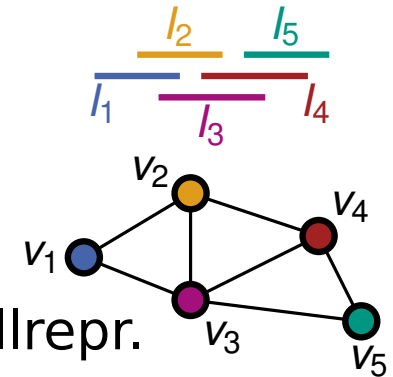


<https://onlineumfrage.kit.edu/evasys/online.php?p=LCZKE>

# Intervallgraphen

## Definition

- Menge von  $n$  Intervallen  $\{I_1, \dots, I_n\}$  in  $\mathbb{R}$
- Graph  $G = (V, E)$ ,  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $E = \{\{v_i, v_j\} \mid I_i \cap I_j \neq \emptyset\}$
- $I_1, \dots, I_n$  heißt **Intervallrepräsentation** von  $G$
- ein Graph ist ein **Intervallgraph**  $\Leftrightarrow$  er hat eine Intervallrepr.



## Was ist die Pfadweite eines Intervallgraphen?

- sei  $\omega(G)$  die Cliquengröße und  $\text{pw}(G)$  die Pfadweite von  $G$
- es gilt:  $\text{pw}(G) \leq \omega(G) - 1$  (Intervallrepräsentation liefert Pfadzerlegung)
- und:  $\text{pw}(G) \geq \omega(G) - 1$  (Knoten einer Clique teilen sich eine Bag)
- $\Rightarrow \text{pw}(G) = \omega(G) - 1$

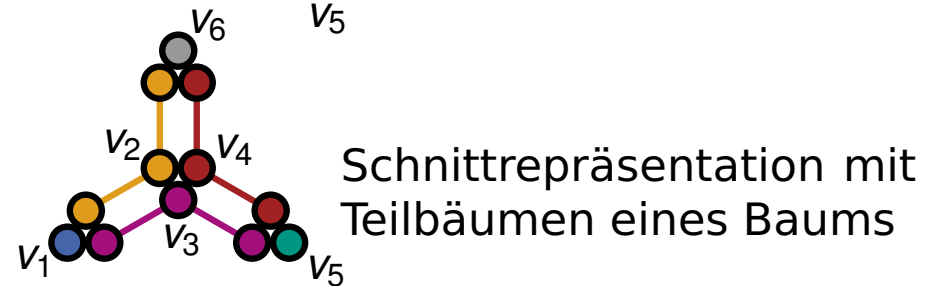
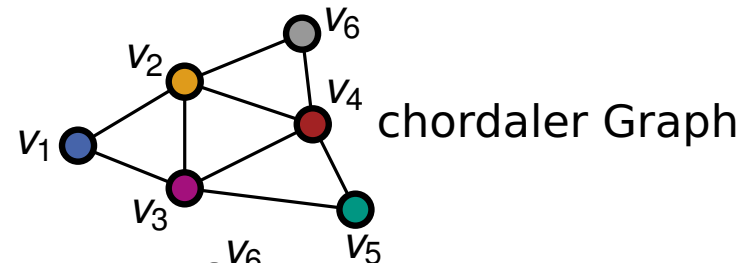
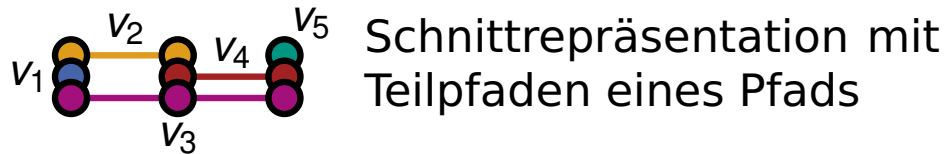
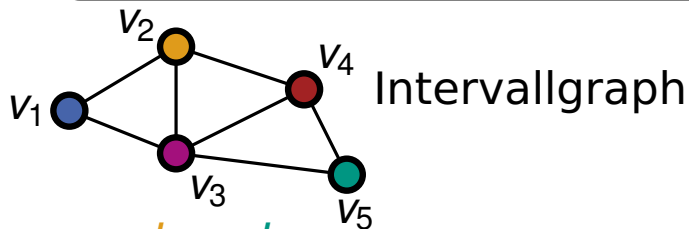
## Intervallweite

- $\text{interval-width}(G) = \min\{\omega(G') \mid G \subseteq G' \text{ und } G' \text{ ist Intervallgraph}\}$
- $\Rightarrow \text{pw}(G) = \text{interval-width}(G) - 1$

# Chordale Graphen

## Definition

Ein Graph  $G$  ist **chordal**, wenn er eine Schnittrepräsentation mit Teilbäumen eines Baumes hat. (statt Teilpfade eines Pfades, wie bei Intervallgraphen)



## Äquivalente Definition

- $G$  chordal  $\Leftrightarrow G$  hat keinen induzierten Kreis der Länge 4 oder mehr

## Chordalweite

- $\text{chordal-width}(G) = \min\{\omega(G') \mid G \subseteq G' \text{ und } G' \text{ ist chordal}\}$
- $\Rightarrow \text{tw}(G) = \text{chordal-width}(G) - 1$

# Zusammenfassung

## Courcelles Theorem

- Problem in  $\text{MSO}_2$  ausdrückbar  $\Rightarrow$  FPT bezüglich Baumweite
- mächtiges Tool, da sich viele Probleme in  $\text{MSO}_2$  ausdrücken lassen
- **Achtung:** Courcelle liefert nur sehr schlechte Laufzeiten:
  - $f(k)$  ist mehrfach exponentiell; denk an:  $2^{2^{\dots^{2^k}}}$
  - Höhe des Potenzturms nicht durch eine Konstante beschränkt  
(linear in der Anzahl alternierender  $\forall$  und  $\exists$  Quantoren)

## Chordale Graphen

- Baumweite = minimale Cliquenzahl von chordalem Supergraphen
- übrigens: die Cliquenzahl eines chordalen Graphen (und eine entsprechende Baumzerlegung) kann man leicht ausrechnen

# Literaturhinweise

## **The monadic second-order logic of graphs. I. Recognizable sets of finite graphs**

- Bruno Courcelle [1990]
- Courcelles Theorem

[https://doi.org/10.1016/0890-5401\(90\)90043-H](https://doi.org/10.1016/0890-5401(90)90043-H)

## **Automatic generation of linear-time algorithms from predicate calculus descriptions of problems on recursively constructed graph families**

- Richard B. Borie, R. Gary Parker, Craig A. Tovey [1992]
- unabhängige Wiederentdeckung

<https://doi.org/10.1007/BF01758777>

## **Courcelle's theorem—A game-theoretic approach**

- Joachim Kneis, Alexander Langer, Peter Rossmanith [2011]
- Courcelles Theorem in der „Praxis“

<https://doi.org/10.1016/j.disopt.2011.06.001>