

Parametrisierte Algorithmen

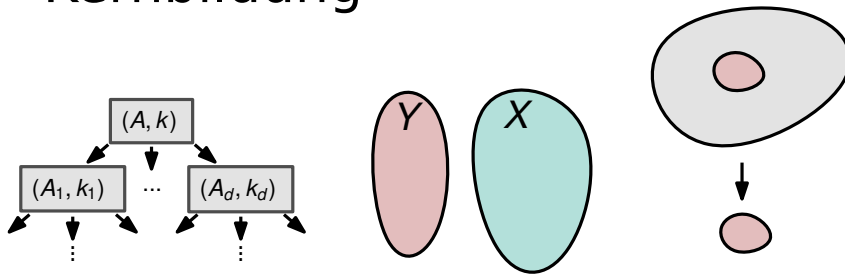
Branch and Reduce: Above Lower Bound



Inhalt

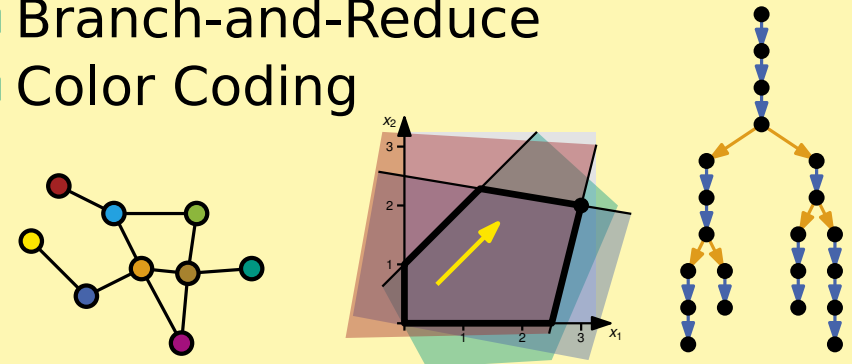
Basic Toolbox

- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung



Erweiterte Toolbox

- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding



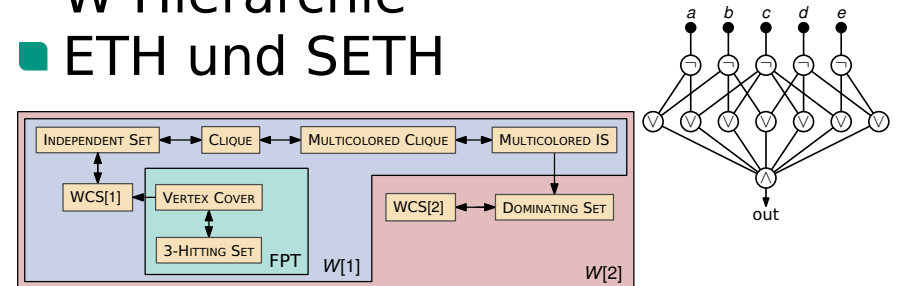
Baumweite

- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem



Untere Schranken

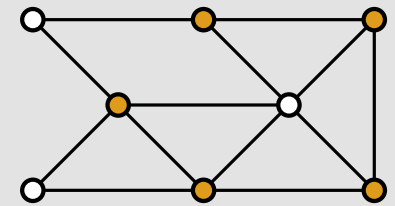
- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH



Wiederholung: Beschränkter Suchbaum

Problem: VERTEX COVER

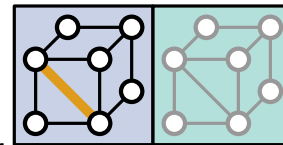
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k .
 Gibt es ein Vertex Cover der Größe k ?
 (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



noch zu überdeckender Teilgraph

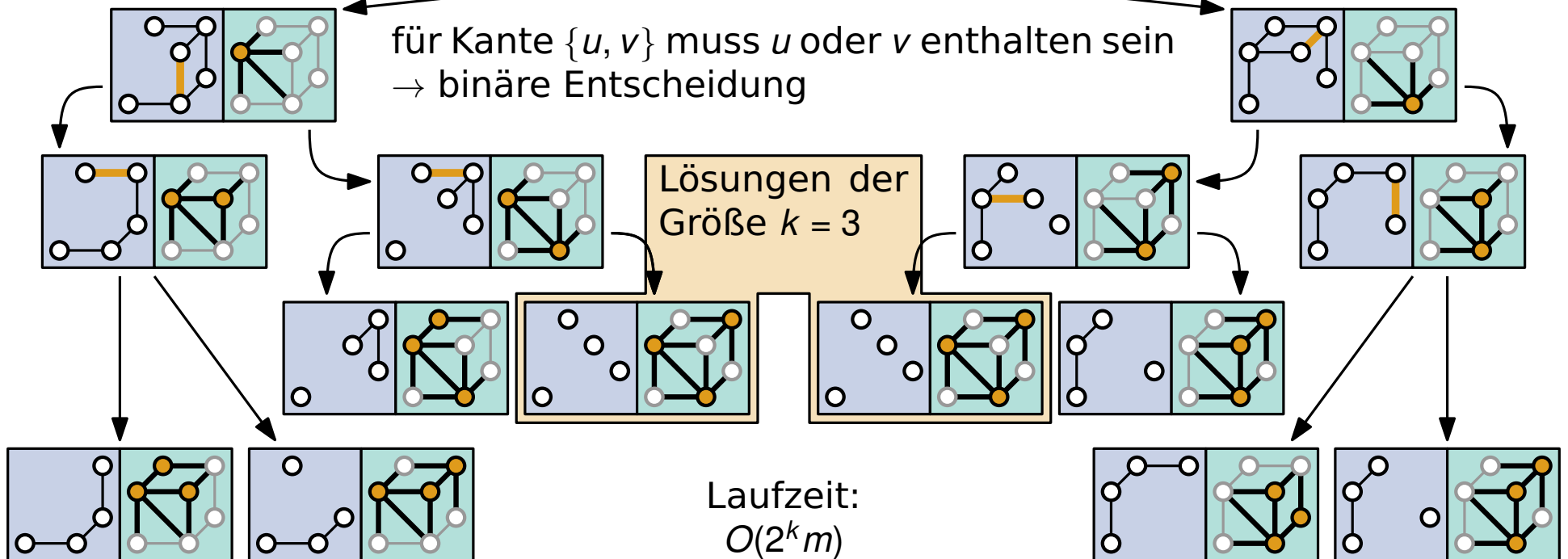
gewählte Knoten & überdeckte Kanten

Jede Kante muss noch überdeckt werden \rightarrow wähle eine beliebige



Gibt es ein Vertex Cover mit maximal $k = 3$ Knoten?

für Kante $\{u, v\}$ muss u oder v enthalten sein \rightarrow binäre Entscheidung

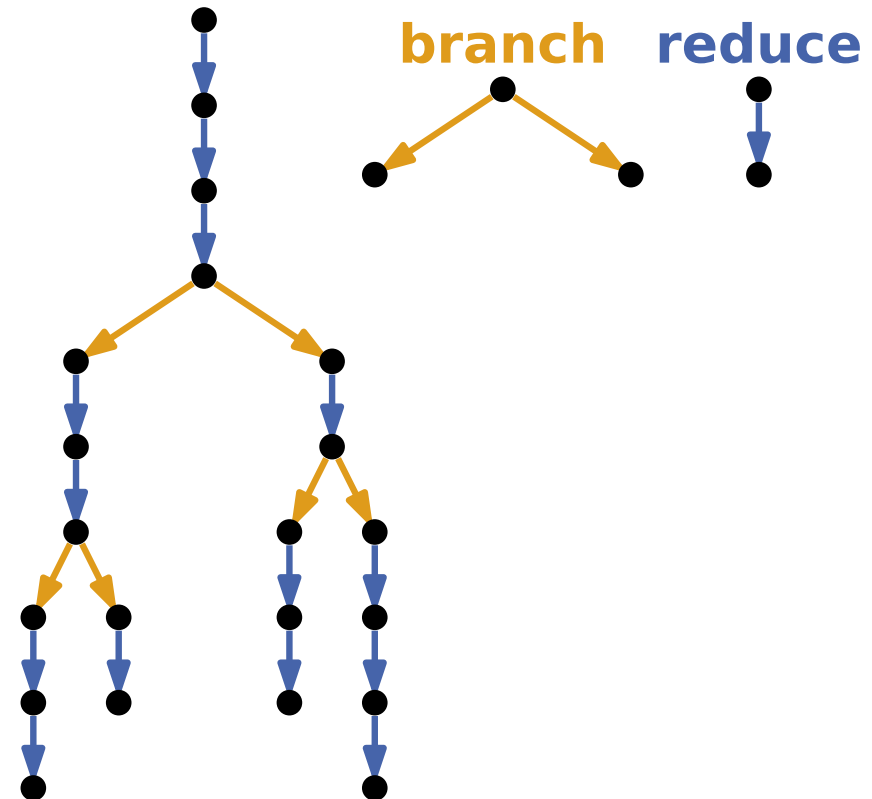


Laufzeit:
 $O(2^k m)$

Kernbildung und Suchbäume

Branch-and-Reduce

- wende Reduktionsregeln so lange wie möglich an
- keine Regel anwendbar: verzweige einmal



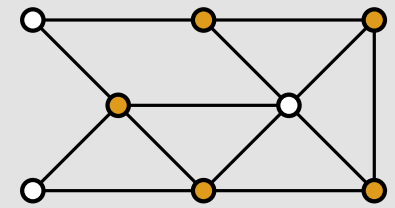
Untere Schranken und Parameter

Bessere Parameter als Lösungsgröße

- sei $\ell(G)$ untere Schranke für das minimale Vertex Cover in G
- $\ell(G)$ sollte effizient berechenbar sein
- Beispiel: $\ell_{LP}(G) =$ optimale Lösung der LP-Relaxierung

Problem: VERTEX COVER ABOVE LP

Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k .
 Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{LP}(G) + k$?
 (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



Heute

- FPT-Algorithmus für VERTEX COVER ABOVE LP
- beachte: $vc(G)$ (bisheriger Parameter) ist meist deutlich größer als $vc(G) - \ell_{LP}(G)$ (neuer Parameter)

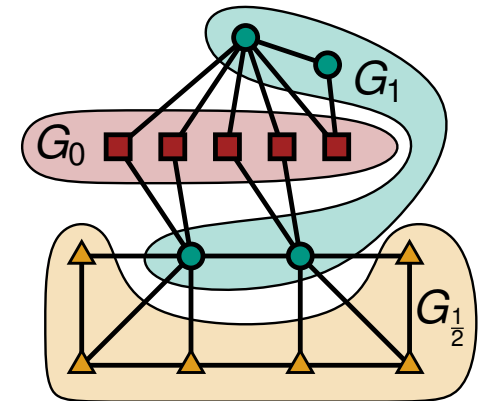
Branch-and-Reduce

Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$

Verzweigungsregel

- für eine Kante uv , betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$



Wie muss der Parameter angepasst werden?

Reduktionsregel

- es werden $|V_1|$ Knoten zum VC hinzugefügt
- $\ell_{LP}(G_{\frac{1}{2}}) = \ell_{LP}(G) - |V_1|$
- G hat VC der Größe $\ell_{LP}(G) + k \Leftrightarrow$
 $G_{\frac{1}{2}}$ hat VC der Größe $\ell_{LP}(G) + k - |V_1| = \ell_{LP}(G_{\frac{1}{2}}) + k$

\Rightarrow der Parameter wird nicht verändert

Verzweigungsregel

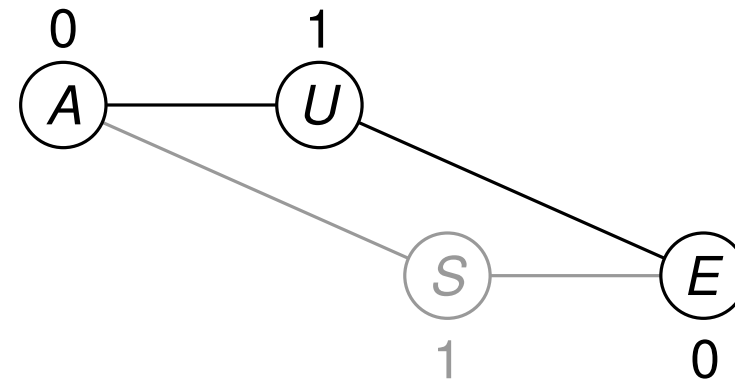
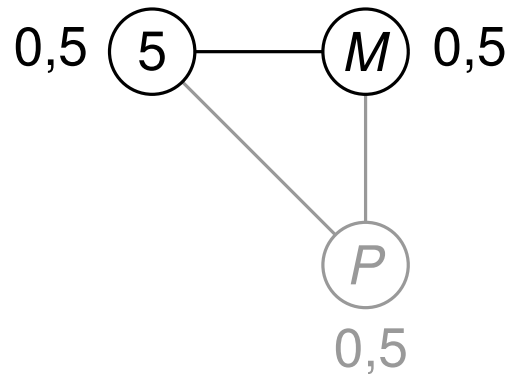
- ein Knoten zum VC hinzugefügt
- aber wie verändert sich $\ell_{LP}(G)$?

Problem: VERTEX COVER ABOVE LP

Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k .
 Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{LP}(G) + k$?
 (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Untere Schranken

Wie groß ist $\ell_{LP}(G)$? Wie verändert es sich beim Branching?



untere Schranke:	1,5	2
nach Branching:	1	1

Wie groß ist $\ell_{\text{LP}}(G - v)$?

Lemma

Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\text{LP}}(G - v) = \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Beweis

alles auf $\frac{1}{2}$ ist die einzige Lösung $\Leftrightarrow \ell_{\text{LP}}(G - v) = \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$

- angenommen, es gibt eine Lösung mit $x_v = 1$ für einen Knoten v
- die gleichen Werte (abgesehen von x_v) liefern Lösung für $G - v$
- also hat $G - v$ eine Lösung der Größe $\ell_{\text{LP}}(G) - 1$

alles auf $\frac{1}{2}$ ist die einzige Lösung $\Rightarrow \ell_{\text{LP}}(G - v) = \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$

- klar: $\ell_{\text{LP}}(G - v) \leq \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ (lösche v aus Lösung für G)
- angenommen, $\ell_{\text{LP}}(G - v) < \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$
- dann gibt es Lösung für $G - v$ mit Wert maximal $\ell_{\text{LP}}(G) - 1$
- hinzufügen von v mit $x_v = 1$ liefert optimale Lösung für G

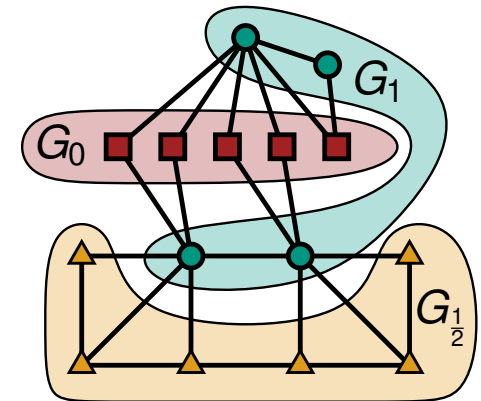
Branch-and-Reduce

Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$
- Parameter bleibt unverändert

Reduktionsregel ist sicher

- siehe Beweis zur Kernbildung in letzter Vorlesung
- Parameter unverändert lassen ist korrekt: vorhin gesehen



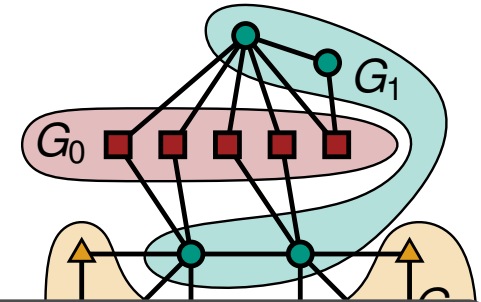
Problem: VERTEX COVER ABOVE LP

Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k .
 Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{LP}(G) + k$?
 (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Branch-and-Reduce

Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$
- Parameter bleibt unverändert



Verzweigungsregel

Wie muss der Parameter angepasst werden?

- für eine Kante uv , betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$
- es wird ein Knoten zum VC hinzugefügt
- $l_{LP}(G - v) = l_{LP}(G) - \frac{1}{2}$ (siehe Lemma)
- G hat VC der Größe $l_{LP}(G) + k \Leftrightarrow$
 $G - v$ hat VC der Größe $l_{LP}(G) + k - 1 = l_{LP}(G - v) + k - \frac{1}{2}$ oder
 $G - u$ hat VC der Größe $l_{LP}(G) + k - 1 = l_{LP}(G - u) + k - \frac{1}{2}$

\Rightarrow Parameter um $\frac{1}{2}$ verringern

Lemma

Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $l_{LP}(G - v) = l_{LP}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Problem: VERTEX COVER ABOVE LP

Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k .
 Gibt es ein Vertex Cover der Größe $l_{LP}(G) + k$?
 (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

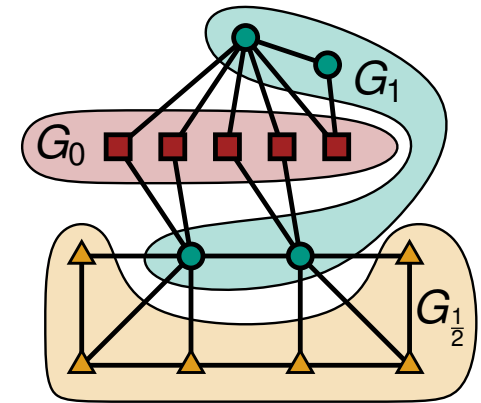
Branch-and-Reduce

Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$
- Parameter bleibt unverändert

Verzweigungsregel

- für eine Kante uv , betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$
- verkleinere k um $\frac{1}{2}$ (in beiden Instanzen)



Laufzeit

- Verzweigungsbaum hat maximal $2k$ Level
- und damit maximal $2^{2k} = 4^k$ Blätter
- Reduktionsregel: polynomiell

Wie? → Nutze das Lemma!

Lemma

Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{LP}(G - v) = \ell_{LP}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

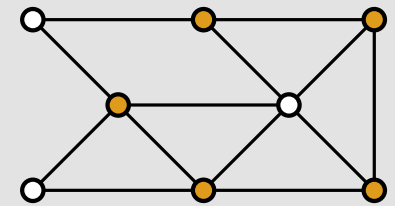
Problem: VERTEX COVER ABOVE LP

Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k .
 Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{LP}(G) + k$?
 (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Zusammenfassung

Problem: VERTEX COVER ABOVE LP

Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k .
 Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{LP}(G) + k$?
 (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



Theorem

Für VERTEX COVER ABOVE LP gibt es einen FPT-Algo mit Laufzeit $4^k \cdot n^{O(1)}$.

Matching als untere Schranken

- die Größe $\ell_M(G)$ eines maximalen Matchings in G ist untere Schranke
- beachte: $\ell_M(G) \leq \ell_{LP}(G)$ (Dualität der linearen Programme)
- Algo von heute zeigt auch FPT für VERTEX COVER ABOVE MATCHING

Bessere untere Schranke

- $2\ell_{LP}(G) - \ell_M(G)$ ist ebenfalls eine untere Schranke
- die Schranke ist stärker als $\ell_{LP}(G)$
- VERTEX COVER ABOVE $2\ell_{LP}(G) - \ell_M(G)$ ist FPT

Literaturhinweise

Raising The Bar For Vertex Cover: Fixed-parameter Tractability Above A Higher Guarantee

■ Shivam Garg, Geevarghese Philip [2016]

■ eben genanntes Ergebnis für VERTEX COVER ABOVE $2\ell_{LP}(G) - \ell_M(G)$

■ enthält viele weitere Referenzen zum Thema

doi.org/10.1137/1.9781611974331.ch80

Branch-and-Reduce Exponential/FPT Algorithms in Practice: A Case Study of Vertex Cover

■ Takuya Akiba, Yoichi Iwata [2016]

■ Branch-and-Reduce für VERTEX COVER in der Praxis

doi.org/10.1016/j.tcs.2015.09.023

WeGotYouCovered: The Winning Solver from the PACE 2019 Challenge, Vertex Cover Track

■ Demian Hesse, Sebastian Lamm, Christian Schulz, Darren Strash [2020]

■ schneller Algo für VERTEX COVER in der Praxis

doi.org/10.1137/1.9781611976229.1