

Parametrisierte Algorithmen

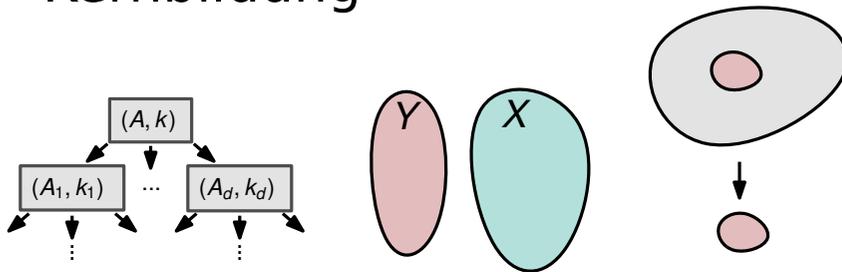
Color Coding



Inhalt

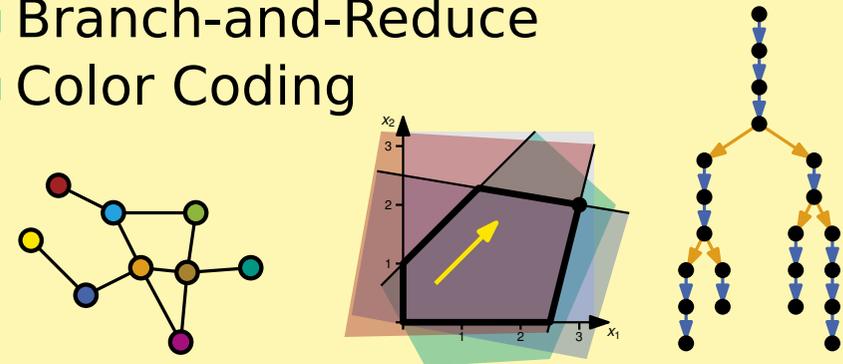
Basic Toolbox

- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung



Erweiterte Toolbox

- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding



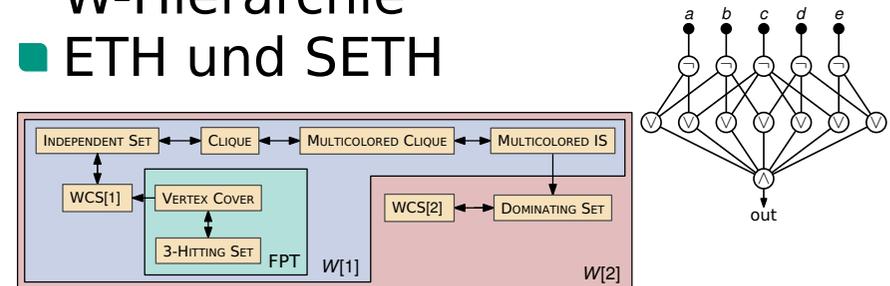
Baumweite

- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem



Untere Schranken

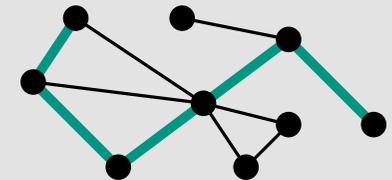
- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH



Umwege

Problem: LONGEST PATH

Gegeben sind ein Graph G und ein Parameter k . Gibt es einen Pfad der Länge mindestens k in G ?



(mit Länge meine ich hier Anzahl Knoten)

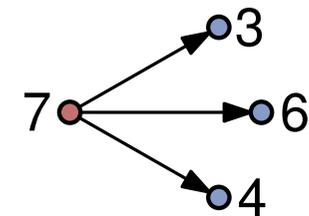
Komplexität

- NP-schwer: Reduktion von HAMILTONIAN PATH
- heute: FPT

Für gerichtete azyklische Graphen (DAGs)

Geht das in poly Zeit?

- dynamisches Programm
 - für jeden Knoten v : längster Pfad der bei v startet
 - iteriere entsprechend topologischer Sortierung
- alternativ: Matrixmultiplikation
 - sei A die Adjazenzmatrix und betrachte A^k
 - Eintrag (u, v) entspricht Anzahl Pfaden den Länge k von u nach v

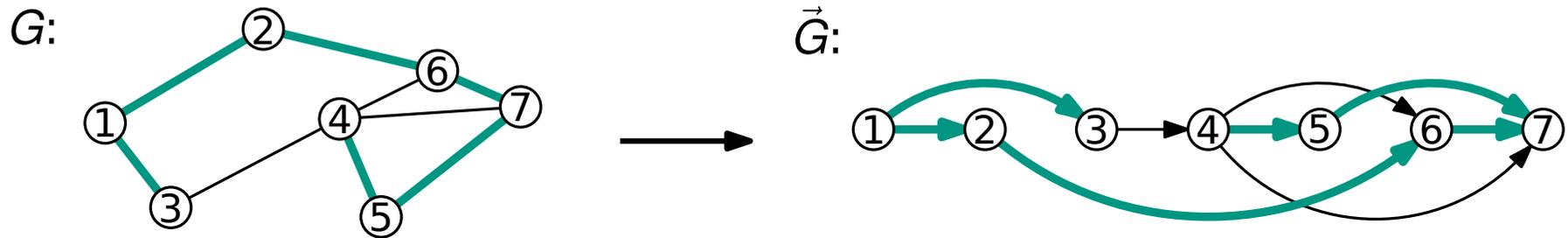


Warum funktioniert das nicht auch für ungerichtete Graphen?

Kreise verbieten

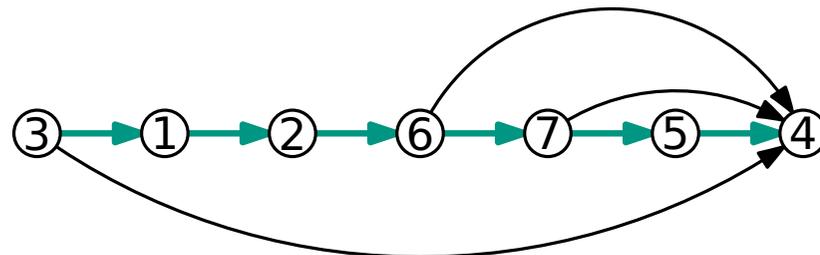
Idee für ungerichtete Graphen

- verwandle ungerichteten Graph G in einen DAG \vec{G}
- suche dann einen längsten Pfad in \vec{G}



Problem: nicht alle Pfade in G sind korrekt gerichtete Pfade in \vec{G}

Aber: es gibt immer eine gute Übersetzung in einen DAG



Wie finden wir eine gute Übersetzung in einen DAG?

Randomisierung

Konstruktion des DAGs \vec{G}

- wähle zufällige Reihenfolge der Knoten in G
- richte alle Kanten in G von vorne nach hinten

Theorem

Sei P ein Pfad der Länge k in G . Dann ist P ein gerichteter Pfad in \vec{G} mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{k!}$.

Beweis

- sei $P = v_1, \dots, v_k$
- jede Ordnung dieser k Knoten ist gleich wahrscheinlich
- also: $k!$ Ereignisse, die jeweils mit Wkt $\frac{1}{k!}$ auftreten
- zwei dieser Ereignisse sind gut: v_1, \dots, v_k und v_k, \dots, v_1

Beachte

- Erfolgswahrscheinlichkeit hängt nur von k ab
- Wahrscheinlichkeit kann durch Wiederholung geboosted werden
- Anzahl Wiederholungen nur von k abhängig (um konstante Wkt zu erreichen)

Randomisierter FPT Algorithmus

Erfolgswahrscheinlichkeit: $\frac{2}{k!}$

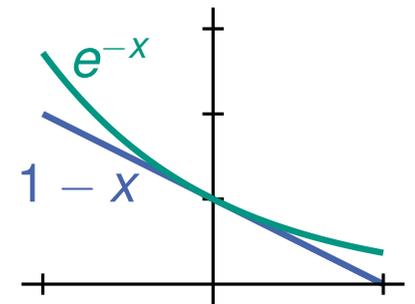
Theorem

Nach $k!$ unabhängigen Rateversuchen für \vec{G} ist die Wahrscheinlichkeit LONGEST PATH für (G, k) korrekt zu entscheiden größer als $\frac{1}{2}$.

Beweis

- nein-Instanzen werden immer korrekt als solche identifiziert
- ja-Instanzen werden falsch erkannt mit Wahrscheinlichkeit:
 - $1 - \frac{2}{k!}$ für einen Rateversuch
 - $(1 - \frac{2}{k!})^{k!}$ für $k!$ unabhängige Rateversuche

$$\left(1 - \frac{2}{k!}\right)^{k!} \leq \left(e^{-\frac{2}{k!}}\right)^{k!} = e^{-2} < \frac{1}{2}$$



Zusammenfassung

- Monte Carlo Algorithmus mit einseitigem Fehler

Ein Schritt zurück

Was haben wir gerade gemacht?

- wünschen uns zusätzliche Struktur (Knotenordnung)
- die Struktur lässt uns das Problem in polynomieller Zeit lösen
- für jede Lösung: nur $f(k)$ viele Möglichkeiten für die Wahl der Struktur
- Wkt für ungünstig geratene Struktur hängt nur von k ab
- boosten der Erfolgswkt: nur von k abhängig viele Wiederholungen

Dasselbe in Grün: Color Coding

- betrachte gefärbte Knoten
- suche nur bunte Lösungen

Problem: Colorful LONGEST PATH

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$, einen Parameter k , sowie eine Partition (Färbung) V_1, \dots, V_k von V . Gibt es einen bunten Pfad der Länge k in G ?
(ein Pfad ist bunt, wenn er aus jedem V_i nur einen Knoten enthält)

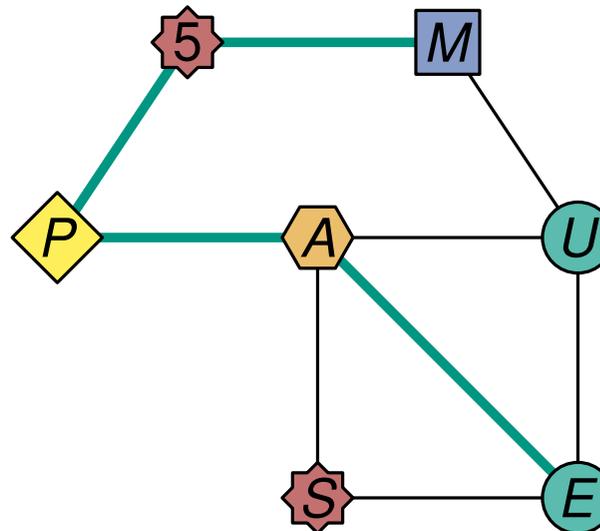
- Struktur hilft: FPT-Algo für gefärbtes Problem
- zufällige Färbung \rightarrow Fehlerwkt nur von k abhängig
- danach: Derandomisierung

Bunte Pfade

Problem: Colorful LONGEST PATH

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$, einen Parameter k , sowie eine Partition (Färbung) V_1, \dots, V_k von V . Gibt es einen bunten Pfad der Länge k in G ?
 (ein Pfad ist bunt, wenn er aus jedem V_i nur einen Knoten enthält)

Wie lang ist der längste bunte Pfad?



Wie helfen die Farben?

Problem: Colorful LONGEST PATH

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$, einen Parameter k , sowie eine Partition (Färbung) V_1, \dots, V_k von V . Gibt es einen bunten Pfad der Länge k in G ?
(ein Pfad ist bunt, wenn er aus jedem V_i nur einen Knoten enthält)

Lösung für DAGs

- Pfad der Länge ℓ von v aus und $uv \in E \Rightarrow$ Pfad der Länge $\ell + 1$ von u aus

Ungerichtete Graphen

- Problem: Pfad der Länge ℓ von v aus könnte u schon enthalten
- Idee: merke zusätzlich bisher besuchte Knoten $\rightarrow n^\ell$ Möglichkeiten
- besser: merke bisher besuchte Farben $\rightarrow 2^k$ Möglichkeiten

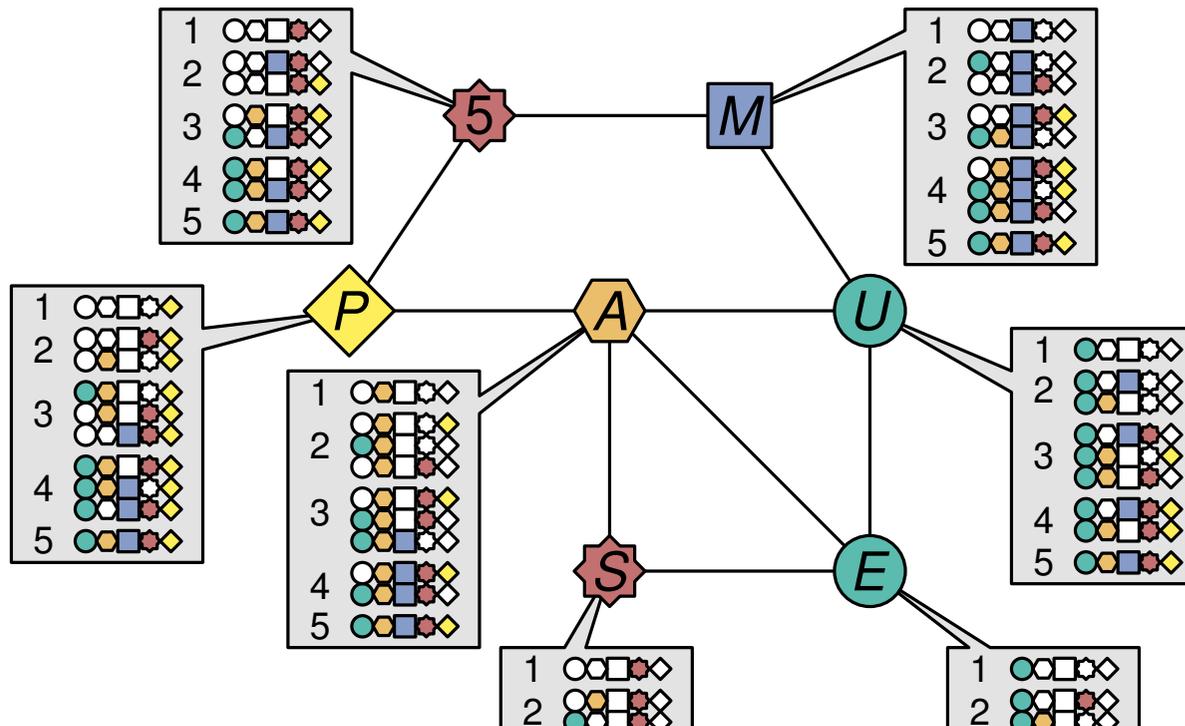
Dynamisches Programm

- für jeden Knoten v : berechne für welche Farbmengen $S \subseteq [k]$ ein Pfad dieser Farben existiert, der in v startet
- betrachte dazu die Farbmengen in aufsteigender Größe
- Farbmengen der Größe $\ell + 1$ ergibt sich aus Farbmengen der Größe ℓ der Nachbarn

Dynamisches Programm

Problem: Colorful LONGEST PATH

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$, einen Parameter k , sowie eine Partition (Färbung) V_1, \dots, V_k von V . Gibt es einen bunten Pfad der Länge k in G ?
 (ein Pfad ist bunt, wenn er aus jedem V_i nur einen Knoten enthält)



Theorem

COLORFUL LONGEST PATH kann in $O(2^k km)$ Zeit gelöst werden.

Randomisierte Färbung

Plan

- färbe Knoten und löse COLORFUL LONGEST PATH statt LONGEST PATH
- Problem: Pfad der Länge k ist in gefärbter Instanz ggf. nicht bunt
- Lösung: wähle für jeden Knoten zufällig eine von k Farben
(unabhängig, gleichverteilt)

Theorem

Sei P ein Pfad der Länge k in G . Dann ist P ein bunter Pfad in der zufällig gefärbten Instanz mit Wahrscheinlichkeit mindestens $\frac{1}{e^k}$.

Beweis

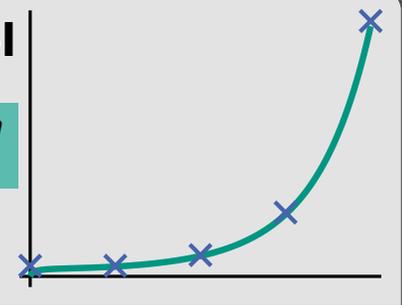
- sei $P = v_1, \dots, v_k$
- jede Farbkombination dieser k Knoten ist gleich wahrscheinlich
- also: k^k Ereignisse, die jeweils mit Wkt $\frac{1}{k^k}$ auftreten
- $k!$ dieser Ereignisse sind gut
- also: $\frac{k!}{k^k} > \frac{1}{e^k}$

Wahrscheinlichkeit boosten

- $\Theta(e^k)$ Wiederholungen \rightarrow konstante Wkt

Stirlingformel

$$n! > \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$



Derandomisierung

Idee

- ausreichend viele zufällige Färbungen \rightarrow eine ist gut (mit hoher Wkt)
- stattdessen: wähle clever mehrere Färbungen, sodass eine gut ist

Wünsch dir was

- Menge von Färbungen der n Elemente (Knoten) mit k Farben
- jede k -elementige Teilmenge ist in mindestens einer Färbung bunt
- nennt man auch: (n, k) perfekte Familie von Hash-Funktionen

Theorem (ohne Beweis)

Eine (n, k) perfekte Familie von Hash-Funktionen der Größe $O(6,4^k \log^2 n)$ kann in $O(6,4^k n \log^2 n)$ Zeit konstruiert werden.

Theorem (vorhin gesehen)

COLORFUL LONGEST PATH kann in $O(2^k km)$ Zeit gelöst werden.

Theorem (folgt direkt)

LONGEST PATH kann in $O(12,8^k km \log^2 n)$ Zeit gelöst werden.

Zusammenfassung: Color Coding

Grundsätzliches Vorgehen

- definiere gefärbte Problemvariante (mit Präfix COLORFUL oder MULTICOLORED)
- entwickle FPT-Algorithmus für gefärbtes Problem
- zeige:
 - nein-Instanz wird zu gefärbter nein-Instanz
 - ja-Instanz wird zu gefärbter ja-Instanz für mindestens eine Färbung in der perfekten Familie von Hash-Funktionen

Tipp fürs Color Coding

- betrachte Lösung einer Probleminstanz
- suche Zeugen der Größe $f(k)$ dafür, dass es eine Lösung ist
- fordere, dass dieser Zeuge bunt ist

SET SPLITTING

Problem: SET SPLITTING

Gegeben eine Grundmenge U , eine Menge $\mathcal{S} \subseteq 2^U$ von Teilmengen und einen Parameter k . Gibt es eine Menge $X \subset U$, die mindestens k Mengen in \mathcal{S} zerschneidet? (X zerschneidet $S \in \mathcal{S}$, wenn $S \cap X \neq \emptyset$ und $S \not\subseteq X$)

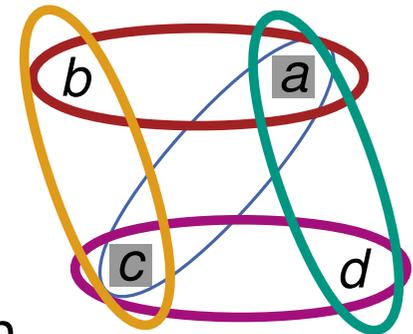
Beispiel

$U = \{a, b, c, d\}$ $\mathcal{S} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$

$X = \{a, c\}$

Anmerkung

- SET SPLITTING ist im Prinzip MAX CUT auf Hypergraphen



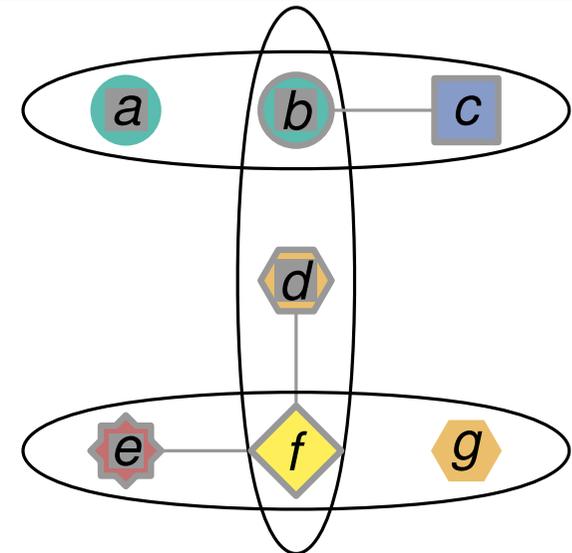
SET SPLITTING

Problem: SET SPLITTING

Gegeben eine Grundmenge U , eine Menge $\mathcal{S} \subseteq 2^U$ von Teilmengen und einen Parameter k . Gibt es eine Menge $X \subset U$, die mindestens k Mengen in \mathcal{S} zerschneidet? (X zerschneidet $S \in \mathcal{S}$, wenn $S \cap X \neq \emptyset$ und $S \not\subseteq X$)

Idee für Color Coding

- jede zerschnittene Menge enthält Element aus X und aus $U \setminus X \rightarrow$ Zeuge der Größe $\leq 2k$
- Zeuge ist bunt für eine der Färbungen mit $2k$ Farben (($n, 2k$) perfekte Familie von Hash-Funktionen)
- für jede Teilmenge der Farben: wähle alle Elemente mit diesen Farben
- \Rightarrow Zeuge wird irgendwann korrekt getrennt
(hier: $X = \{\text{●}, \text{◇}, \text{★}\}$, $U \setminus X = \{\text{◆}, \text{■}\}$)



$$X = \{a, b, d, e\} \quad U \setminus X = \{c, f, g\}$$

Warum so kompliziert?

- eigentlich brauchen wir nur zwei Farben: für X und für $U \setminus X$
- Wunsch: in einer der 2-Färbungen wird der $2k$ große Zeuge gut geteilt
- dafür gibt es universelle Mengen

Universelle Mengen

Wünsch dir was

- Menge von Färbungen der n Elemente mit 2 Farben
- für jede k -elementige Teilmenge kommt jede der 2^k Färbungen mindestens einmal vor
- nennt man auch: (n, k) universelle Menge

Theorem (ohne Beweis)

Eine (n, k) universelle Menge kann in $O(n2^{k+o(k)})$ konstruiert werden.

Was heißt das für SET SPLITTING?

- nutze Färbung mit $(n, 2k)$ universeller Menge
- Lösung $(X, Y = U \setminus X)$ für SET SPLITTING \rightarrow Zeuge der Größe $2k$
- mindestens eine Färbung spaltet den Zeugen entsprechend (X, Y) auf
 \Rightarrow korrekter Algo: teste für jede Färbung, ob sie k Mengen zerteilt

Theorem

SET SPLITTING kann in $n^{O(1)}4^{k+o(k)}$ gelöst werden.

Zusammenfassung

Randomisierung

- kann mit FPT kombiniert werden
- Randomisierung ist oft nur Zwischenschritt → Derandomisierung
- Raten zusätzlicher Struktur eröffnet neue Lösungsansätze

Color Coding

- Färbung bzw. Partitionierung gibt nützliche zusätzliche Struktur
- zentrale Tools: perfekte Familien von Hash-Funktionen und universelle Mengen
- formal ist Color Coding eine Art Turing-Reduktion