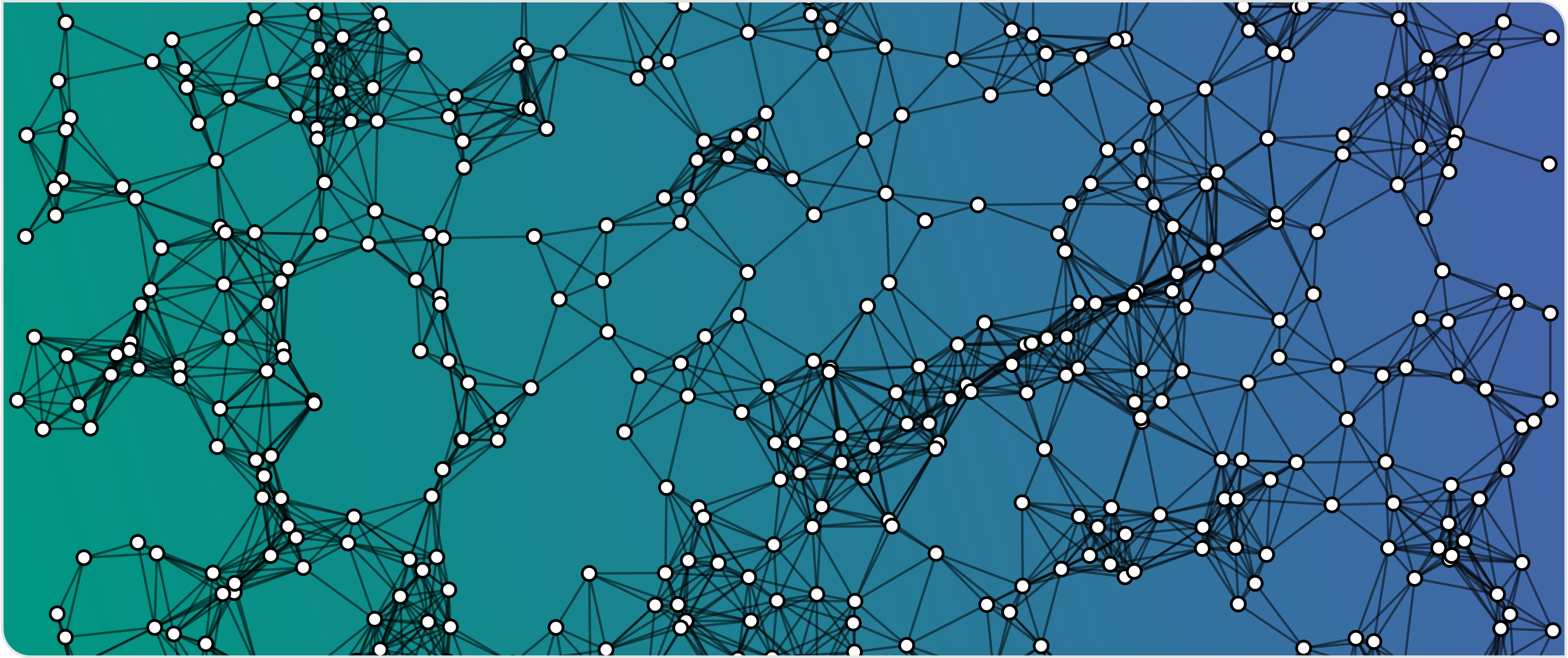
Karlsruher Institut für Technologie

Parametrisierte Algorithmen

Übung 4



Heute

Übungsblatt 3

Übungsblatt 4

Außerdem
- coloring Aufgaben

Übungsblatt 3

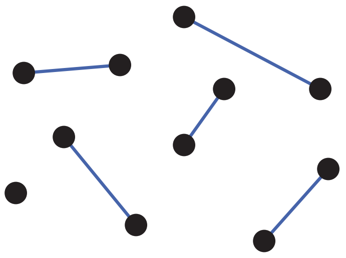
ODD SUBGRAPH
Gegeben Graphen G und Parameter k. Gibt es einen Subgraphen mit genau k Kanten, in dem alle Knoten ungeraden Grad haben?

- Finde einen Kern mit Größe $O(k^2)$

Übungsblatt 3

Odd Subgraph
Gegeben Graphen G und Parameter k. Gibt es einen Subgraphen mit genau k Kanten, in dem alle Knoten ungeraden Grad haben?

- Finde einen Kern mit Größe $O(k^2)$

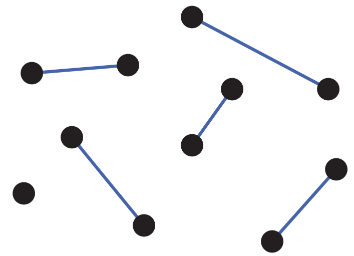


- Maximalgrad k und mindestens $k(2k-1)$ Kanten
  - Matching mit k Kanten greedy wählen

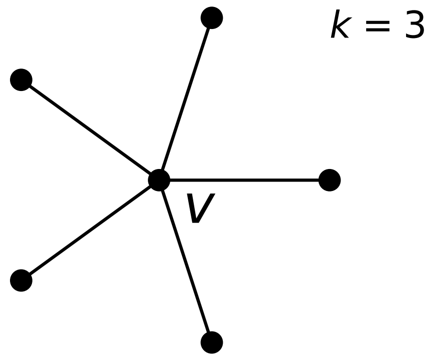
Übungsblatt 3

Odd Subgraph
Gegeben Graphen G und Parameter k. Gibt es einen Subgraphen mit genau k Kanten, in dem alle Knoten ungeraden Grad haben?

- Finde einen Kern mit Größe $O(k^2)$



- Maximalgrad k und mindestens $k(2k-1)$ Kanten
  - Matching mit k Kanten greedy wählen

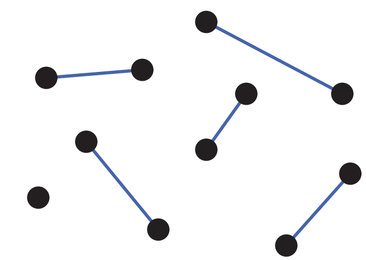


- Ein Koten v hat Grad $x > k$
  - Wenn k ungerade, haben wir eine Lösung

Übungsblatt 3

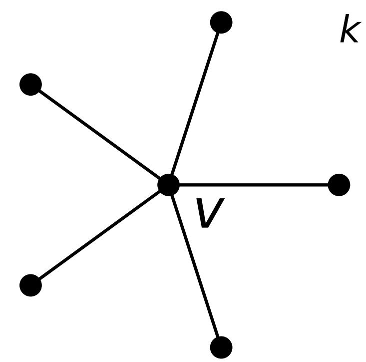
Odd Subgraph
Gegeben Graphen G und Parameter k. Gibt es einen Subgraphen mit genau k Kanten, in dem alle Knoten ungeraden Grad haben?

- Finde einen Kern mit Größe $O(k^2)$



- Maximalgrad k und mindestens $k(2k-1)$ Kanten
  - Matching mit k Kanten greedy wählen

$k = 4$

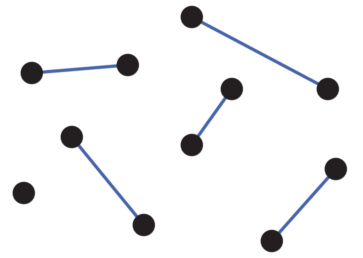


- Ein Koten v hat Grad $x > k$
  - Wenn k ungerade, haben wir eine Lösung
  - Wenn k gerade, müssen wir eine zusätzliche Kante finden

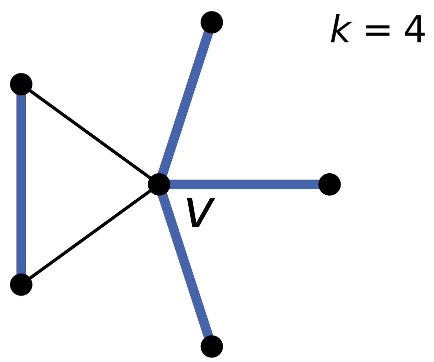
Übungsblatt 3

ODD SUBGRAPH
Gegeben Graphen G und Parameter k. Gibt es einen Subgraphen mit genau k Kanten, in dem alle Knoten ungeraden Grad haben?

- Finde einen Kern mit Größe $O(k^2)$



- Maximalgrad k und mindestens $k(2k-1)$ Kanten
  - Matching mit k Kanten greedy wählen

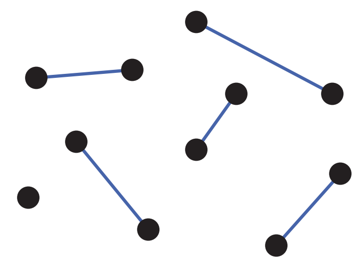


- Ein Koten v hat Grad $x > k$
  - Wenn k ungerade, haben wir eine Lösung
  - Wenn k gerade, müssen wir eine zusätzliche Kante finden

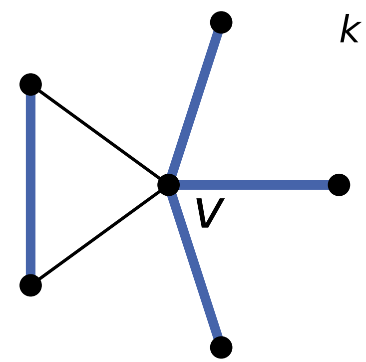
Übungsblatt 3

ODD SUBGRAPH
Gegeben Graphen G und Parameter k. Gibt es einen Subgraphen mit genau k Kanten, in dem alle Knoten ungeraden Grad haben?

- Finde einen Kern mit Größe $O(k^2)$



- Maximalgrad k und mindestens $k(2k-1)$ Kanten
  - Matching mit k Kanten greedy wählen



- Ein Koten v hat Grad $x > k$
  - Wenn k ungerade, haben wir eine Lösung
  - Wenn k gerade, müssen wir eine zusätzliche Kante finden
- Wenn Maximalgrad k und maximal $k(2k-1)$ Kanten $\Rightarrow$ kleiner Kern

Übungsblatt 3

MAKESPAN SCHEDULING
Gegeben m Maschinen und Jobs mit Bearbeitungszeit $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ und maximale Bearbeitungszeit k. Kann ich die Jobs so auf die Maschinen aufteilen, dass jede Maschine maximal k Zeit braucht?

Übungsblatt 3

MAKESPAN SCHEDULING
Gegeben m Maschinen und Jobs mit Bearbeitungszeit $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ und maximale Bearbeitungszeit k. Kann ich die Jobs so auf die Maschinen aufteilen, dass jede Maschine maximal k Zeit braucht?

- **Beobachtung**
  - Nur die Bearbeitungszeit aber nicht der Job selbst ist wichtig
  - Es gibt nur in k begrenzt viele Schedules s mit kleiner Länge

Übungsblatt 3

Makespan Scheduling
Gegeben m Maschinen und Jobs mit Bearbeitungszeit $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ und maximale Bearbeitungszeit k. Kann ich die Jobs so auf die Maschinen aufteilen, dass jede Maschine maximal k Zeit braucht?

- **Beobachtung**
  - Nur die Bearbeitungszeit aber nicht der Job selbst ist wichtig
  - Es gibt nur in k begrenzt viele Schedules s mit kleiner Länge

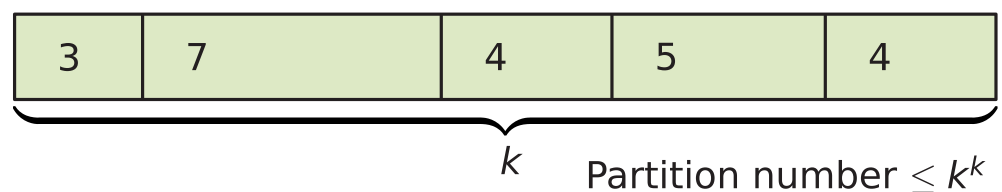
$$\underbrace{\boxed{3}\boxed{7}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{4}}_{k}$$

Partition number $\leq k^k$

Übungsblatt 3

MAKESPAN SCHEDULING
Gegeben m Maschinen und Jobs mit Bearbeitungszeit $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ und maximale Bearbeitungszeit k. Kann ich die Jobs so auf die Maschinen aufteilen, dass jede Maschine maximal k Zeit braucht?

- **Beobachtung**
  - Nur die Bearbeitungszeit aber nicht der Job selbst ist wichtig
  - Es gibt nur in k begrenzt viele Schedules s mit kleiner Länge



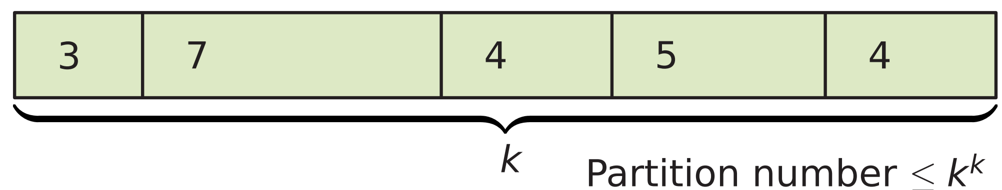
Partition number $\leq k^k$

- c_ℓ: Anzahl an Jobs der Länge ℓ
- $d_{s,\ell}$: Wie viele Jobs in s haben Länge ℓ
- $0 \leq x_s$: Anzahl der Maschinen mit Schedule s

Übungsblatt 3

MAKESPAN SCHEDULING
Gegeben m Maschinen und Jobs mit Bearbeitungszeit $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ und maximale Bearbeitungszeit k. Kann ich die Jobs so auf die Maschinen aufteilen, dass jede Maschine maximal k Zeit braucht?

- **Beobachtung**
  - Nur die Bearbeitungszeit aber nicht der Job selbst ist wichtig
  - Es gibt nur in k begrenzt viele Schedules s mit kleiner Länge



Partition number $\leq k^k$

- c_ℓ: Anzahl an Jobs der Länge ℓ
- $d_{s,\ell}$: Wie viele Jobs in s haben Länge ℓ
- $0 \leq x_s$: Anzahl der Maschinen mit Schedule s

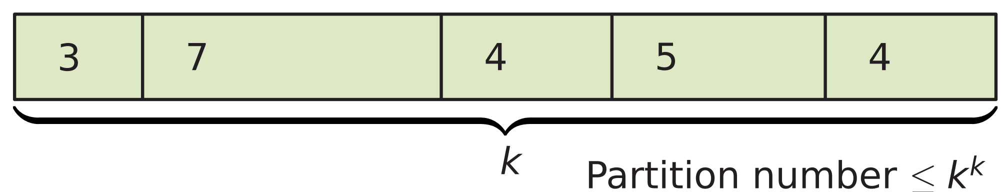
“Es werden so viele Schedules wie Maschinen zugewiesen”

$$\sum_{s \in S} x_s = m$$

Übungsblatt 3

Makespan Scheduling
Gegeben m Maschinen und Jobs mit Bearbeitungszeit $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{N}$ und maximale Bearbeitungszeit k. Kann ich die Jobs so auf die Maschinen aufteilen, dass jede Maschine maximal k Zeit braucht?

- **Beobachtung**
  - Nur die Bearbeitungszeit aber nicht der Job selbst ist wichtig
  - Es gibt nur in k begrenzt viele Schedules s mit kleiner Länge



Partition number $\leq k^k$

- c_ℓ: Anzahl an Jobs der Länge ℓ
- $d_{s,\ell}$: Wie viele Jobs in s haben Länge ℓ
- $0 \leq x_s$: Anzahl der Maschinen mit Schedule s

"Es werden so viele Schedules wie Maschinen zugewiesen"

$$\sum_{s \in S} x_s = m$$

"Jeder Job wird abgearbeitet"
Für alle ℓ:

$$\sum_{s \in S} d_{s,\ell} \cdot x_s = c_\ell$$

Übungsblatt 4

VERTEX COVER
Zeige, dass die LP-Relaxierung von Vertex Cover in bipartiten Graphen eine ganzzahlige Lösung hat

Übungsblatt 4

Vertex Cover
Zeige, dass die LP-Relaxierung von Vertex Cover in bipartiten Graphen eine ganzzahlige Lösung hat

- Wie sieht die LP-Matrix A in bipartiten Graphen aus?

Übungsblatt 4

VERTEX COVER
Zeige, dass die LP-Relaxierung von Vertex Cover in bipartiten Graphen eine ganzzahlige Lösung hat

- Wie sieht die LP-Matrix A in bipartiten Graphen aus?

MAX SAT
Gegeben Formel ϕ mit n Variablen und m Klauseln. Gibt es eine Belegung, die mindestens k Klauseln erfüllt?

Übungsblatt 4

VERTEX COVER
Zeige, dass die LP-Relaxierung von Vertex Cover in bipartiten Graphen eine ganzzahlige Lösung hat

- Wie sieht die LP-Matrix A in bipartiten Graphen aus?

MAX SAT
Gegeben Formel ϕ mit n Variablen und m Klauseln. Gibt es eine Belegung, die mindestens k Klauseln erfüllt?

- Finde einen Kern der Größe $O(k)$

Übungsblatt 4

Vertex Cover
Zeige, dass die LP-Relaxierung von Vertex Cover in bipartiten Graphen eine ganzzahlige Lösung hat

- Wie sieht die LP-Matrix A in bipartiten Graphen aus?

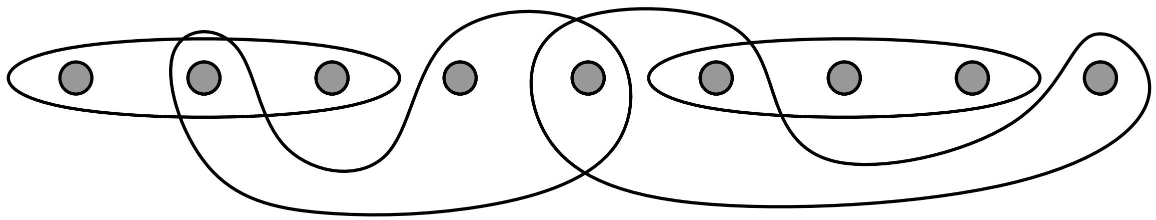
Max Sat
Gegeben Formel ϕ mit n Variablen und m Klauseln. Gibt es eine Belegung, die mindestens k Klauseln erfüllt?

- Finde einen Kern der Größe $O(k)$
- FPT Algorithmus mit Parameter $p = k - \frac{m}{2}$

Probabilistische Methode

HYPERGRAPH 2-COLORING

Hypergraph G mit $|E| < 2^{k-1}$ Hyperkanten der Größe genau k. Gibt es eine Zweifärbung der Knoten, sodass keine Kante einfarbig ist?

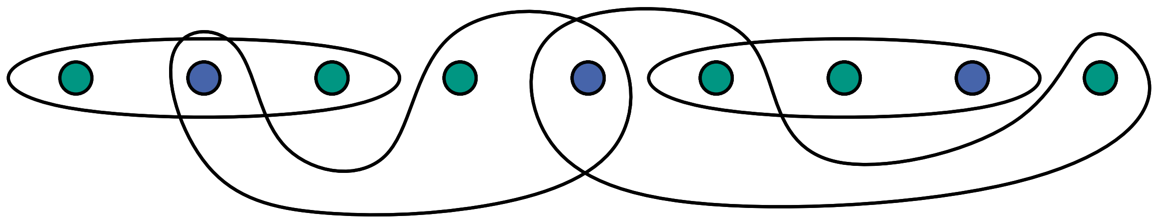


$k = 3$

Probabilistische Methode

HYPERGRAPH 2-COLORING

Hypergraph G mit $|E| < 2^{k-1}$ Hyperkanten der Größe genau k. Gibt es eine Zweifärbung der Knoten, sodass keine Kante einfarbig ist?

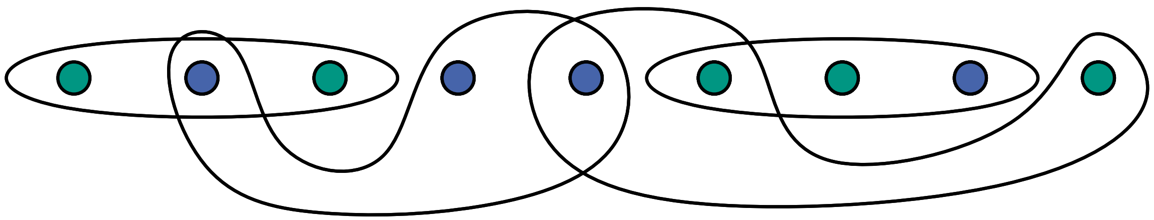


gültige Färbung
$k = 3$

Probabilistische Methode

Hypergraph 2-coloring

Hypergraph G mit $|E| < 2^{k-1}$ Hyperkanten der Größe genau k. Gibt es eine Zweifärbung der Knoten, sodass keine Kante einfarbig ist?

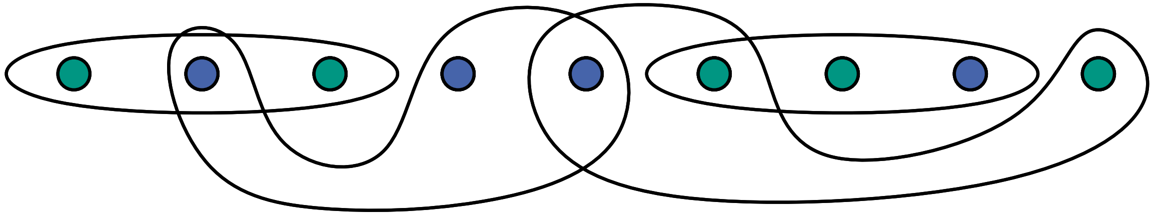


ungültige Färbung
$k = 3$

Probabilistische Methode

HYPERGRAPH 2-COLORING

Hypergraph G mit $|E| < 2^{k-1}$ Hyperkanten der Größe genau k. Gibt es eine Zweifärbung der Knoten, sodass keine Kante einfarbig ist?

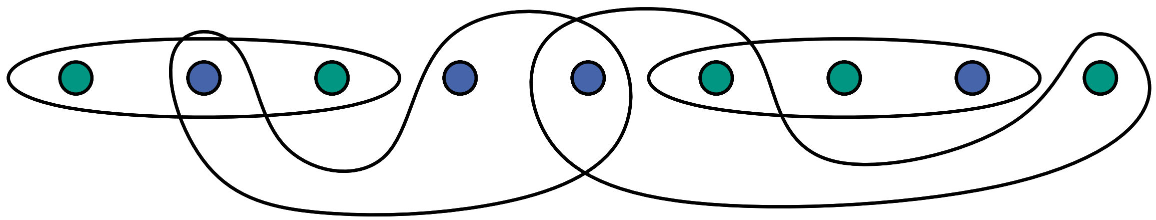


ungültige Färbung
$k = 3$

- Färbe jeden Knoten zufällig. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass $e \in E$ einfarbig ist?

Probabilistische Methode

HYPERGRAPH 2-COLORING
Hypergraph G mit $|E| < 2^{k-1}$ Hyperkanten der Größe genau k. Gibt es eine Zweifärbung der Knoten, sodass keine Kante einfarbig ist?



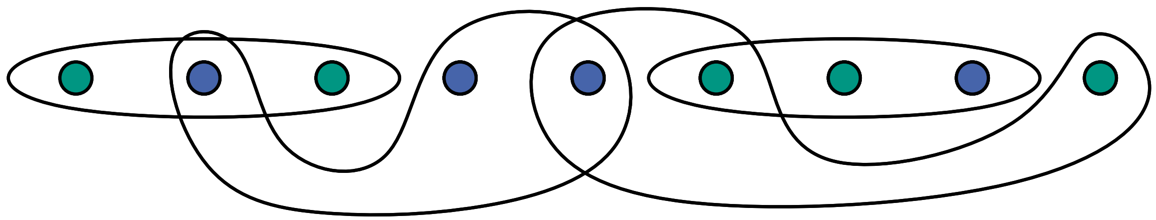
ungültige Färbung
$k = 3$

- Färbe jeden Knoten zufällig. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass $e \in E$ einfarbig ist?
  - $\mathbb{P}[e \text{ einfarbig}] = 2 \cdot 2^{-k}$

Probabilistische Methode

HYPERGRAPH 2-COLORING

Hypergraph G mit $|E| < 2^{k-1}$ Hyperkanten der Größe genau k. Gibt es eine Zweifärbung der Knoten, sodass keine Kante einfarbig ist?



ungültige Färbung
$k = 3$

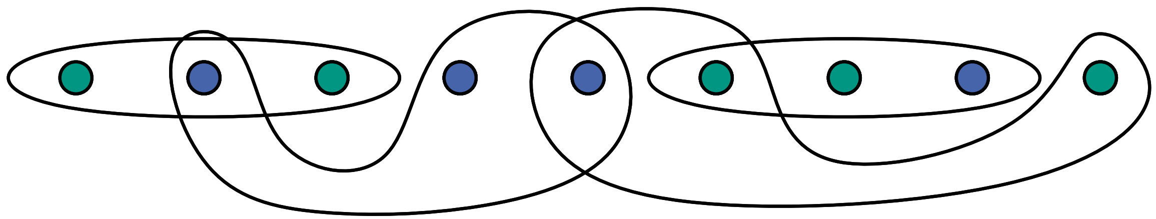
- Färbe jeden Knoten zufällig. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass $e \in E$ einfarbig ist?
  - $\mathbb{P}[e \text{ einfarbig}] = 2 \cdot 2^{-k}$

    $\mathbb{P}[\exists \text{ einfarbige Kante}]$

Probabilistische Methode

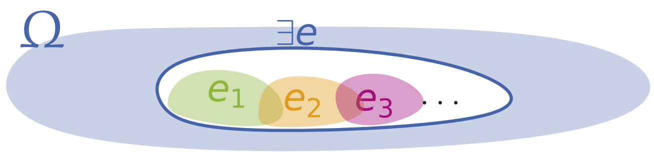
HYPERGRAPH 2-COLORING

Hypergraph G mit $|E| < 2^{k-1}$ Hyperkanten der Größe genau k. Gibt es eine Zweifärbung der Knoten, sodass keine Kante einfarbig ist?



ungültige Färbung
$k = 3$

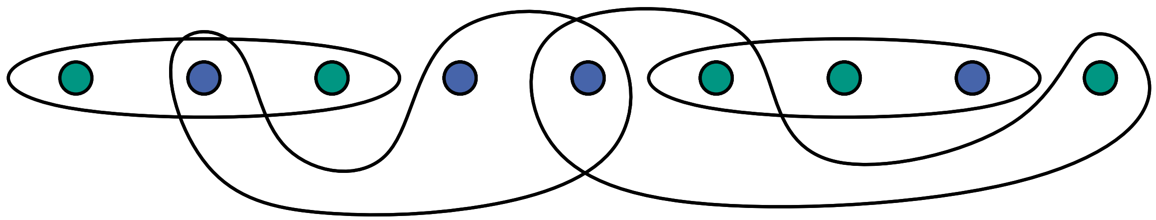
- Färbe jeden Knoten zufällig. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass $e \in E$ einfarbig ist?
  - $\mathbb{P}[e \text{ einfarbig}] = 2 \cdot 2^{-k}$



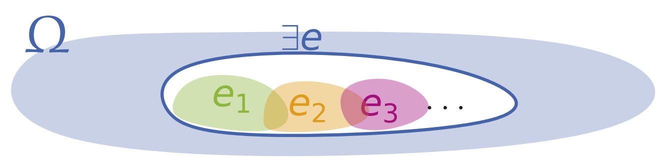
$$\mathbb{P}[\exists \text{ einfarbige Kante}] \leq \sum_{e \in E} \mathbb{P}[e \text{ einfarbig}]$$

Probabilistische Methode

HYPERGRAPH 2-COLORING
Hypergraph G mit $|E| < 2^{k-1}$ Hyperkanten der Größe genau k. Gibt es eine Zweifärbung der Knoten, sodass keine Kante einfarbig ist?



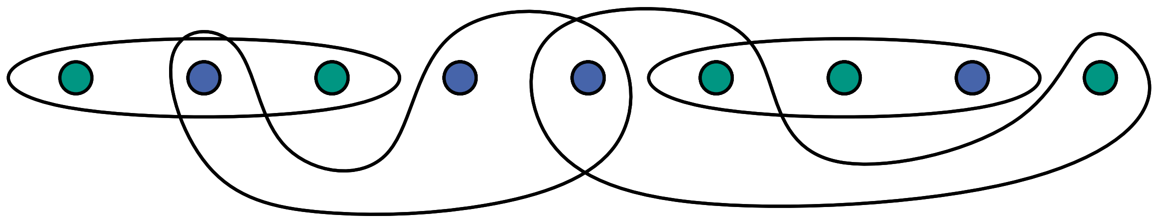
- Färbe jeden Knoten zufällig. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass $e \in E$ einfarbig ist?
  - $\mathbb{P}[e \text{ einfarbig}] = 2 \cdot 2^{-k}$



$$\mathbb{P}[\exists \text{ einfarbige Kante}] \leq \sum_{e \in E} \mathbb{P}[e \text{ einfarbig}] = |E| \cdot 2^{1-k} < 2^{k-1} \cdot 2^{1-k} = 1$$

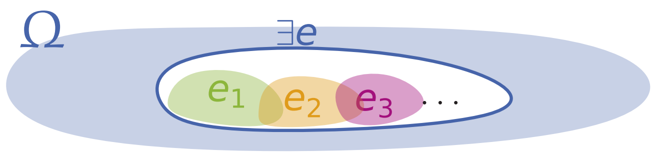
Probabilistische Methode

HYPERGRAPH 2-COLORING
Hypergraph G mit $|E| < 2^{k-1}$ Hyperkanten der Größe genau k. Gibt es eine Zweifärbung der Knoten, sodass keine Kante einfarbig ist?



ungültige Färbung
$k = 3$

- Färbe jeden Knoten zufällig. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass $e \in E$ einfarbig ist?
  - $\mathbb{P}[e \text{ einfarbig}] = 2 \cdot 2^{-k}$



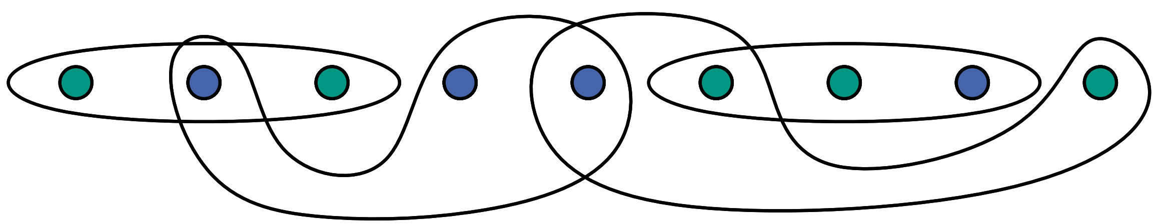
$$\mathbb{P}[\exists \text{ einfarbige Kante}] \leq \sum_{e \in E} \mathbb{P}[e \text{ einfarbig}] = |E| \cdot 2^{1-k} < 2^{k-1} \cdot 2^{1-k} = 1$$

- $\mathbb{P}[X] > 0 \Rightarrow$ Es existiert ein Ereignis, in dem X gilt

Probabilistische Methode

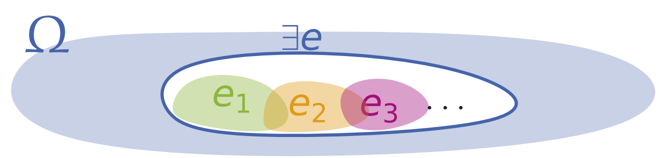
Karlsruher Institut für Technologie

HYPERGRAPH 2-COLORING
Hypergraph G mit $|E| < 2^{k-1}$ Hyperkanten der Größe genau k. Gibt es eine Zweifärbung der Knoten, sodass keine Kante einfarbig ist?



ungültige Färbung
$k = 3$

- Färbe jeden Knoten zufällig. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass $e \in E$ einfarbig ist?
  - $\mathbb{P}[e \text{ einfarbig}] = 2 \cdot 2^{-k}$



$$\mathbb{P}[\exists \text{ einfarbige Kante}] \leq \sum_{e \in E} \mathbb{P}[e \text{ einfarbig}] = |E| \cdot 2^{1-k} < 2^{k-1} \cdot 2^{1-k} = 1$$

- $\mathbb{P}[X] > 0 \Rightarrow$ Es existiert ein Ereignis, in dem X gilt
- $\mathbb{E}[X] \geq c \Rightarrow$ Es existiert ein Ereignis, in dem X mindestens c ist

Color Coding

TREE SUBGRAPH ISOMORPHISM

Gegeben Graph G und Baum T mit k Knoten. Überprüfe, ob G den Baum T als Subgraphen enthält. (Parameter k)

Color Coding

Tree Subgraph Isomorphism

Gegeben Graph G und Baum T mit k Knoten. Überprüfe, ob G den Baum T als Subgraphen enthält. (Parameter k)

Partial Vertex Cover

Gegeben Graph G. Gibt es eine Teilmenge X von maximal k Knoten, sodass mindestens t Kanten getroffen werden? (Parameter t)

- Schafft ihr Laufzeit $2^{O(t)}\text{poly}(n)$?

Color Coding

Tree Subgraph Isomorphism
Gegeben Graph G und Baum T mit k Knoten. Überprüfe, ob G den Baum T als Subgraphen enthält. (Parameter k)

Partial Vertex Cover
Gegeben Graph G. Gibt es eine Teilmenge X von maximal k Knoten, sodass mindestens t Kanten getroffen werden? (Parameter t)

- Schafft ihr Laufzeit $2^{O(t)}\text{poly}(n)$?

Bonus (ohne Färbung)

Long Cycle
Gibt es in G einen Kreis mit mindestens k Knoten?

- *max leaf number* ℓ: Jeder Spannbaum von G hat maximal ℓ Blätter
- Gib für Long Cycle mit Parameter ℓ einen polynomiellen Kern an

Color Coding

Tree Subgraph Isomorphism
Gegeben Graph G und Baum T mit k Knoten. Überprüfe, ob G den Baum T als Subgraphen enthält. (Parameter k)

Partial Vertex Cover
Gegeben Graph G. Gibt es eine Teilmenge X von maximal k Knoten, sodass mindestens t Kanten getroffen werden? (Parameter t)

- Schafft ihr Laufzeit $2^{O(t)}\mathrm{poly}(n)$?

Bonus (ohne Färbung)

Long Cycle
Gibt es in G einen Kreis mit mindestens k Knoten?

- *max leaf number* ℓ: Jeder Spannbaum von G hat maximal ℓ Blätter
- Gib für Long Cycle mit Parameter ℓ einen polynomiellen Kern an
- Hinweis: Wenn ℓ klein ist, gibt es wenig Knoten mit Grad ≥ 3