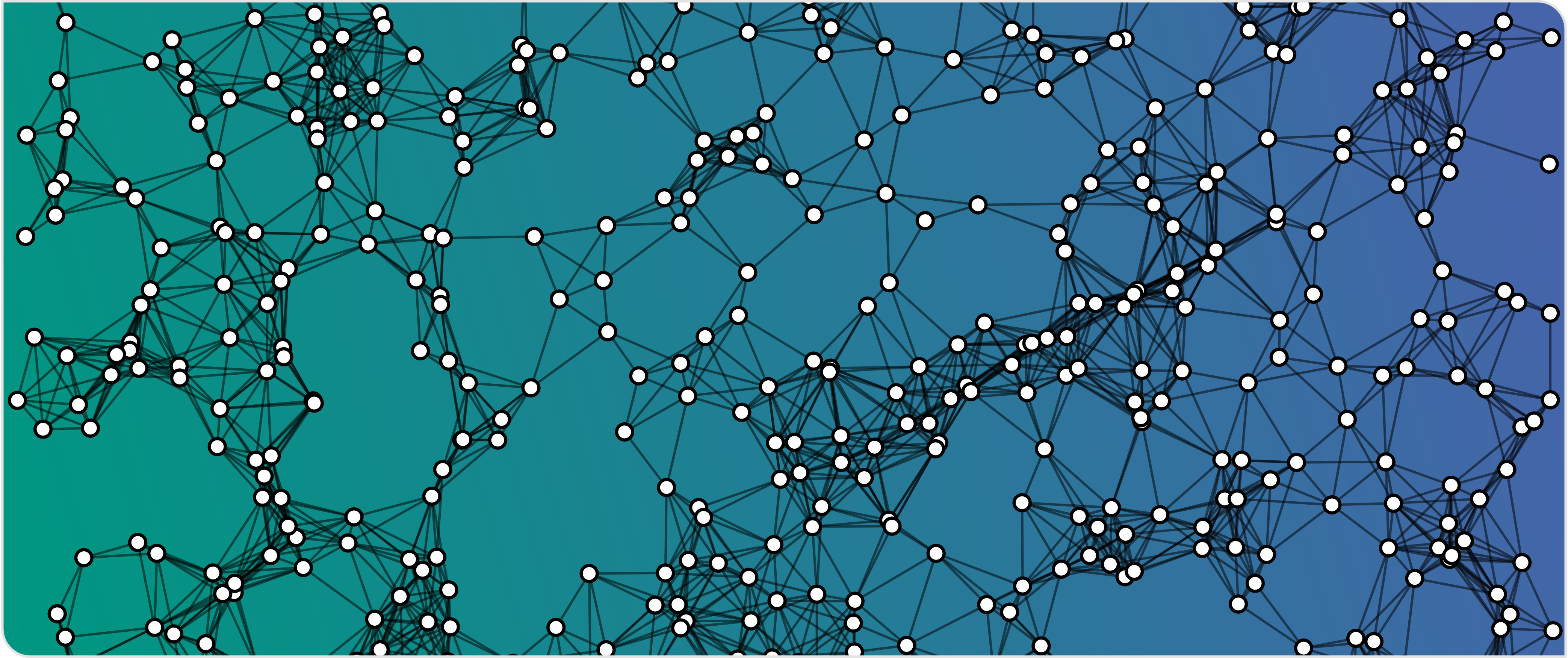
Karlsruher Institut für Technologie

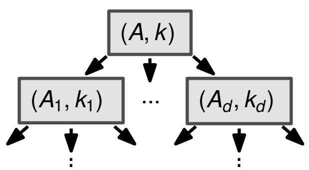
Parametrisierte Algorithmen

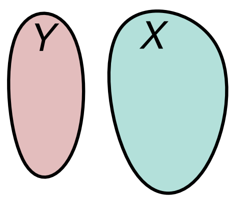
Baumweite & dynamische Programme auf Baumzerlegungen

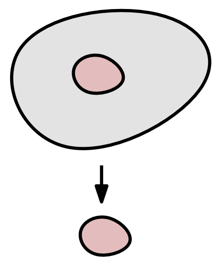


Inhalt

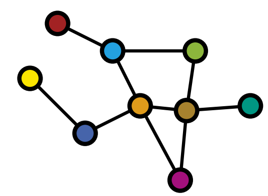
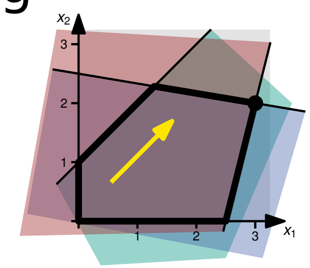
Basic Toolbox
- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung

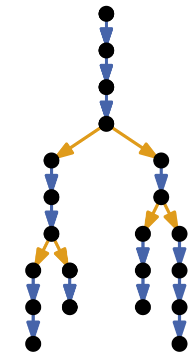






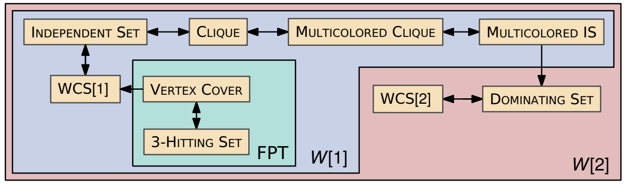
Erweiterte Toolbox
- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding

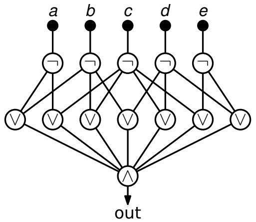





Baumweite
- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem

Untere Schranken
- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH

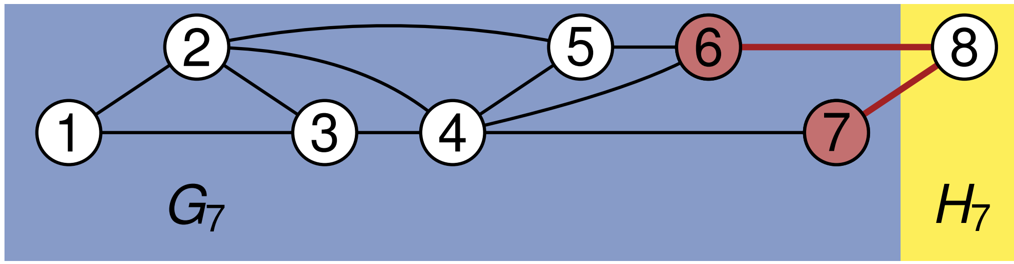




Sortierte Graphen

Graph $G = (V, E)$ mit Knotenordnung $V = \{v_1, ..., v_n\}$

$k_7 = 2$
$\Rightarrow k = 2$

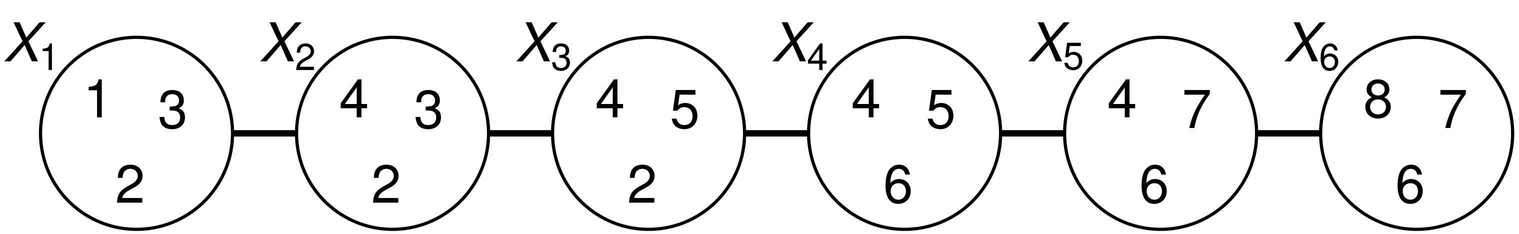


- $V_i = \{v_1, \dots, v_i\}$, $G_i = G[V_i]$ und $H_i = G[V \setminus V_i]$
- k_i =#Knoten in G_i mit Kanten zu H_i und $k = \max\{k_i\}$

Alternative Sichtweise: Pfadzerlegung

betrachte Pfad $x_1, \dots, x_r$ mit *Bags* $X_1, \dots, X_r$ ($X_i \subseteq V$), sodass

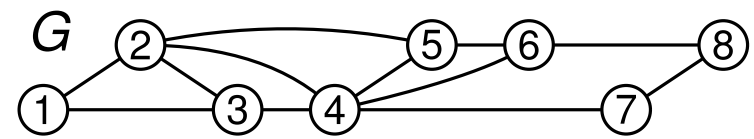
1. $X_1 \cup \cdots \cup X_r = V$
2. $\{u, v\} \in E \Rightarrow u, v \in X_i$ für mindestens ein Bag X_i
3. die Bags jedes Knotens $v \in V$ bilden einen Teilpfad

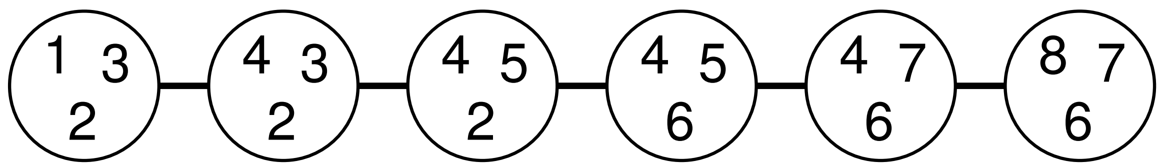


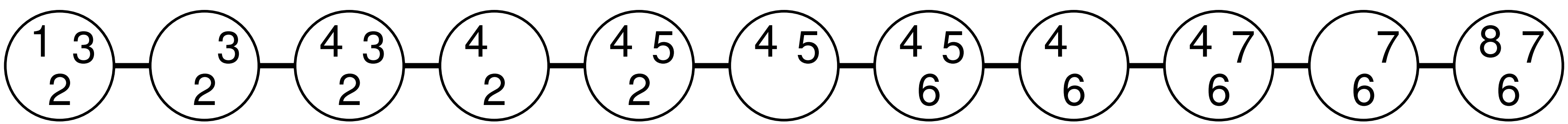
Pfadweite und schöne Pfadzerlegungen

Pfadweite

- Weite einer Zerlegung: $\max\{|X_i|\} - 1$
- Pfadweite eines Graphen: minimale Weite einer Pfadzerlegung







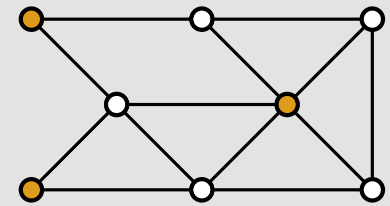
Schöne Pfadzerlegung

- nur zwei Typen von Knoten: introduce-Knoten und forget-Knoten
- x_i ist introduce-Knoten wenn $X_i = X_{i-1} \cup \{v\}$ für ein $v \in V$
- x_i ist forget-Knoten wenn $X_i = X_{i-1} \setminus \{v\}$ für ein $v \in V$

Lemma
Wenn G eine Pfadzerlegung mit Weite p hat, dann hat G auch eine schöne Pfadzerlegung mit Weite p.

Dynamische Programme

Problem: Independent Set
Gegeben seien ein Graph, ein Parameter p und eine Pfadzerlegung der Weite p. Gibt es ein independent Set der Größe k? (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



Dynamisches Programm über eine schöne Pfadzerlegung

- sei $V_i = X_1 \cup \cdots \cup X_i$ und $G_i = G[V_i]$
- Schritt i: für alle $X_i' \subseteq X_i$ berechne max IS U_i in G_i mit $U_i \cap X_i = X_i'$

Beispiel

introduce-Knoten

Teilmengen von X_8	$\emptyset$		$\{4\}$		$\{6\}$		$\{4,6\}$	
Größe max. IS in G_8	2		2		2		$-\infty$	
Teilmengen von X_9	$\emptyset$	$\{7\}$	$\{4\}$	$\{4,7\}$	$\{6\}$	$\{6,7\}$	$\{4,6\}$	$\{4,6,7\}$
Größe max. IS in G_9	2	3	2	$-\infty$	2	3	$-\infty$	$-\infty$

Theorem
Independent Set ist FPT bezüglich der Pfadweite p (das DP hat Laufzeit $O(2^p n^c)$). (angenommen, wir kennen eine entsprechende Pfadzerlegung)

Baumweite

Pfadzerlegung

betrachte Pfad $x_1, \dots, x_r$ mit *Bags* $X_1, \dots, X_r$ ($X_i \subseteq V$), sodass

1. $X_1 \cup \dots \cup X_r = V$
2. $\{u, v\} \in E \Rightarrow u, v \in X_i$ für mindestens ein Bag X_i
3. die Bags jedes Knotens $v \in V$ bilden einen Teilpfad

Das gleiche Spiel nochmal. . . jetzt auf Bäumen!

betrachte Baum auf den Knoten $x_1, \dots, x_r$ mit Bags $X_1, \dots, X_r$, sodass

1. $X_1 \cup \dots \cup X_r = V$
2. $\{u, v\} \in E \Rightarrow u, v \in X_i$ für mindestens ein Bag X_i
3. die Bags jedes Knotens $v \in V$ bilden einen Teilbaum

Baumweite

- Weite einer Zerlegung: $\max\{|X_i|\} - 1$
- Baumweite eines Graphen: minimale Weite einer Baumzerlegung

Das gleiche Spiel nochmal. . . jetzt auf Bäumen!

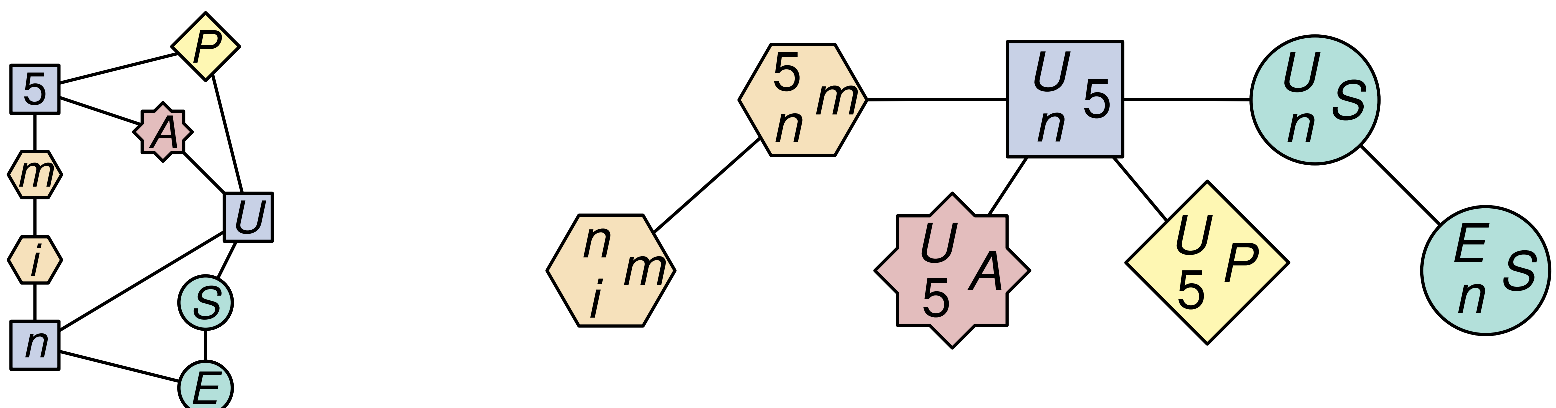
betrachte Baum auf den Knoten $x_1, \dots, x_r$ mit Bags $X_1, \dots, X_r$, sodass

1. $X_1 \cup \dots \cup X_r = V$
2. $\{u, v\} \in E \Rightarrow u, v \in X_i$ für mindestens ein Bag X_i
3. die Bags jedes Knotens $v \in V$ bilden einen Teilbaum

Baumweite

- Weite einer Zerlegung: $\max\{|X_i|\} - 1$
- Baumweite eines Graphen: minimale Weite einer Baumzerlegung

Welche Baumweite hat der folgende Graph?



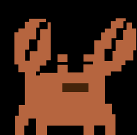
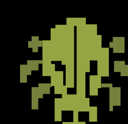
$\Rightarrow$ Baumweite 2

BABA IS YOU IS UNDECIDABLE

- WEIHNACHTSVORLESUNG TGI -

DO. 19.12.24 11:30 UHR

GERTHSEN-HÖRSAAL

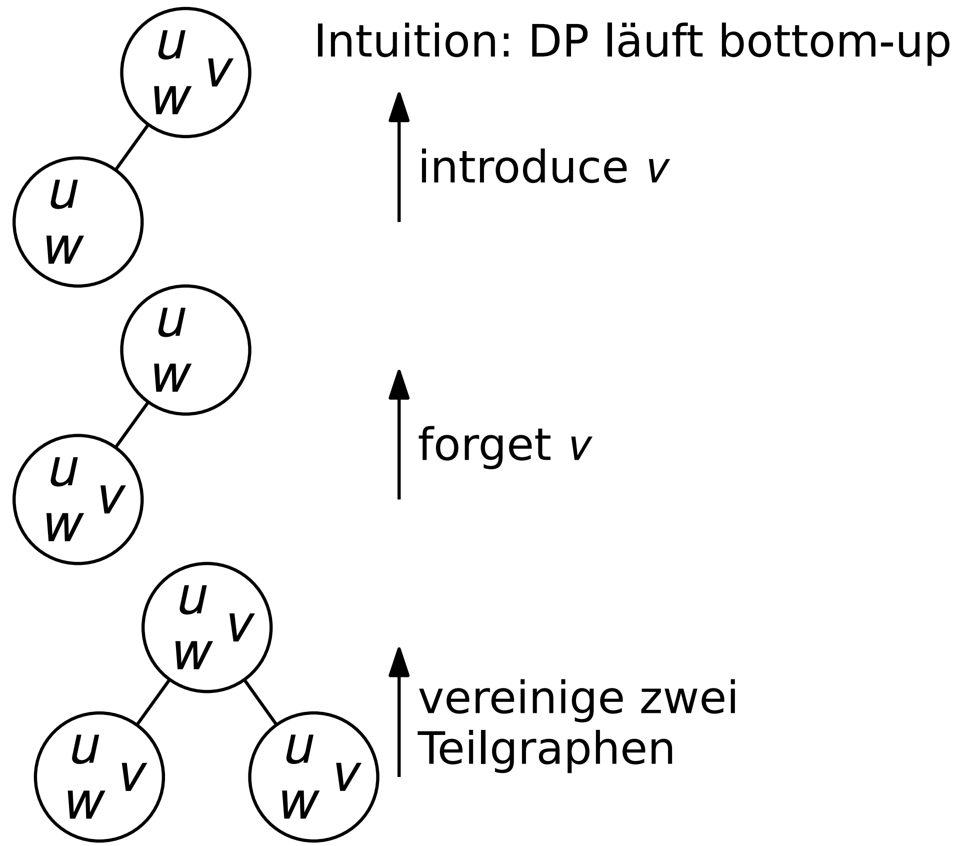
FEATURING: , , , , , 

...UND DAS POSTSCHE KORRESPONDENZPROBLEM

Schöne Baumzerlegungen

Drei Typen von Knoten

- x_i ist **introduce-Knoten** wenn
  - x_i hat genau ein Kind x_j und
  - $X_i = X_j \cup \{v\}$ für ein $v \in V$
- x_i ist **forget-Knoten** wenn
  - x_i hat genau ein Kind x_j und
  - $X_i = X_j \setminus \{v\}$ für ein $v \in V$
- x_i ist **join-Knoten** wenn
  - x_i hat genau zwei Kinder x_j, x_k
  - und $X_i = X_j = X_k$

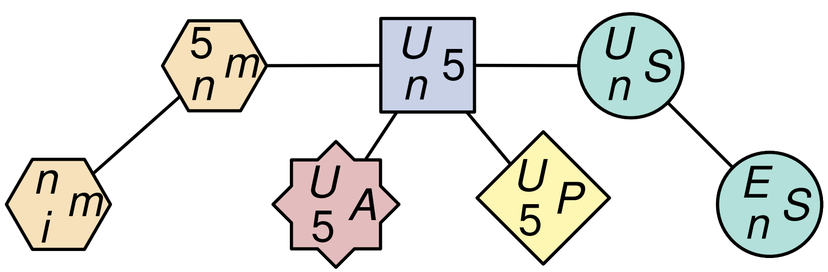


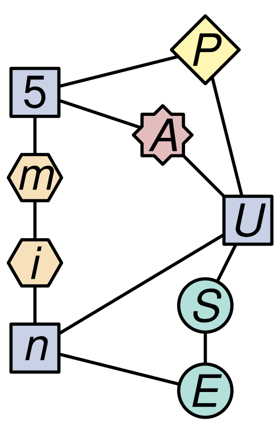
Theorem
Wenn G eine Baumzerlegung mit Weite t hat, dann hat G auch eine schöne Baumzerlegung mit Weite t.

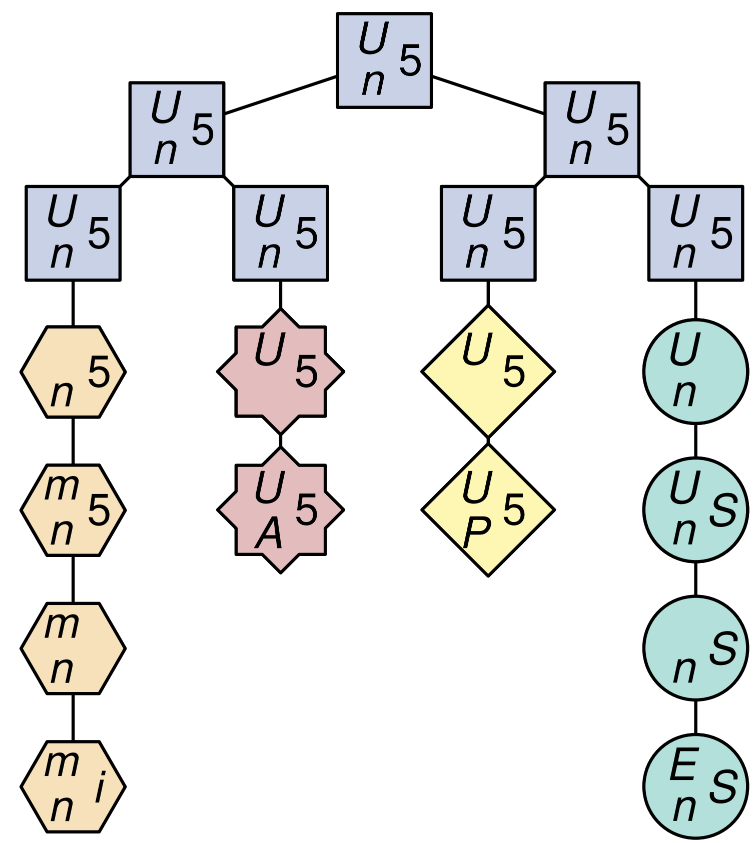
Schöne Baumzerlegungen

Theorem
Wenn G eine Baumzerlegung mit Weite t hat, dann hat G auch eine schöne Baumzerlegung mit Weite t.

Beispiel

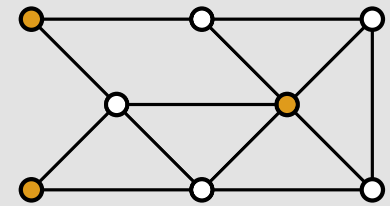






DP über eine schöne Baumzerlegung

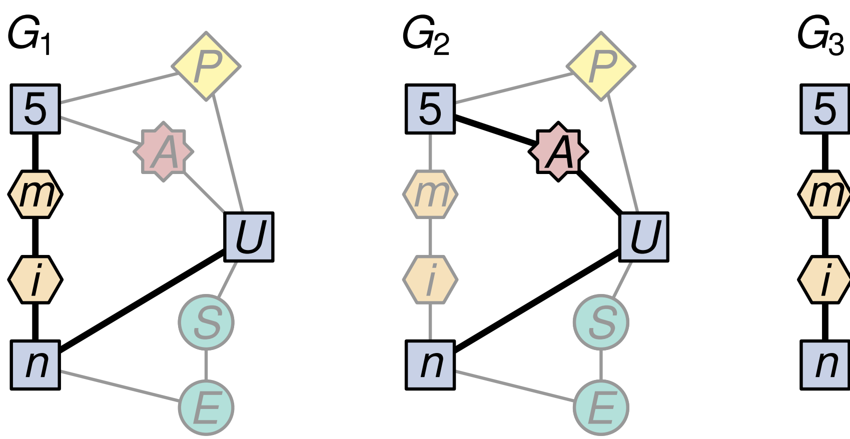
Problem: INDEPENDENT SET
Gegeben seien ein Graph, ein Parameter t und eine Baumzerl. der Weite t. Gibt es ein independent Set der Größe k? (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)

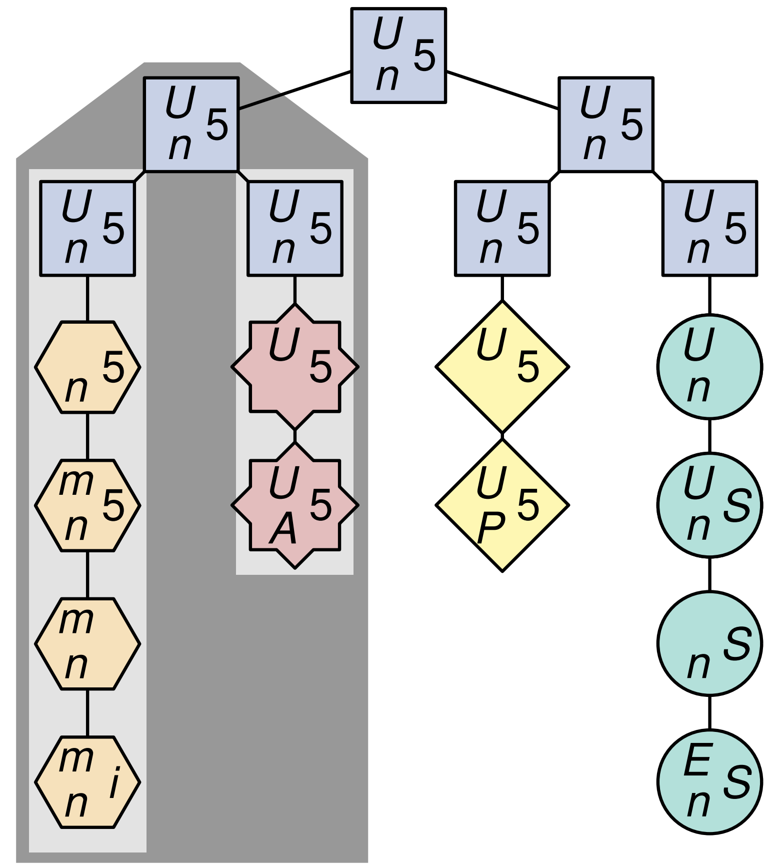


Dynamisches Programm über eine schöne Baumzerlegung

- join-Knoten:

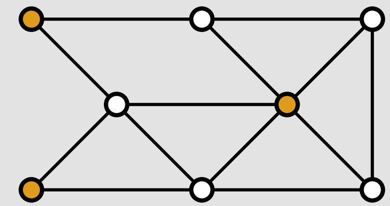
	$\emptyset$	$\{U\}$	$\{5\}$	$\{n\}$	$\{U,5\}$	$\{U,n\}$	$\{n,5\}$	$\{U,n,5\}$
G_1	1	2	2	2	3	$-\infty$	2	$-\infty$
G_2	1	1	1	2	2	$-\infty$	2	$-\infty$
G_3	2	2	2	3	3	$-\infty$	2	$-\infty$





DP über eine schöne Baumzerlegung

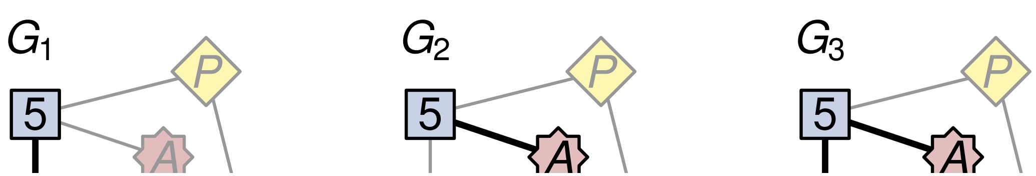
Problem: Independent Set
Gegeben seien ein Graph, ein Parameter t und eine Baumzerl. der Weite t. Gibt es ein independent Set der Größe k? (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)

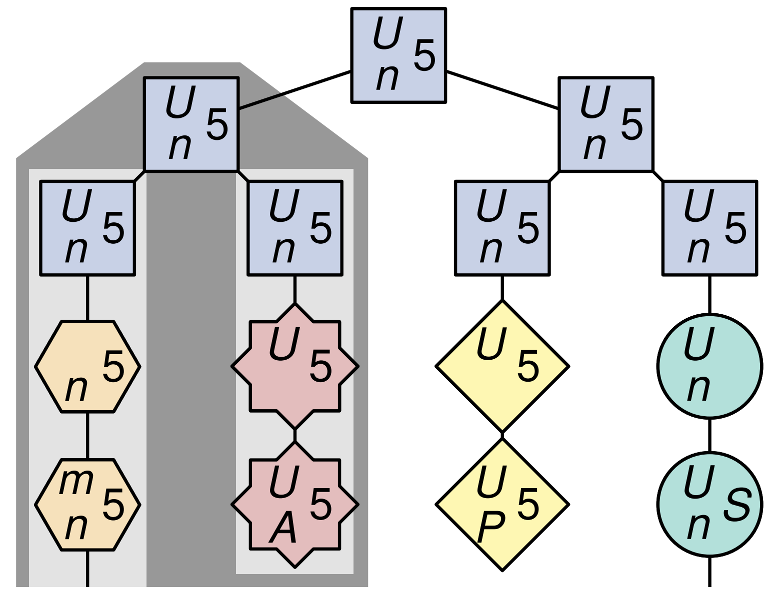


Dynamisches Programm über eine schöne Baumzerlegung

- join-Knoten:

	$\emptyset$	$\{U\}$	$\{5\}$	$\{n\}$	$\{U, 5\}$	$\{U, n\}$	$\{n, 5\}$	$\{U, n, 5\}$
G_1	1	2	2	2	3	$-\infty$	2	$-\infty$
G_2	1	1	1	2	2	$-\infty$	2	$-\infty$
G_3	2	2	2	3	3	$-\infty$	2	$-\infty$





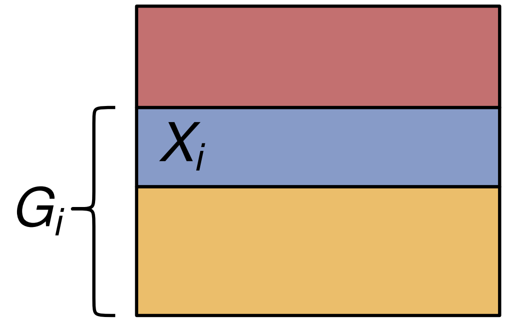
Theorem
Independent Set ist FPT bezüglich der Baumweite t (das DP hat Laufzeit $O(2^t n^c)$). (angenommen, wir kennen eine entsprechende Baumzerlegung)

DPs auf Baumzerlegungen

Karlsruher Institut für Technologie

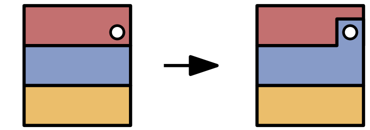
Notation und grundlegende Eigenschaften

- für Knoten x_i in der Baumzerlegung ist $V_i = X_i \cup \{v \in V \mid v \in X_j$ für Nachfolger x_j von $x_i\}$
- $G_i = G[V_i]$; X_i ist das **Interface** von G_i
- X_i separiert G_i vom Restgraph

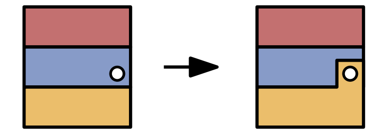


Knotentypen aus Sicht der G_i

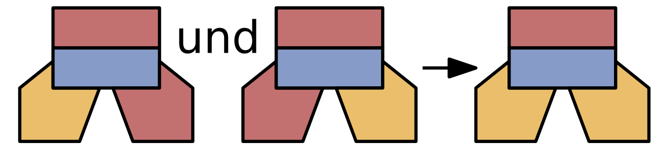
- **introduce:** füge Knoten zu G_i und zum Interface hinzu



- **forget:** entferne Knoten aus dem Interface von G_i



- **join:** vereinige zwei Teilgraphen mit dem selben Interface

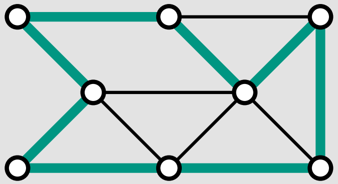


Eigenschaften der für (G_i, X_i) berechneten Teillösungen

- für $G_i = G$ ist die tatsächliche Lösung enthalten
- in jedem Schritt lassen sich alle neuen Teillösungen aus den alten berechnen

DP für Hamiltonkreis

Problem: HAMILTONKREIS
Gibt es in einem gegebenen Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält?

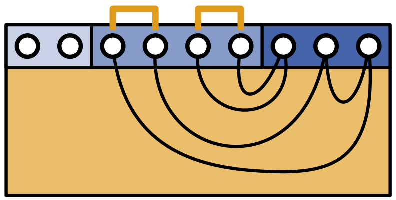


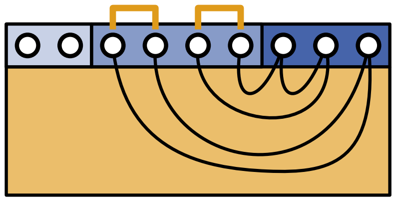
Ziel: FPT-Laufzeit bezüglich Baumweite

(entsprechende Baumzerlegung wird als gegeben angenommen)

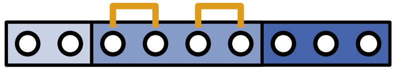
Was sind sinnvolle Teillösungen?

- Beobachtung: Hamiltonkreis in G liefert Menge von Pfaden in G_i
- $\Rightarrow$ Teillösung = Menge von Pfaden in G_i
- Problem: es gibt zu viele solche Pfadmengen
- Beobachtung: unterschiedliche Pfademengen sehen von außen gleich aus, wenn
  - die gleichen Knoten sind in G_i inzident zu 0, 1 bzw. 2 Kreiskanten
  - die gleichen Paare von 1-er Knoten gehören zum gleichen Pfad





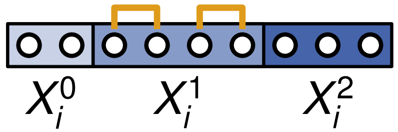
- Teillösung:

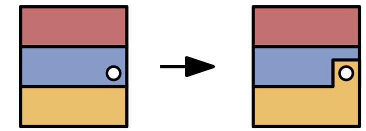


X_i^0 X_i^1 X_i^2

DP für Hamiltonkreis

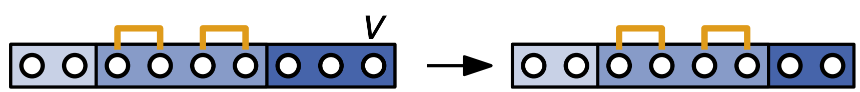
Teillösung:





Berechnung neuer Teillösungen: forget-Knoten

- sei v der zu vergessende Knoten
- Fall 1: $v \in X_i^2$:

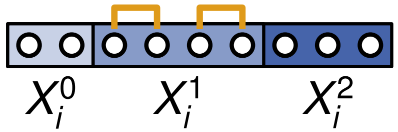


- Fall 2: $v \notin X_i^2 \Rightarrow v$ hat keine Chance mehr, in den Hamiltonkreis zu kommen

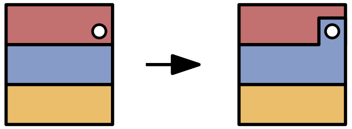
  $\Rightarrow$ Teillösung ist eine Sackgasse und kann ignoriert werden

DP für Hamiltonkreis

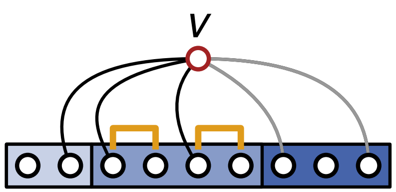
Teillösung:

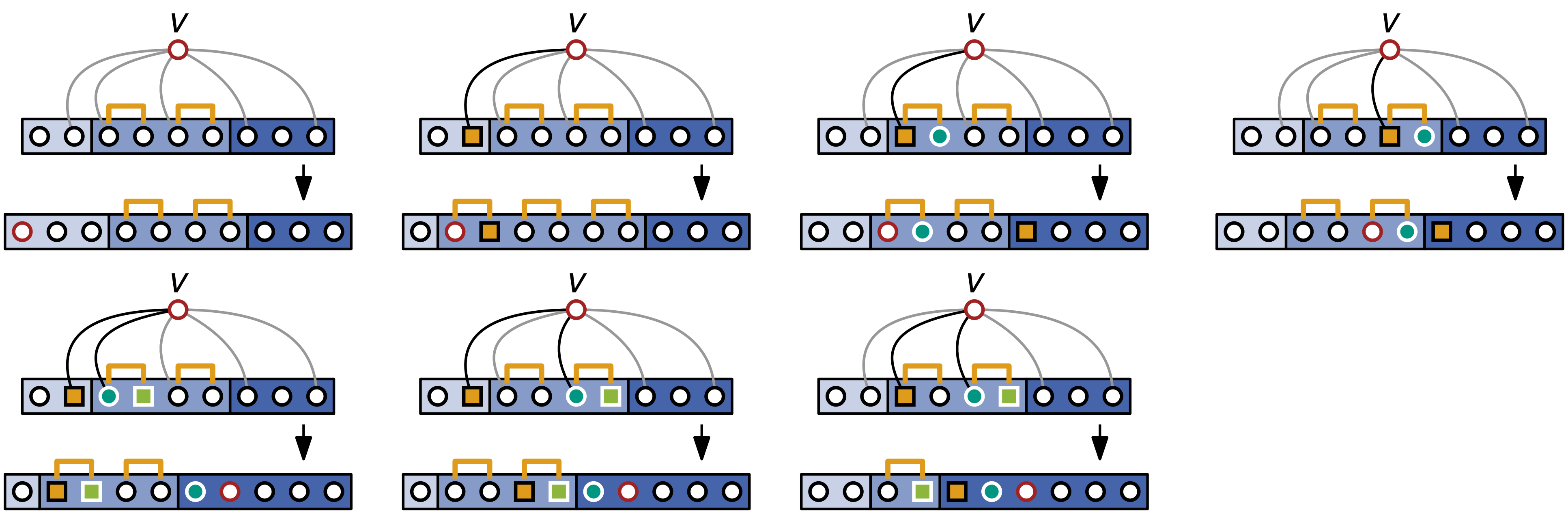


Berechnung neuer Teillösungen: introduce-Knoten



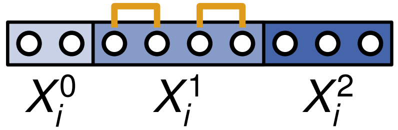
- sei v der neue Knoten; betrachte Kanten von v zu Knoten in X_i
- Kanten zu X_i^2 sind nicht relevant
- jede Teilmenge mit maximal zwei der übrigen Kanten liefert neue Teillösung

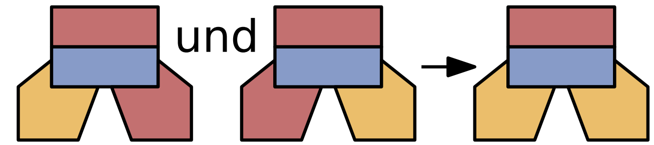




DP für Hamiltonkreis

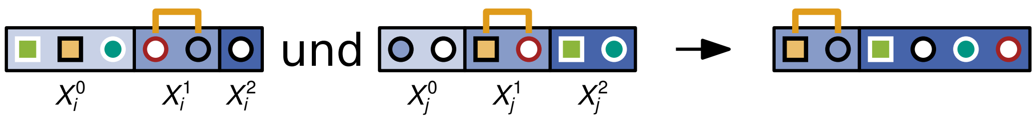
Teillösung:



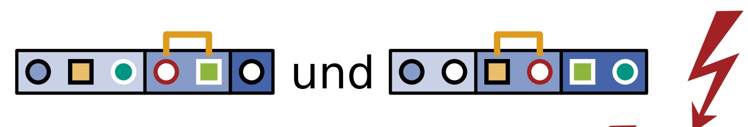


Berechnung neuer Teillösungen: join-Knoten

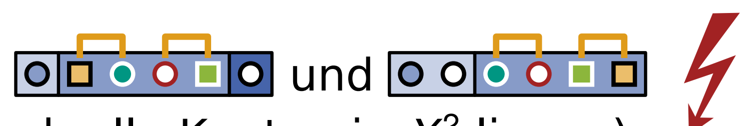
- Vereinigung zweier Teillösungen $\equiv$ Vereinigung der Kantenmengen



- keine Vereinigung möglich, wenn:
  - Summe der Grade aus G_i und $G_j > 2$



  - ein Kreis wird geschlossen

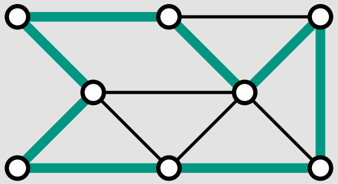


(Sonderfall Wurzel: schließe Kreis, sodass danach alle Knoten in X_i^2 liegen)

- sonst:
  - addiere die Knotengrade für neue Eingruppierung
  - berechne, welche 1-er Knoten zum selben Pfad gehören

DP für Hamiltonkreis

Problem: HAMILTONKREIS
Gibt es in einem gegebenen Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält?



Ziel: FPT-Laufzeit bezüglich Baumweite

(entsprechende Baumzerlegung wird als gegeben angenommen)

Laufzeit (grob)

- pro Knoten in der Baumzerlegung: #Teillösungen hängt nur von der Baggröße (= Interfacegröße) ab
- Berechnung neuer Teillösungen: ebenfalls nur von Baggröße abhängig

Theorem
HAMILTONKREIS ist FPT bezüglich der Baumweite t.
(angenommen, wir kennen eine entsprechende Baumzerlegung)

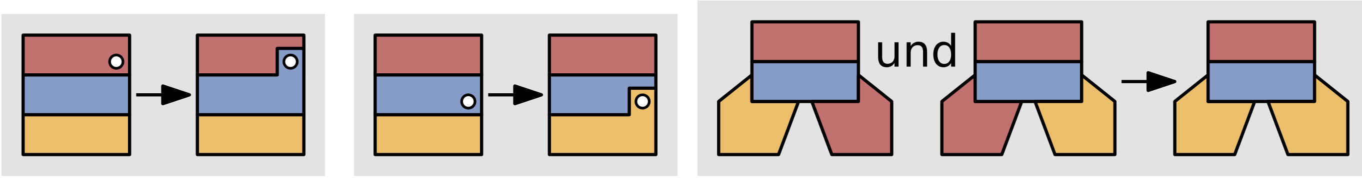
Zusammenfassung

Baumweite

- strukureller Graphparameter
- Maß für die Ähnlichkeit zu Bäumen (bezüglich Separatoren)

DP auf Baumzerlegungen

- schöne Baumzerlegungen sind schön



- Schwierigkeit: gute Definition für „Teillösung“
  - Anzahl Teillösungen nur abhängig von der Interfacegröße
  - Berechnung neuer Teillösungen aus den alten Teillösungen möglich (für alle drei Knotentypen)

Wie groß ist Baumweite in echten Graphen?

- heuristische Berechnung auf zwei „zufällig“ ausgewählte Graphen:
  - Links zwischen politischen Blogs: $n = 642$, $m = 2280$, $t \leq 42$
  - Co-Autoren-Netzwerk: $n = 226413$, $m = 716460$, $t \leq 11775$