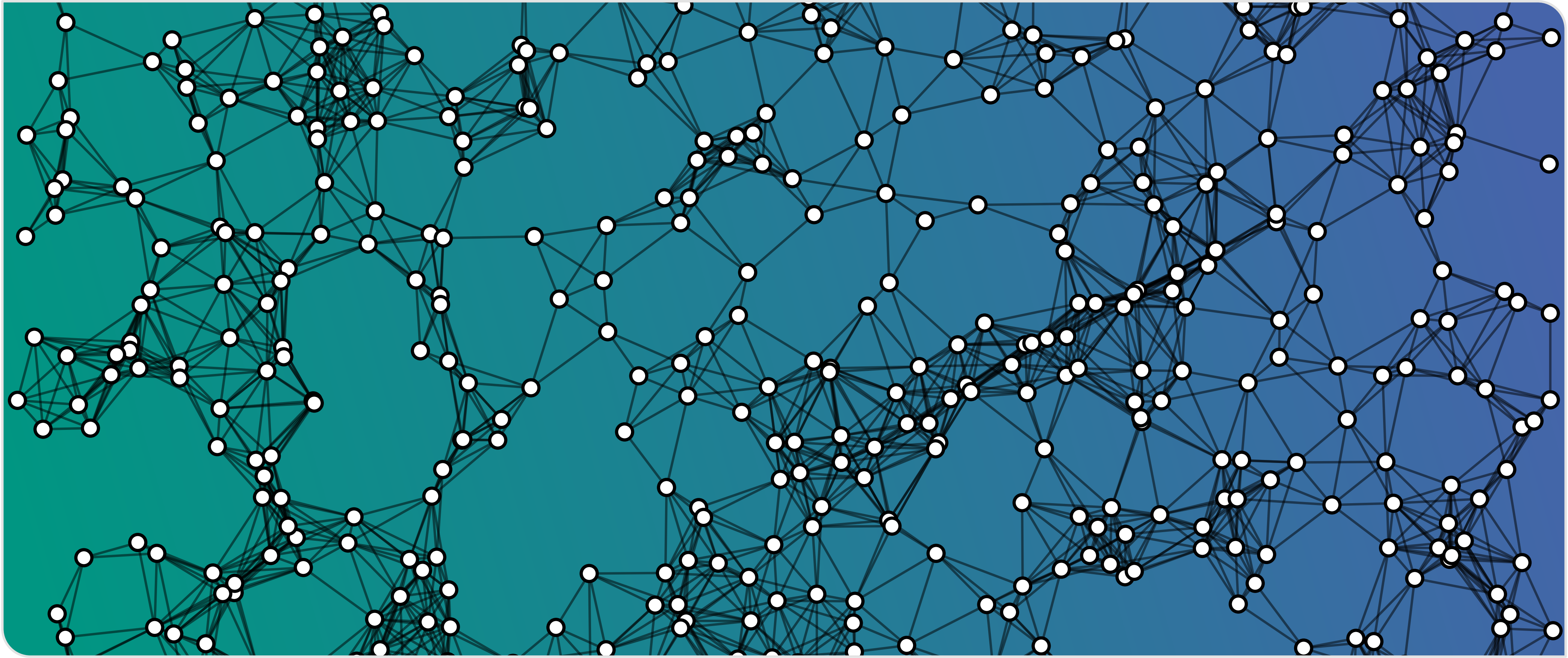
Karlsruher Institut für Technologie

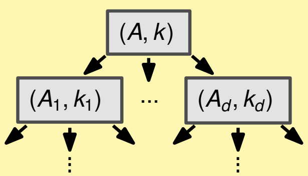
Parametrisierte Algorithmen

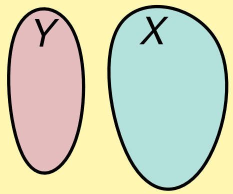
Beschränkte Suchbäume: bessere Verzweigung

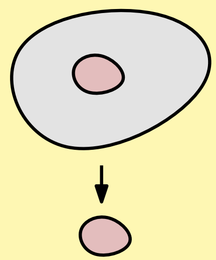


Inhalt

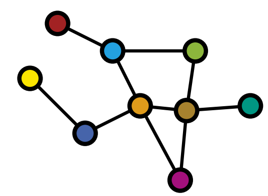
Basic Toolbox
- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung

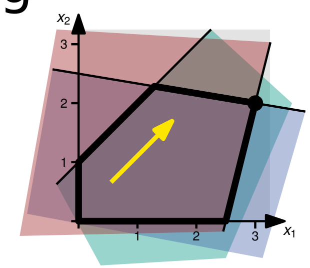


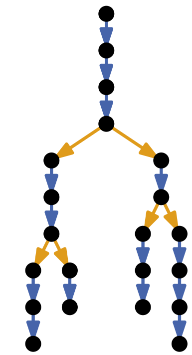




Erweiterte Toolbox
- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding

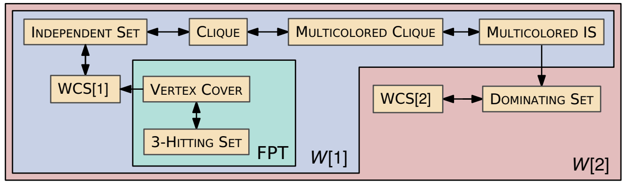


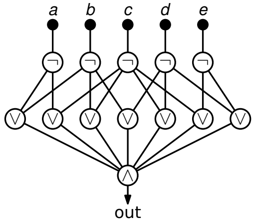




Baumweite
- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem

Untere Schranken
- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH





Anmerkung: Wie verhält sich FPT zu NP?

Anmerkung: Wie verhält sich FPT zu NP?

Formal korrekte Antwort: gar nicht

- $NP \cap FPT = \emptyset$ (NP enthält Probleme, FPT enthält parametrisierte Probleme)

Anmerkung: Wie verhält sich FPT zu NP?

Formal korrekte Antwort: gar nicht

- $\mathrm{NP} \cap \mathrm{FPT} = \emptyset$ (NP enthält Probleme, FPT enthält parametrisierte Probleme)
- sei L entscheidbar; es gibt Parametrisierungen L' und L'' sodass:
  - $L' \in \mathrm{FPT}$ (Laufzeit des Algos als Parameter)
  - $L'' \notin \mathrm{FPT}$, außer wenn $L \in \mathrm{P}$ (konstanter Parameter)

Anmerkung: Wie verhält sich FPT zu NP?

Formal korrekte Antwort: gar nicht

- $\mathrm{NP} \cap \mathrm{FPT} = \emptyset$ (NP enthält Probleme, FPT enthält parametrisierte Probleme)
- sei L entscheidbar; es gibt Parametrisierungen L' und L'' sodass:
  - $L' \in \mathrm{FPT}$ (Laufzeit des Algos als Parameter)
  - $L'' \notin \mathrm{FPT}$, außer wenn $L \in \mathrm{P}$ (konstanter Parameter)

Typische Situation: Was wollen wir mit FPT erreichen?

- löse Probleme in NPC halbwegs effizient

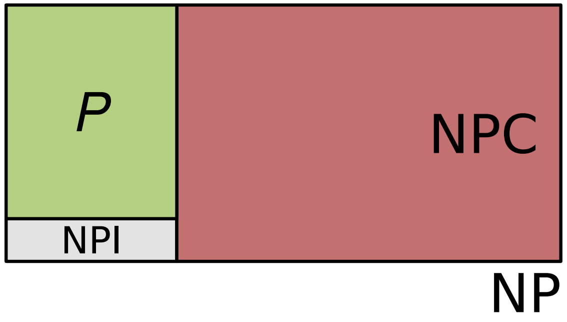
Anmerkung: Wie verhält sich FPT zu NP?

Formal korrekte Antwort: gar nicht

- $\mathrm{NP} \cap \mathrm{FPT} = \emptyset$ (NP enthält Probleme, FPT enthält parametrisierte Probleme)
- sei L entscheidbar; es gibt Parametrisierungen L' und L'' sodass:
  - $L' \in \mathrm{FPT}$ (Laufzeit des Algos als Parameter)
  - $L'' \notin \mathrm{FPT}$, außer wenn $L \in \mathrm{P}$ (konstanter Parameter)

Typische Situation: Was wollen wir mit FPT erreichen?

- löse Probleme in NPC halbwegs effizient



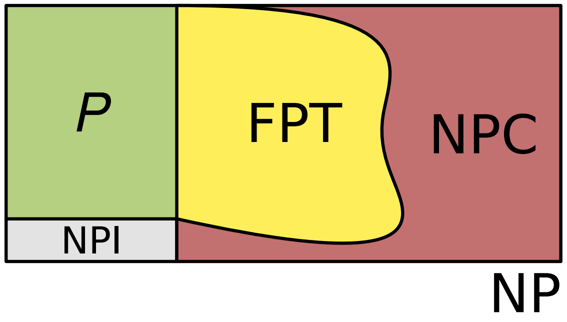
Anmerkung: Wie verhält sich FPT zu NP?

Formal korrekte Antwort: gar nicht

- $\mathrm{NP} \cap \mathrm{FPT} = \emptyset$ (NP enthält Probleme, FPT enthält parametrisierte Probleme)
- sei L entscheidbar; es gibt Parametrisierungen L' und L'' sodass:
  - $L' \in \mathrm{FPT}$ (Laufzeit des Algos als Parameter)
  - $L'' \notin \mathrm{FPT}$, außer wenn $L \in \mathrm{P}$ (konstanter Parameter)

Typische Situation: Was wollen wir mit FPT erreichen?

- löse Probleme in NPC halbwegs effizient
- wir betrachten hauptsächlich Probleme in NP



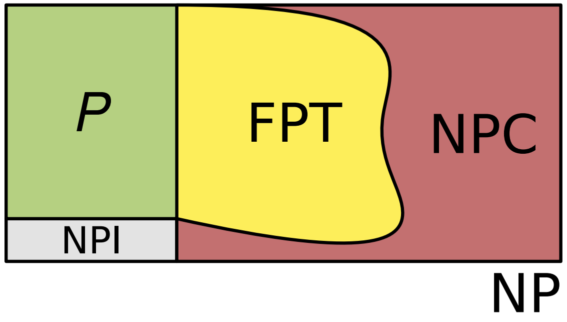
Anmerkung: Wie verhält sich FPT zu NP?

Formal korrekte Antwort: gar nicht

- $\mathrm{NP} \cap \mathrm{FPT} = \emptyset$ (NP enthält Probleme, FPT enthält parametrisierte Probleme)
- sei L entscheidbar; es gibt Parametrisierungen L' und L'' sodass:
  - $L' \in \mathrm{FPT}$ (Laufzeit des Algos als Parameter)
  - $L'' \notin \mathrm{FPT}$, außer wenn $L \in \mathrm{P}$ (konstanter Parameter)

Typische Situation: Was wollen wir mit FPT erreichen?

- löse Probleme in NPC halbwegs effizient
- wir betrachten hauptsächlich Probleme in NP
- gute Vorstellung: FPT schlägt eine Brücke zwischen P und NPC
  (auch wenn man das formal so nicht sagen kann)



Anmerkung: Wie verhält sich FPT zu NP?

Karlsruher Institut für Technologie

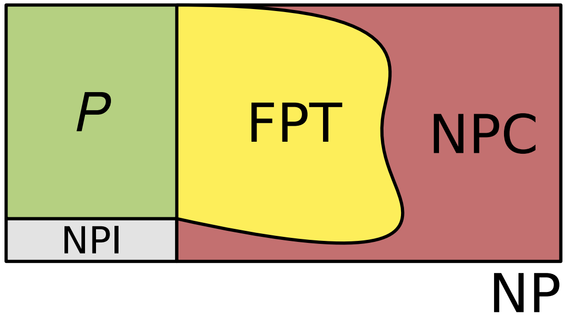
Formal korrekte Antwort: gar nicht

- NP $\cap$ FPT $= \emptyset$ (NP enthält Probleme, FPT enthält parametrisierte Probleme)
- sei L entscheidbar; es gibt Parametrisierungen L' und L'' sodass:
  - $L' \in$ FPT (Laufzeit des Algos als Parameter)
  - $L'' \notin$ FPT, außer wenn $L \in$ P (konstanter Parameter)

Typische Situation: Was wollen wir mit FPT erreichen?

- löse Probleme in NPC halbwegs effizient
- wir betrachten hauptsächlich Probleme in NP
- gute Vorstellung: FPT schlägt eine Brücke zwischen P und NPC

(auch wenn man das formal so nicht sagen kann)



Zusatzhinweis: para-NP

- para-NP ist das Gegenstück zu NP für parametrisierte Probleme
- FPT verhält sich zu para-NP wie P zu NP

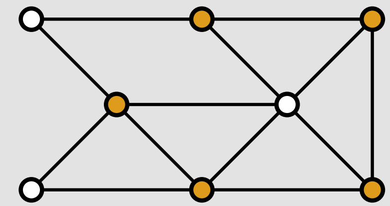
Wiederholung: Beschränkter Suchbaum

Problem: VERTEX COVER

Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.

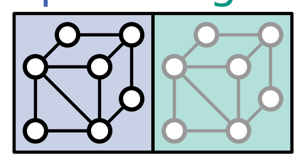
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?

(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



noch zu überdeckender Teilgraph

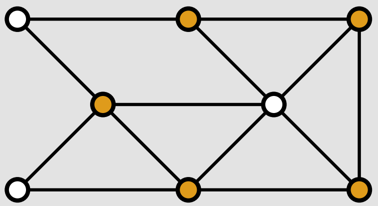
gewählte Knoten & überdeckte Kanten



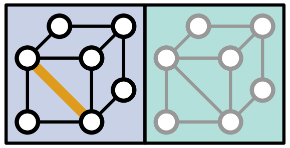
Gibt es ein Vertex Cover mit maximal $k = 3$ Knoten?

Wiederholung: Beschränkter Suchbaum

Problem: Vertex Cover
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



noch zu überdeckender Teilgraph gewählte Knoten & überdeckte Kanten

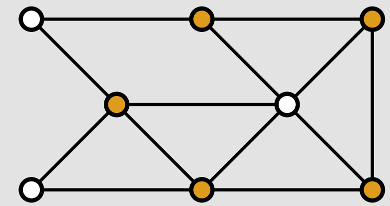


Jede Kante muss noch überdeckt werden $\rightarrow$ wähle eine beliebige

Gibt es ein Vertex Cover mit maximal $k = 3$ Knoten?

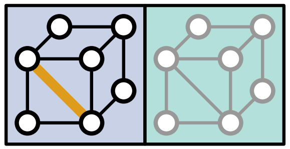
Wiederholung: Beschränkter Suchbaum

Problem: Vertex Cover
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

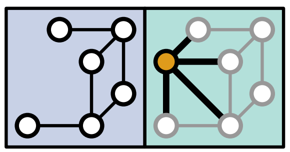


noch zu überdeckender Teilgraph   gewählte Knoten & überdeckte Kanten

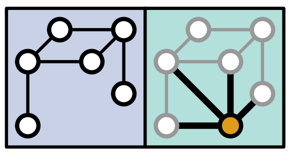
Jede Kante muss noch überdeckt werden $\rightarrow$ wähle eine beliebige



Gibt es ein Vertex Cover mit maximal $k = 3$ Knoten?

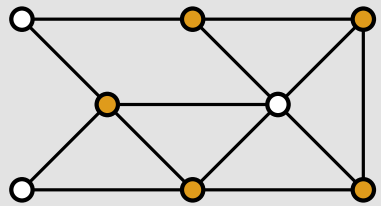


für Kante $\{u, v\}$ muss u oder v enthalten sein
$\rightarrow$ binäre Entscheidung



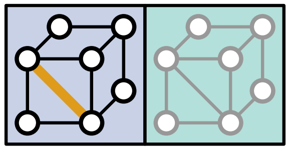
Wiederholung: Beschränkter Suchbaum

Problem: VERTEX COVER
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

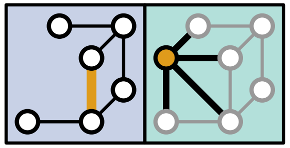


noch zu überdeckender Teilgraph — gewählte Knoten & überdeckte Kanten

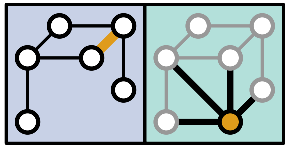
Jede Kante muss noch überdeckt werden $\rightarrow$ wähle eine beliebige



Gibt es ein Vertex Cover mit maximal $k = 3$ Knoten?

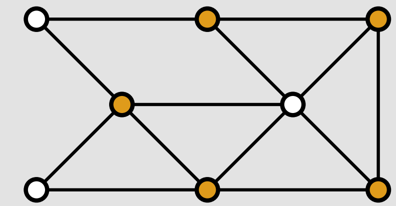


für Kante $\{u, v\}$ muss u oder v enthalten sein
$\rightarrow$ binäre Entscheidung



Wiederholung: Beschränkter Suchbaum

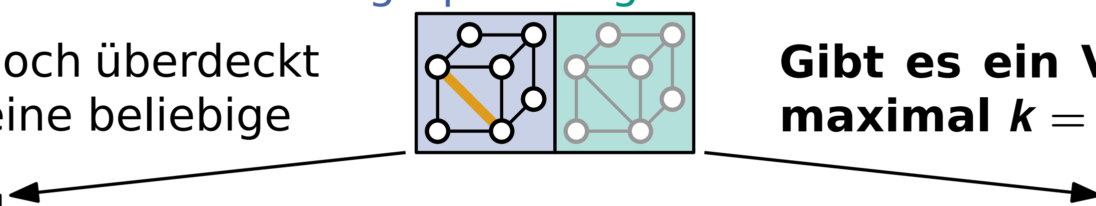
Problem: Vertex Cover
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



noch zu überdeckender Teilgraph

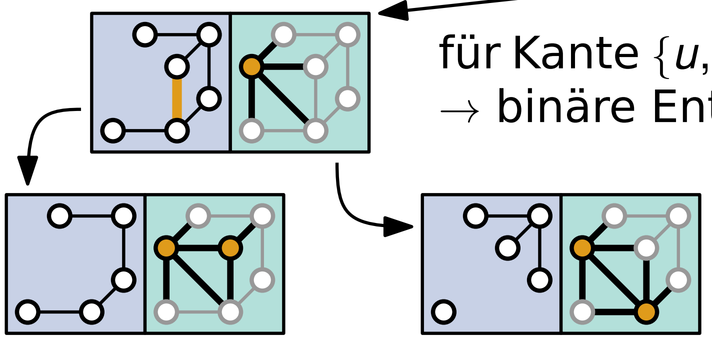
gewählte Knoten & überdeckte Kanten

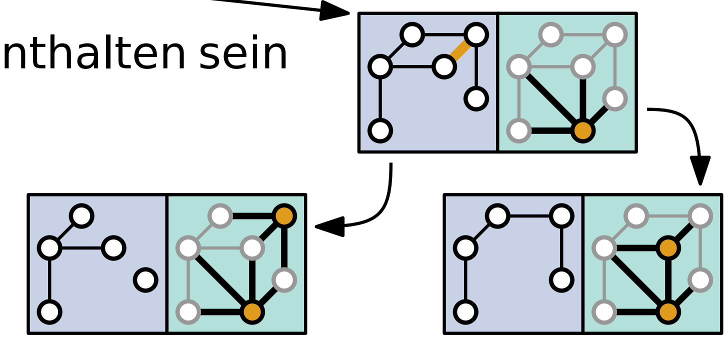
Jede Kante muss noch überdeckt werden $\rightarrow$ wähle eine beliebige



Gibt es ein Vertex Cover mit maximal $k = 3$ Knoten?

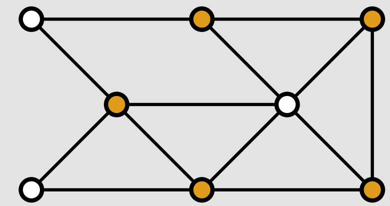
für Kante $\{u, v\}$ muss u oder v enthalten sein
$\rightarrow$ binäre Entscheidung





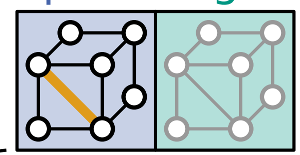
Wiederholung: Beschränkter Suchbaum

Problem: Vertex Cover
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

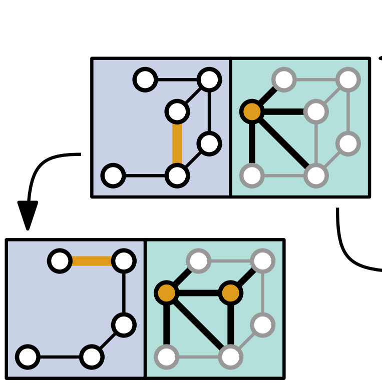


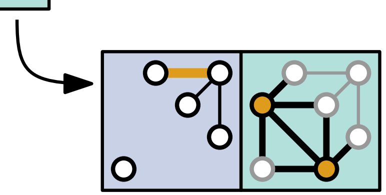
noch zu überdeckender Teilgraph — gewählte Knoten & überdeckte Kanten

Jede Kante muss noch überdeckt werden $\rightarrow$ wähle eine beliebige

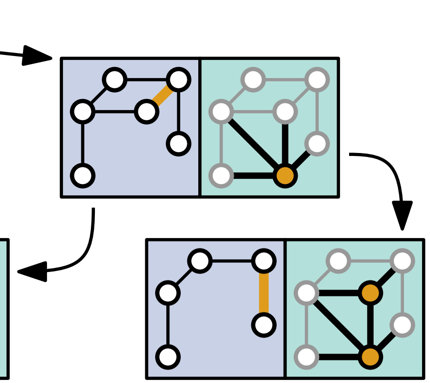


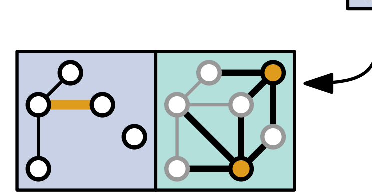
Gibt es ein Vertex Cover mit maximal $k = 3$ Knoten?





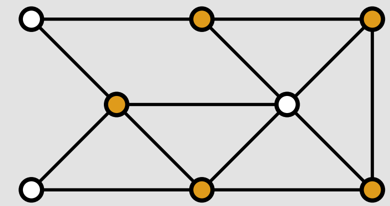
für Kante $\{u, v\}$ muss u oder v enthalten sein
$\rightarrow$ binäre Entscheidung





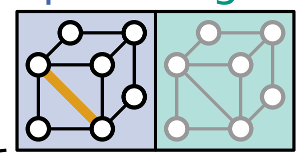
Wiederholung: Beschränkter Suchbaum

Problem: VERTEX COVER
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



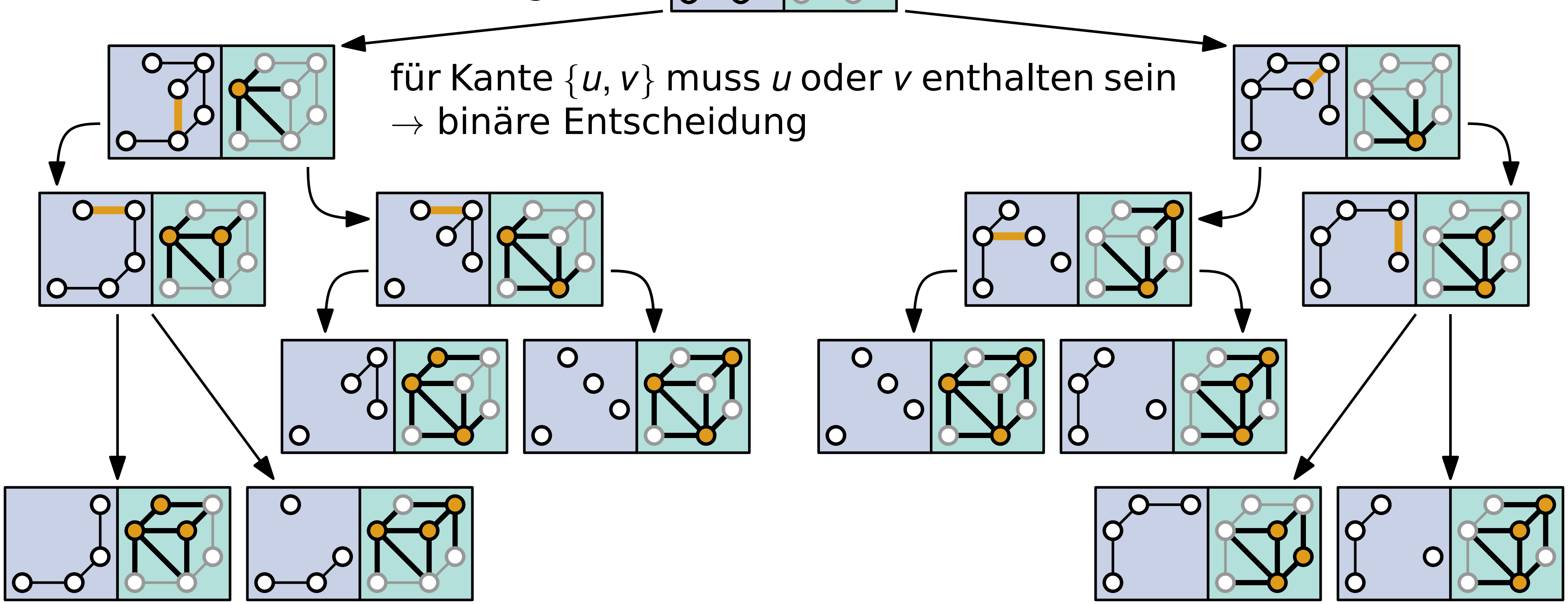
noch zu überdeckender Teilgraph — gewählte Knoten & überdeckte Kanten

Jede Kante muss noch überdeckt werden → wähle eine beliebige



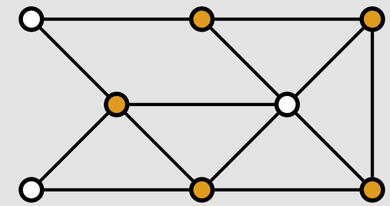
Gibt es ein Vertex Cover mit maximal $k = 3$ Knoten?

für Kante $\{u, v\}$ muss u oder v enthalten sein
→ binäre Entscheidung



Wiederholung: Beschränkter Suchbaum

Problem: Vertex Cover
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

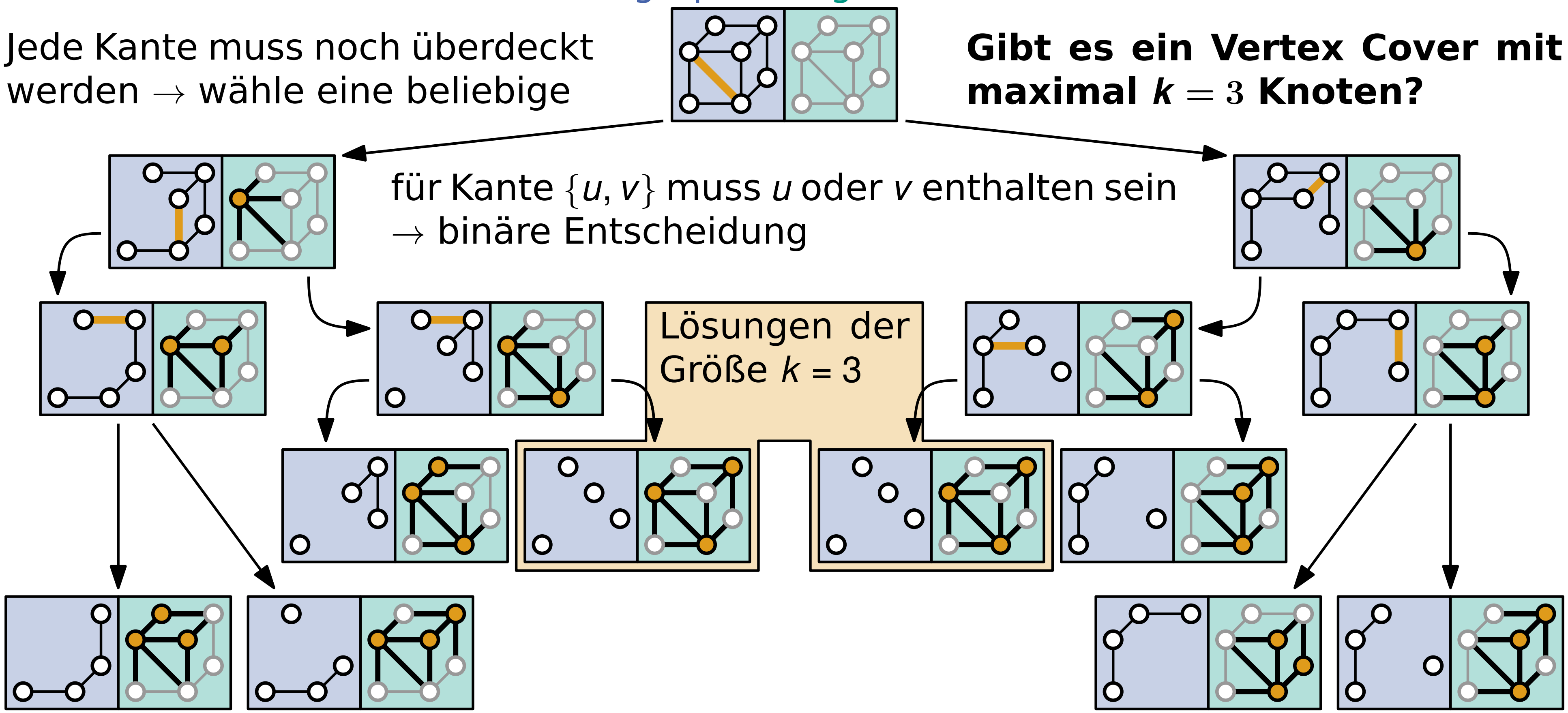


noch zu überdeckender Teilgraph — gewählte Knoten & überdeckte Kanten

Jede Kante muss noch überdeckt werden $\rightarrow$ wähle eine beliebige

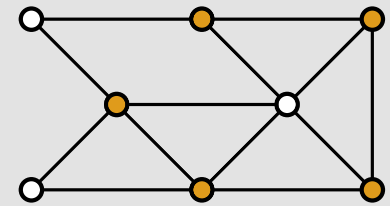
Gibt es ein Vertex Cover mit maximal $k = 3$ Knoten?

für Kante $\{u, v\}$ muss u oder v enthalten sein
$\rightarrow$ binäre Entscheidung



Wiederholung: Beschränkter Suchbaum

Problem: Vertex Cover
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

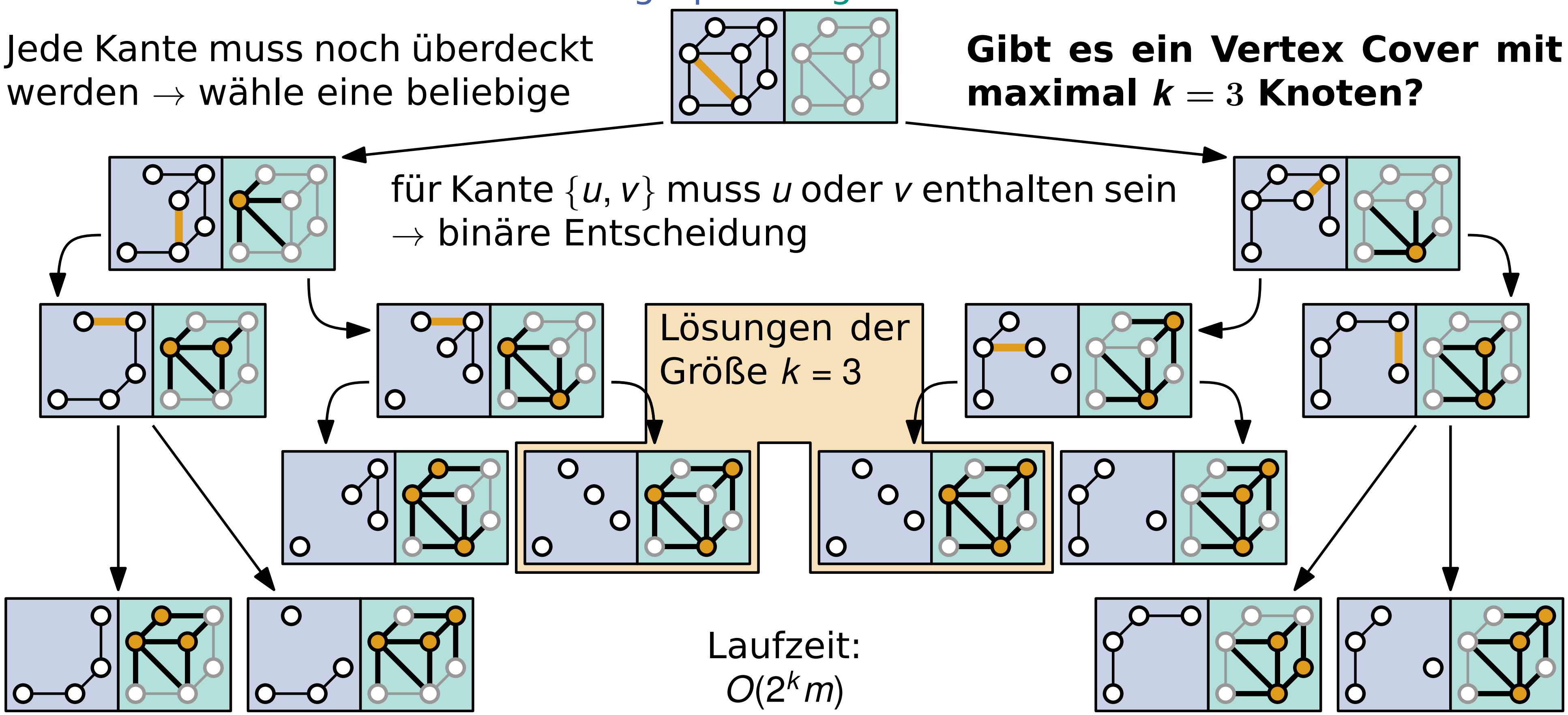


noch zu überdeckender Teilgraph — gewählte Knoten & überdeckte Kanten

Jede Kante muss noch überdeckt werden $\rightarrow$ wähle eine beliebige

Gibt es ein Vertex Cover mit maximal $k = 3$ Knoten?

für Kante $\{u, v\}$ muss u oder v enthalten sein
$\rightarrow$ binäre Entscheidung



Lösungen der Größe $k = 3$

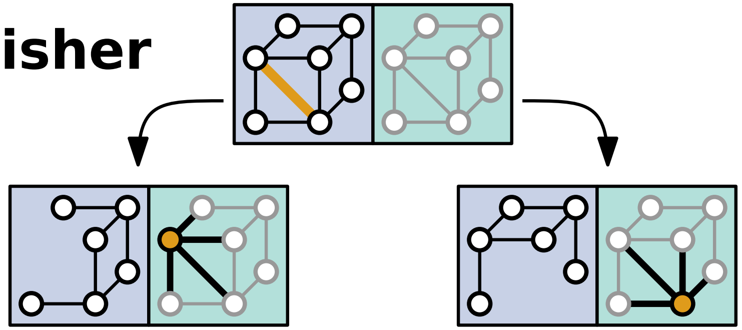
Laufzeit:
$O(2^k m)$

Wiederholung: Beschränkterer Suchbaum

Geht es schneller?

- Ziel: reduziere die Größe des Suchbaums (bisher: 2^k Blätter)
- Verzweigungsregel bisher: für Kante $\{u, v\}$ wähle entweder u oder v

bisher

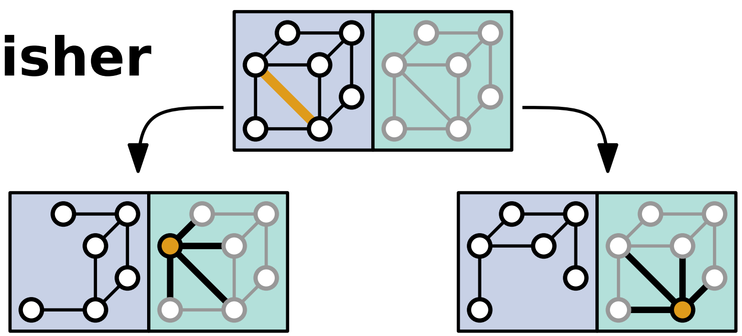


Wiederholung: Beschränkterer Suchbaum

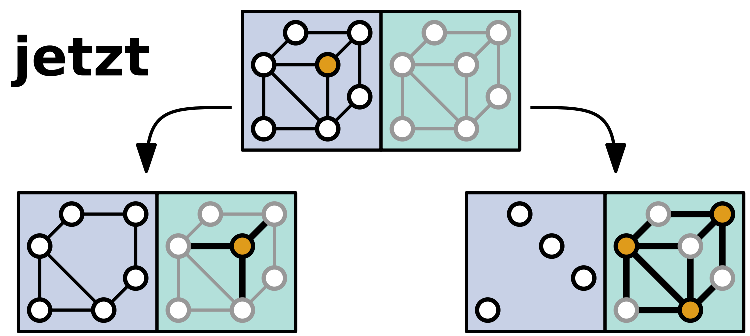
Geht es schneller?

- Ziel: reduziere die Größe des Suchbaums (bisher: 2^k Blätter)
- Verzweigungsregel bisher: für Kante $\{u, v\}$ wähle entweder u oder v
- neue Verzweigungsregel: für Knoten v wähle entweder v oder $N(v)$

bisher



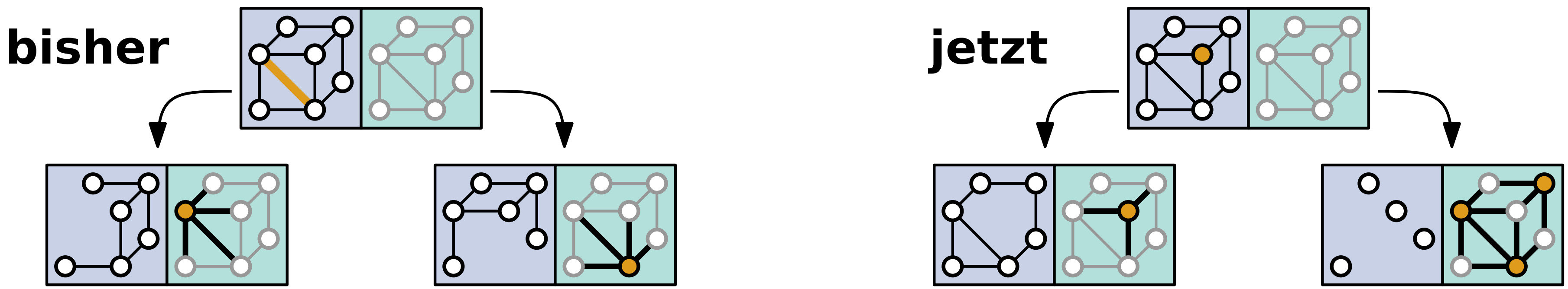
jetzt



Wiederholung: Beschränkterer Suchbaum

Geht es schneller?

- Ziel: reduziere die Größe des Suchbaums (bisher: 2^k Blätter)
- Verzweigungsregel bisher: für Kante $\{u, v\}$ wähle entweder u oder v
- neue Verzweigungsregel: für Knoten v wähle entweder v oder $N(v)$

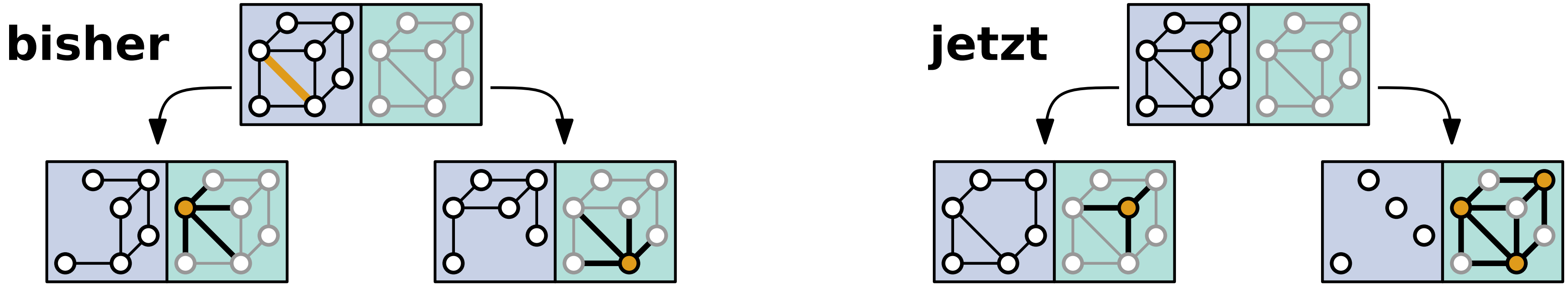


Wie viele Blätter hat der resultierende Baum abhängig von k?

Wiederholung: Beschränkterer Suchbaum

Geht es schneller?

- Ziel: reduziere die Größe des Suchbaums (bisher: 2^k Blätter)
- Verzweigungsregel bisher: für Kante $\{u, v\}$ wähle entweder u oder v
- neue Verzweigungsregel: für Knoten v wähle entweder v oder $N(v)$



Wie viele Blätter hat der resultierende Baum abhängig von k?

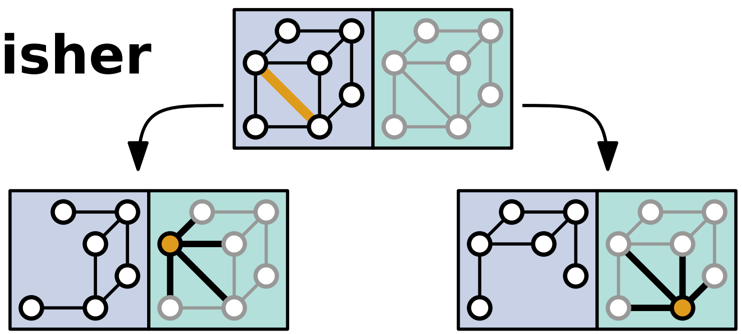
- wähle für v immer einen Knoten mit Grad ≥ 2

Wiederholung: Beschränkterer Suchbaum

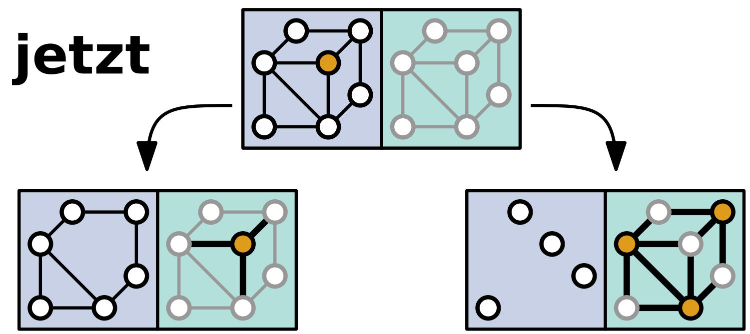
Geht es schneller?

- Ziel: reduziere die Größe des Suchbaums (bisher: 2^k Blätter)
- Verzweigungsregel bisher: für Kante $\{u, v\}$ wähle entweder u oder v
- neue Verzweigungsregel: für Knoten v wähle entweder v oder $N(v)$

bisher



jetzt



Wie viele Blätter hat der resultierende Baum abhängig von k?

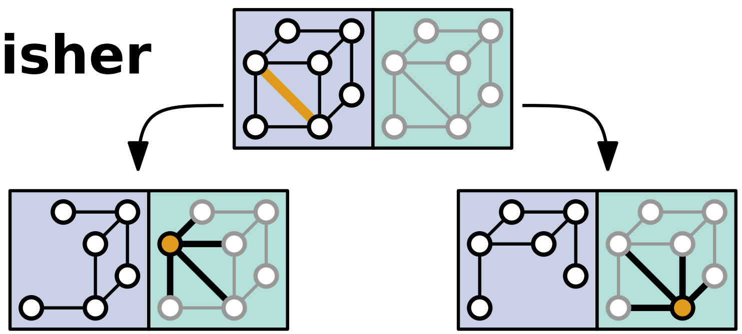
- wähle für v immer einen Knoten mit Grad ≥ 2
- obere Schranke für #Blätter: $T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$

Wiederholung: Beschränkterer Suchbaum

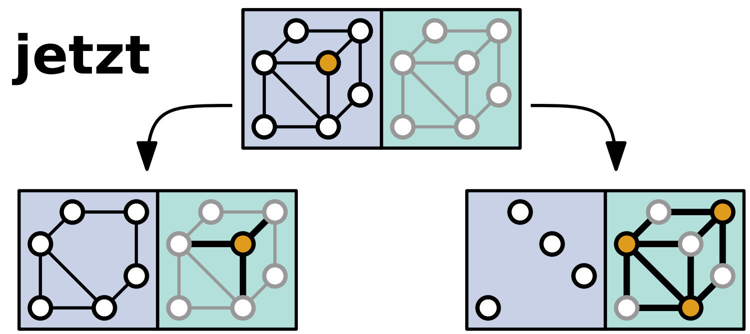
Geht es schneller?

- Ziel: reduziere die Größe des Suchbaums (bisher: 2^k Blätter)
- Verzweigungsregel bisher: für Kante $\{u, v\}$ wähle entweder u oder v
- neue Verzweigungsregel: für Knoten v wähle entweder v oder $N(v)$

bisher



jetzt



Wie viele Blätter hat der resultierende Baum abhängig von k?

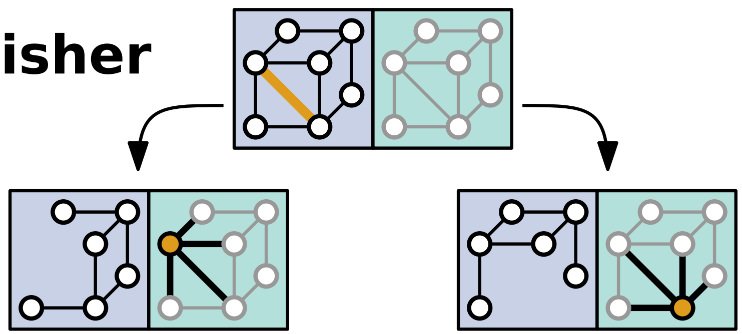
- wähle für v immer einen Knoten mit Grad ≥ 2
- obere Schranke für #Blätter: $T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$
- wir erhalten: $T(k) \leq 1{,}6181^k$

Wiederholung: Beschränkterer Suchbaum

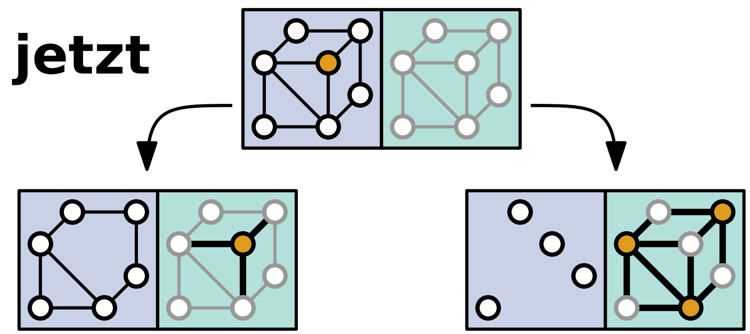
Geht es schneller?

- Ziel: reduziere die Größe des Suchbaums (bisher: 2^k Blätter)
- Verzweigungsregel bisher: für Kante $\{u, v\}$ wähle entweder u oder v
- neue Verzweigungsregel: für Knoten v wähle entweder v oder $N(v)$

bisher



jetzt



Wie viele Blätter hat der resultierende Baum abhängig von k?

- wähle für v immer einen Knoten mit Grad ≥ 2
- obere Schranke für #Blätter: $T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$
- wir erhalten: $T(k) \leq 1{,}6181^k$
- Wie kommt man auf 1,6181? Geht es besser? $\longrightarrow$ heute ~~nächste Vorlesung~~

Verzweigungsvektoren

Karlsruher Institut für Technologie

Allgemeine Verzweigung

- für Instanz (G, k) erzeuge ℓ Kind-Instanzen $(G_1, k_1), \dots, (G_\ell, k_\ell)$
- (G, k) lösbar $\Leftrightarrow$ mindestens eine der Instanzen (G_i, k_i) lösbar

Verzweigungsvektoren

Karlsruher Institut für Technologie

Allgemeine Verzweigung

- für Instanz (G, k) erzeuge ℓ Kind-Instanzen $(G_1, k_1), \dots, (G_\ell, k_\ell)$
- (G, k) lösbar $\Leftrightarrow$ mindestens eine der Instanzen (G_i, k_i) lösbar
- sei $d_i = k - k_i$ (Parameter wird in Kind-Instanz G_i um d_i kleiner)

Verzweigungsvektoren

Allgemeine Verzweigung

- für Instanz (G, k) erzeuge ℓ Kind-Instanzen $(G_1, k_1), \dots, (G_\ell, k_\ell)$
- (G, k) lösbar $\Leftrightarrow$ mindestens eine der Instanzen (G_i, k_i) lösbar
- sei $d_i = k - k_i$ (Parameter wird in Kind-Instanz G_i um d_i kleiner)
- Verzweigungsvektor: $(d_1, \dots, d_\ell)$

Verzweigungsvektoren

Allgemeine Verzweigung

- für Instanz (G, k) erzeuge ℓ Kind-Instanzen $(G_1, k_1), \dots, (G_\ell, k_\ell)$
- (G, k) lösbar $\Leftrightarrow$ mindestens eine der Instanzen (G_i, k_i) lösbar
- sei $d_i = k - k_i$ (Parameter wird in Kind-Instanz G_i um d_i kleiner)
- Verzweigungsvektor: $(d_1, \dots, d_\ell)$

Bisher gesehen

- Verzweigungsvektor $(1, 1) \Rightarrow$ Baumgröße 2^k
- Verzweigungsvektor $(1, 2) \Rightarrow$ Baumgröße $1{,}6181^k$

Verzweigungsvektoren

Karlsruher Institut für Technologie

Allgemeine Verzweigung

- für Instanz (G, k) erzeuge ℓ Kind-Instanzen $(G_1, k_1), \dots, (G_\ell, k_\ell)$
- (G, k) lösbar $\Leftrightarrow$ mindestens eine der Instanzen (G_i, k_i) lösbar
- sei $d_i = k - k_i$ (Parameter wird in Kind-Instanz G_i um d_i kleiner)
- Verzweigungsvektor: $(d_1, \dots, d_\ell)$

Bisher gesehen

- Verzweigungsvektor $(1, 1) \Rightarrow$ Baumgröße 2^k
- Verzweigungsvektor $(1, 2) \Rightarrow$ Baumgröße $1{,}6181^k$

Wie beweist man die Baumgröße?

Verzweigungsvektoren

Allgemeine Verzweigung

- für Instanz (G, k) erzeuge ℓ Kind-Instanzen $(G_1, k_1), \dots, (G_\ell, k_\ell)$
- (G, k) lösbar $\Leftrightarrow$ mindestens eine der Instanzen (G_i, k_i) lösbar
- sei $d_i = k - k_i$ (Parameter wird in Kind-Instanz G_i um d_i kleiner)
- Verzweigungsvektor: $(d_1, \dots, d_\ell)$

Bisher gesehen

- Verzweigungsvektor $(1, 1) \Rightarrow$ Baumgröße 2^k
- Verzweigungsvektor $(1, 2) \Rightarrow$ Baumgröße $1{,}6181^k$

Wie beweist man die Baumgröße?

- rate Basis λ
- zeige $T(k) \leq c \cdot \lambda^k$ mittels Induktion (gleich mehr)

Verzweigungsvektoren

Karlsruher Institut für Technologie

Allgemeine Verzweigung

- für Instanz (G, k) erzeuge ℓ Kind-Instanzen $(G_1, k_1), \dots, (G_\ell, k_\ell)$
- (G, k) lösbar $\Leftrightarrow$ mindestens eine der Instanzen (G_i, k_i) lösbar
- sei $d_i = k - k_i$ (Parameter wird in Kind-Instanz G_i um d_i kleiner)
- Verzweigungsvektor: $(d_1, \dots, d_\ell)$

Bisher gesehen

- Verzweigungsvektor $(1, 1) \Rightarrow$ Baumgröße 2^k
- Verzweigungsvektor $(1, 2) \Rightarrow$ Baumgröße $1{,}6181^k$

Wie beweist man die Baumgröße?

- rate Basis λ
- zeige $T(k) \leq c \cdot \lambda^k$ mittels Induktion (gleich mehr)

Wie rät man die Basis?

- finde Nullstelle eines Polynoms (gleich mehr)
- WolframAlpha hilft beim Lösen

Baumgröße

Beispiel: Verzweigungsvektor (1, 2)

- Rekurrenz:

$$T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Behauptung: $T(k) \leq 1{,}6181^k$

Beweis

Baumgröße

Beispiel: Verzweigungsvektor (1, 2)

- Rekurrenz:

$$T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Behauptung: $T(k) \leq 1{,}6181^k$

Beweis

- I.A.: $k < 2 \Rightarrow T(k) = 1 \leq 1{,}6181^k$

Baumgröße

Beispiel: Verzweigungsvektor (1, 2)

- Rekurrenz:
$$T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$
- Behauptung: $T(k) \leq 1{,}6181^k$

Beweis

- I.A.: $k < 2 \Rightarrow T(k) = 1 \leq 1{,}6181^k$
- I.S.: $T(k) = T(k-1) + T(k-2)$

Baumgröße

Beispiel: Verzweigungsvektor (1, 2)

- Rekurrenz:
$$T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$
- Behauptung: $T(k) \leq 1{,}6181^k$

Beweis

- I.A.: $k < 2 \Rightarrow T(k) = 1 \leq 1{,}6181^k$
- I.S.:
$$\begin{aligned} T(k) &= T(k-1) + T(k-2) \\ &\leq 1{,}6181^{k-1} + 1{,}6181^{k-2} \end{aligned}$$

Baumgröße

Beispiel: Verzweigungsvektor (1, 2)

- Rekurrenz:
$$T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$
- Behauptung: $T(k) \leq 1{,}6181^k$

Beweis

- I.A.: $k < 2 \Rightarrow T(k) = 1 \leq 1{,}6181^k$
- I.S.:
$$\begin{aligned} T(k) &= T(k-1) + T(k-2) \\ &\leq 1{,}6181^{k-1} + 1{,}6181^{k-2} \\ &= 1{,}6181^{k-2} \cdot (1{,}6181 + 1) \end{aligned}$$

Baumgröße

Beispiel: Verzweigungsvektor (1, 2)

- Rekurrenz:
$$T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$
- Behauptung: $T(k) \leq 1{,}6181^k$

Beweis

- I.A.: $k < 2 \Rightarrow T(k) = 1 \leq 1{,}6181^k$
- I.S.:
$$\begin{aligned} T(k) &= T(k-1) + T(k-2) \\ &\leq 1{,}6181^{k-1} + 1{,}6181^{k-2} \\ &= 1{,}6181^{k-2} \cdot \underbrace{(1{,}6181 + 1)}_{\leq 1{,}6181^2 \approx 2{,}6182} \end{aligned}$$

Baumgröße

Beispiel: Verzweigungsvektor (1, 2)

- Rekurrenz:
$$T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$
- Behauptung: $T(k) \leq 1{,}6181^k$

Beweis

- I.A.: $k < 2 \Rightarrow T(k) = 1 \leq 1{,}6181^k$
- I.S.:
$$\begin{aligned} T(k) &= T(k-1) + T(k-2) \\ &\leq 1{,}6181^{k-1} + 1{,}6181^{k-2} \\ &= 1{,}6181^{k-2} \cdot \underbrace{(1{,}6181 + 1)}_{\leq 1{,}6181^2 \approx 2{,}6182} \leq 1{,}6181^k \end{aligned}$$

Basis raten

Beispiel: Verzweigungsvektor (1, 2)

- Rekurrenz:
$$T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$
- finde möglichst kleines $\lambda > 0$, sodass: $T(k) \leq c \cdot \lambda^k$

Basis raten

Beispiel: Verzweigungsvektor (1, 2)

- Rekurrenz:
$$T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$
- finde möglichst kleines $\lambda > 0$, sodass: $T(k) \leq c \cdot \lambda^k$
- wähle λ, sodass: $c \cdot \lambda^{k-1} + c \cdot \lambda^{k-2} \leq c \cdot \lambda^k$

Basis raten

Beispiel: Verzweigungsvektor (1, 2)

- Rekurrenz:
$$T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$
- finde möglichst kleines $\lambda > 0$, sodass: $T(k) \leq c \cdot \lambda^k$
- wähle λ, sodass: $c \cdot \lambda^{k-1} + c \cdot \lambda^{k-2} \leq c \cdot \lambda^k$
  (dann gilt: $T(k) = T(k-1) + T(k-2) \leq c \cdot \lambda^{k-1} + c \cdot \lambda^{k-2} \leq c \cdot \lambda^k$)

Basis raten

Beispiel: Verzweigungsvektor (1, 2)

- Rekurrenz:

$$T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

- finde möglichst kleines $\lambda > 0$, sodass: $T(k) \leq c \cdot \lambda^k$
- wähle λ, sodass: $c \cdot \lambda^{k-1} + c \cdot \lambda^{k-2} \leq c \cdot \lambda^k$
  (dann gilt: $T(k) = T(k-1) + T(k-2) \leq c \cdot \lambda^{k-1} + c \cdot \lambda^{k-2} \leq c \cdot \lambda^k$)
- löse: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

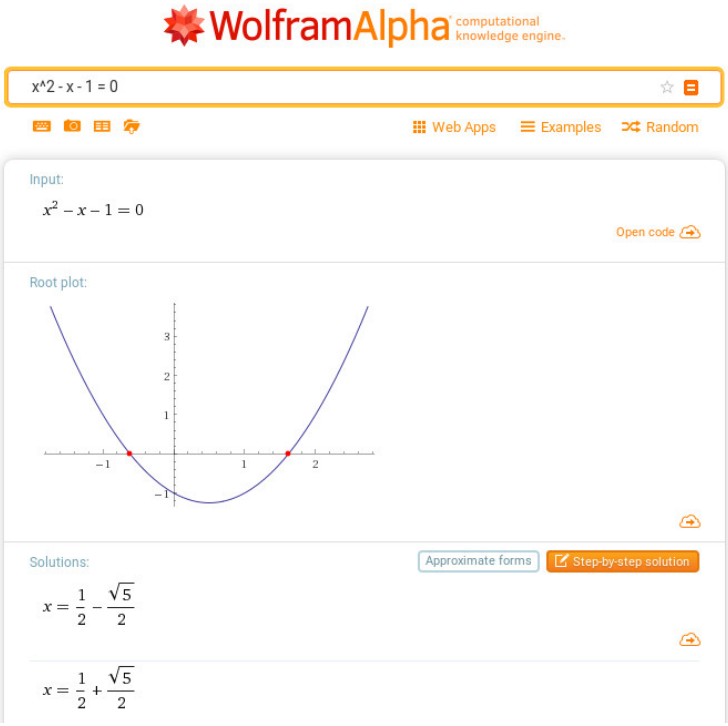
Basis raten

Beispiel: Verzweigungsvektor (1, 2)

- Rekurrenz:

$$T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

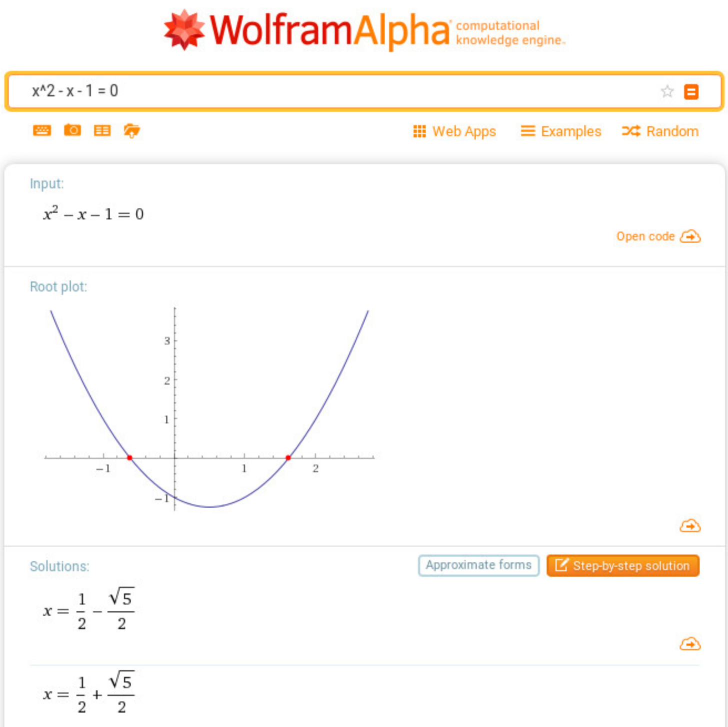
- finde möglichst kleines $\lambda > 0$, sodass: $T(k) \leq c \cdot \lambda^k$
- wähle λ, sodass: $c \cdot \lambda^{k-1} + c \cdot \lambda^{k-2} \leq c \cdot \lambda^k$
  (dann gilt: $T(k) = T(k-1) + T(k-2) \leq c \cdot \lambda^{k-1} + c \cdot \lambda^{k-2} \leq c \cdot \lambda^k$)
- löse: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
- „geratene“ Lösung: $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq 1{,}6181$



Basis raten

Beispiel: Verzweigungsvektor (1, 2)

- Rekurrenz:
$$T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$
- finde möglichst kleines $\lambda > 0$, sodass: $T(k) \leq c \cdot \lambda^k$
- wähle λ, sodass: $c \cdot \lambda^{k-1} + c \cdot \lambda^{k-2} \leq c \cdot \lambda^k$
  (dann gilt: $T(k) = T(k-1) + T(k-2) \leq c \cdot \lambda^{k-1} + c \cdot \lambda^{k-2} \leq c \cdot \lambda^k$)
- löse: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
- „geratene“ Lösung: $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq 1{,}6181$



Allgemein

- Verzweigungsvektor: $(d_1, \ldots, d_\ell)$
- d = Maximum der d_i

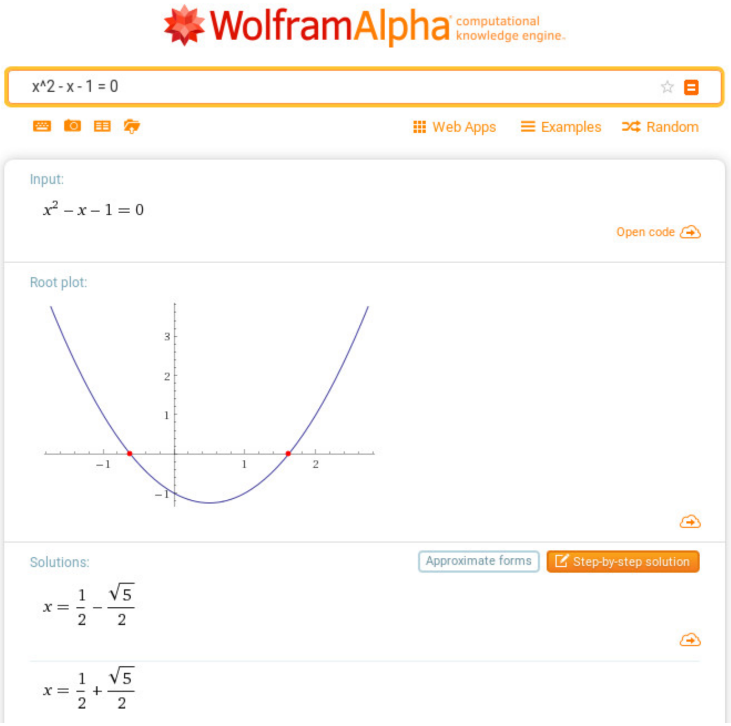
Basis raten

Beispiel: Verzweigungsvektor (1, 2)

- Rekurrenz:

$$T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

- finde möglichst kleines $\lambda > 0$, sodass: $T(k) \leq c \cdot \lambda^k$
- wähle λ, sodass: $c \cdot \lambda^{k-1} + c \cdot \lambda^{k-2} \leq c \cdot \lambda^k$
  (dann gilt: $T(k) = T(k-1) + T(k-2) \leq c \cdot \lambda^{k-1} + c \cdot \lambda^{k-2} \leq c \cdot \lambda^k$)
- löse: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
- „geratene“ Lösung: $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq 1{,}6181$



Allgemein

- Verzweigungsvektor: $(d_1, \dots, d_\ell)$
- d = Maximum der d_i
- löse: $0 = \lambda^d - \lambda^{d-d_1} - \dots - \lambda^{d-d_\ell}$

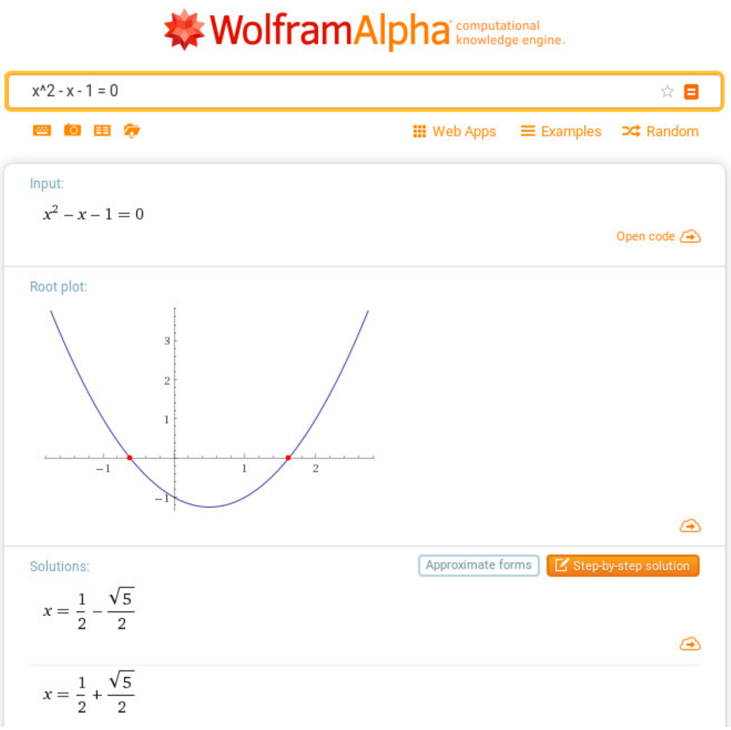
Basis raten

Beispiel: Verzweigungsvektor (1, 2)

- Rekurrenz:

$$T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

- finde möglichst kleines $\lambda > 0$, sodass: $T(k) \leq c \cdot \lambda^k$
- wähle λ, sodass: $c \cdot \lambda^{k-1} + c \cdot \lambda^{k-2} \leq c \cdot \lambda^k$
  (dann gilt: $T(k) = T(k-1) + T(k-2) \leq c \cdot \lambda^{k-1} + c \cdot \lambda^{k-2} \leq c \cdot \lambda^k$)
- löse: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
- „geratene“ Lösung: $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq 1{,}6181$



Allgemein

- Verzweigungsvektor: $(d_1, \ldots, d_\ell)$
- d = Maximum der d_i
- löse: $0 = \lambda^d - \lambda^{d-d_1} - \cdots - \lambda^{d-d_\ell}$
- Beispiel: Verzweigungsvektor $(3, 4, 6)$

Basis raten

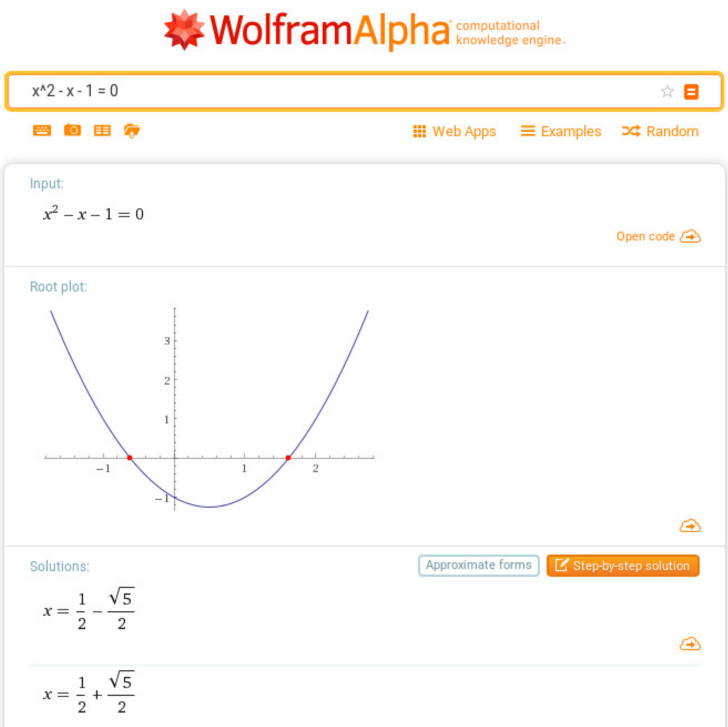
Karlsruher Institut für Technologie

Beispiel: Verzweigungsvektor (1, 2)

- Rekurrenz:

$$T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

- finde möglichst kleines $\lambda > 0$, sodass: $T(k) \leq c \cdot \lambda^k$
- wähle λ, sodass: $c \cdot \lambda^{k-1} + c \cdot \lambda^{k-2} \leq c \cdot \lambda^k$
  (dann gilt: $T(k) = T(k-1) + T(k-2) \leq c \cdot \lambda^{k-1} + c \cdot \lambda^{k-2} \leq c \cdot \lambda^k$)
- löse: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
- „geratene“ Lösung: $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq 1{,}6181$



Allgemein

- Verzweigungsvektor: $(d_1, \ldots, d_\ell)$
- d = Maximum der d_i
- löse: $0 = \lambda^d - \lambda^{d-d_1} - \cdots - \lambda^{d-d_\ell}$
- Beispiel: Verzweigungsvektor $(3, 4, 6)$
- löse: $0 = \lambda^6 - \lambda^3 - \lambda^2 - 1$

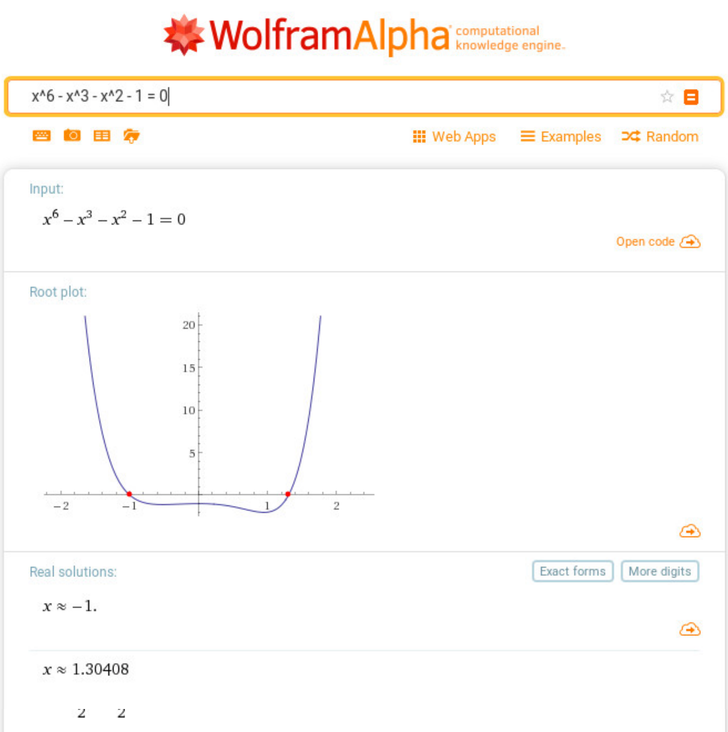
Basis raten

Beispiel: Verzweigungsvektor (1, 2)

- Rekurrenz:

$$T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

- finde möglichst kleines $\lambda > 0$, sodass: $T(k) \leq c \cdot \lambda^k$
- wähle λ, sodass: $c \cdot \lambda^{k-1} + c \cdot \lambda^{k-2} \leq c \cdot \lambda^k$
  (dann gilt: $T(k) = T(k-1) + T(k-2) \leq c \cdot \lambda^{k-1} + c \cdot \lambda^{k-2} \leq c \cdot \lambda^k$)
- löse: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
- „geratene“ Lösung: $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq 1{,}6181$



Allgemein

- Verzweigungsvektor: $(d_1, \ldots, d_\ell)$
- d = Maximum der d_i
- löse: $0 = \lambda^d - \lambda^{d-d_1} - \cdots - \lambda^{d-d_\ell}$
- Beispiel: Verzweigungsvektor $(3, 4, 6)$
- löse: $0 = \lambda^6 - \lambda^3 - \lambda^2 - 1$

Zurück zu VERTEX COVER

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Zurück zu Vertex Cover

Verzweigungsvektor	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(2, 3)	(3, 3)	(3, 3, 6)	(3, 4, 6)
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Bisher gesehen

- für eine Kante uv, wähle u oder v $\rightarrow$ Verzweigungsvektor $(1, 1)$

Zurück zu Vertex Cover

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Bisher gesehen

- für eine Kante uv, wähle u oder v $\rightarrow$ Verzweigungsvektor $(1,1)$
- für Knoten v mit $\deg(v) \geq 2$, wähle v oder $N(v)$ $\rightarrow$ Vektor $(1,2)$

Zurück zu Vertex Cover

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Bisher gesehen

- für eine Kante uv, wähle u oder v $\rightarrow$ Verzweigungsvektor $(1,1)$
- für Knoten v mit $\deg(v) \geq 2$, wähle v oder $N(v)$ $\rightarrow$ Vektor $(1,2)$

Warum gibt es immer einen Knoten v mit $\deg(v) \geq 2$?

Zurück zu Vertex Cover

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Bisher gesehen

- für eine Kante uv, wähle u oder v $\rightarrow$ Verzweigungsvektor $(1,1)$
- für Knoten v mit $\deg(v) \geq 2$, wähle v oder $N(v)$ $\rightarrow$ Vektor $(1,2)$

Warum gibt es immer einen Knoten v mit $\deg(v) \geq 2$?

Geht es besser?

Zurück zu Vertex Cover

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Bisher gesehen

- für eine Kante uv, wähle u oder v $\rightarrow$ Verzweigungsvektor $(1,1)$
- für Knoten v mit $\deg(v) \geq 2$, wähle v oder $N(v)$ $\rightarrow$ Vektor $(1,2)$

Warum gibt es immer einen Knoten v mit $\deg(v) \geq 2$?

Geht es besser?

- gibt es auch immer ein $v \in V$ mit $\deg(v) \geq 3$?

Zurück zu Vertex Cover

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

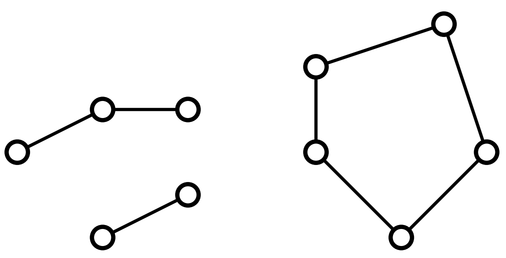
Bisher gesehen

- für eine Kante uv, wähle u oder v $\rightarrow$ Verzweigungsvektor $(1,1)$
- für Knoten v mit $\deg(v) \geq 2$, wähle v oder $N(v)$ $\rightarrow$ Vektor $(1,2)$

Warum gibt es immer einen Knoten v mit $\deg(v) \geq 2$?

Geht es besser?

- gibt es auch immer ein $v \in V$ mit $\deg(v) \geq 3$?
- falls nicht: G besteht aus Pfaden und Kreisen



Zurück zu VERTEX COVER

Verzweigungsvektor	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(2, 3)	(3, 3)	(3, 3, 6)	(3, 4, 6)
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

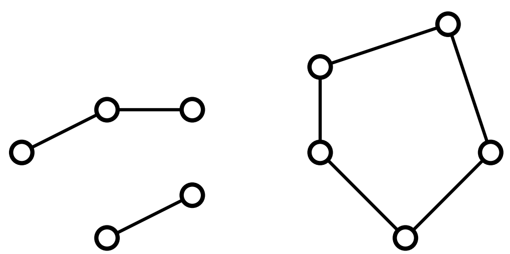
Bisher gesehen

- für eine Kante uv, wähle u oder v $\rightarrow$ Verzweigungsvektor $(1, 1)$
- für Knoten v mit $\deg(v) \geq 2$, wähle v oder $N(v)$ $\rightarrow$ Vektor $(1, 2)$

Warum gibt es immer einen Knoten v mit $\deg(v) \geq 2$?

Geht es besser?

- gibt es auch immer ein $v \in V$ mit $\deg(v) \geq 3$?
- falls nicht: G besteht aus Pfaden und Kreisen
- $\deg(v) \leq 2$ für alle $v \in V \Rightarrow$ in poly-Zeit lösbar



Zurück zu Vertex Cover

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

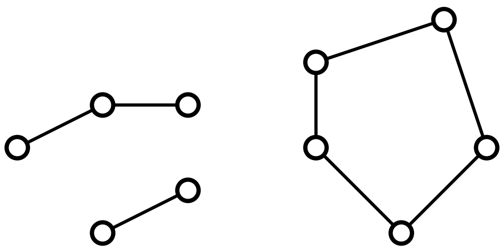
Bisher gesehen

- für eine Kante uv, wähle u oder v $\rightarrow$ Verzweigungsvektor $(1,1)$
- für Knoten v mit $\deg(v) \geq 2$, wähle v oder $N(v)$ $\rightarrow$ Vektor $(1,2)$

Warum gibt es immer einen Knoten v mit $\deg(v) \geq 2$?

Geht es besser?

- gibt es auch immer ein $v \in V$ mit $\deg(v) \geq 3$?
- falls nicht: G besteht aus Pfaden und Kreisen
- $\deg(v) \leq 2$ für alle $v \in V \Rightarrow$ in poly-Zeit lösbar
- also: für Knoten v mit $\deg(v) \geq 3$, wähle v oder $N(v)$ $\rightarrow$ Vektor $(1,3)$



Zurück zu VERTEX COVER

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

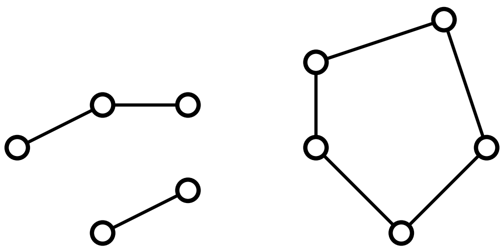
Bisher gesehen

- für eine Kante uv, wähle u oder v $\rightarrow$ Verzweigungsvektor $(1,1)$
- für Knoten v mit $\deg(v) \geq 2$, wähle v oder $N(v)$ $\rightarrow$ Vektor $(1,2)$

Warum gibt es immer einen Knoten v mit $\deg(v) \geq 2$?

Geht es besser?

- gibt es auch immer ein $v \in V$ mit $\deg(v) \geq 3$?
- falls nicht: G besteht aus Pfaden und Kreisen
- $\deg(v) \leq 2$ für alle $v \in V \Rightarrow$ in poly-Zeit lösbar
- also: für Knoten v mit $\deg(v) \geq 3$, wähle v oder $N(v)$ $\rightarrow$ Vektor $(1,3)$



Geht es noch besser?

Zurück zu Vertex Cover

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

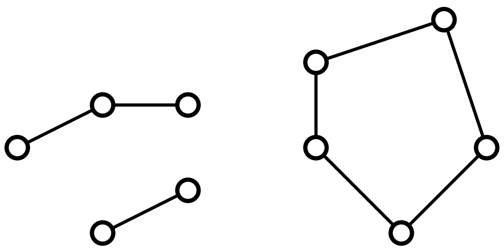
Bisher gesehen

- für eine Kante uv, wähle u oder v $\rightarrow$ Verzweigungsvektor $(1,1)$
- für Knoten v mit $\deg(v) \geq 2$, wähle v oder $N(v)$ $\rightarrow$ Vektor $(1,2)$

Warum gibt es immer einen Knoten v mit $\deg(v) \geq 2$?

Geht es besser?

- gibt es auch immer ein $v \in V$ mit $\deg(v) \geq 3$?
- falls nicht: G besteht aus Pfaden und Kreisen
- $\deg(v) \leq 2$ für alle $v \in V \Rightarrow$ in poly-Zeit lösbar
- also: für Knoten v mit $\deg(v) \geq 3$, wähle v oder $N(v)$ $\rightarrow$ Vektor $(1,3)$



Geht es noch besser?

- Vertex Cover ist NP-schwer für Graphen mit Maximalgrad 3

Zurück zu VERTEX COVER

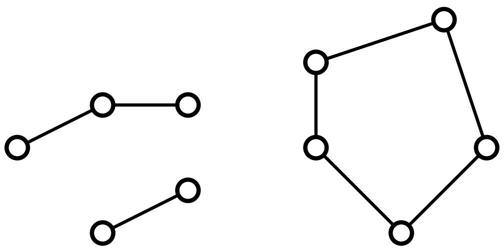
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Bisher gesehen

- für eine Kante uv, wähle u oder v $\rightarrow$ Verzweigungsvektor $(1, 1)$
- für Knoten v mit $\deg(v) \geq 2$, wähle v oder $N(v)$ $\rightarrow$ Vektor $(1, 2)$

Warum gibt es immer einen Knoten v mit $\deg(v) \geq 2$?

Geht es besser?



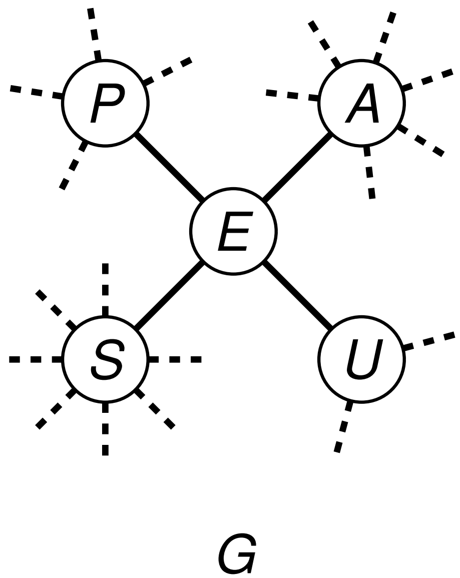
- gibt es auch immer ein $v \in V$ mit $\deg(v) \geq 3$?
- falls nicht: G besteht aus Pfaden und Kreisen
- $\deg(v) \leq 2$ für alle $v \in V$ $\Rightarrow$ in poly-Zeit lösbar
- also: für Knoten v mit $\deg(v) \geq 3$, wähle v oder $N(v)$ $\rightarrow$ Vektor $(1, 3)$

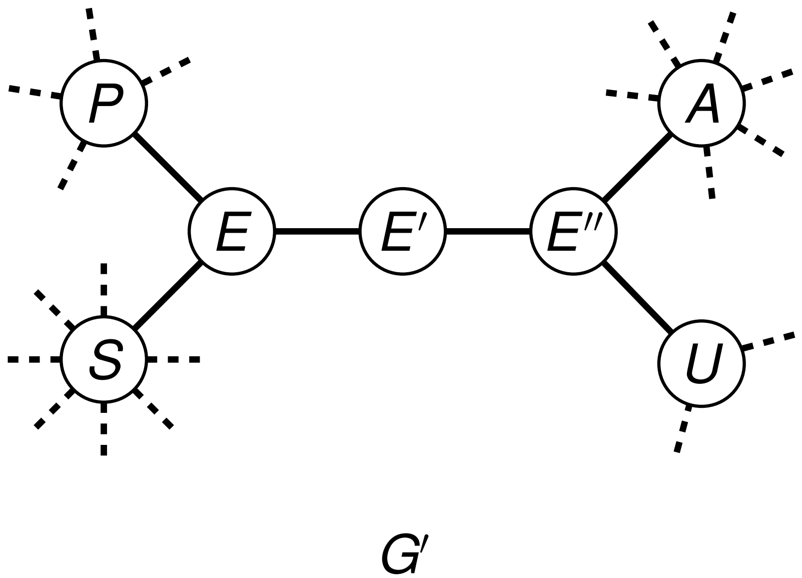
Geht es noch besser?

- VERTEX COVER ist NP-schwer für Graphen mit Maximalgrad 3
- Verzweigungsvektor $(1, 4)$ erhält man nicht genauso leicht

Was passiert hier?

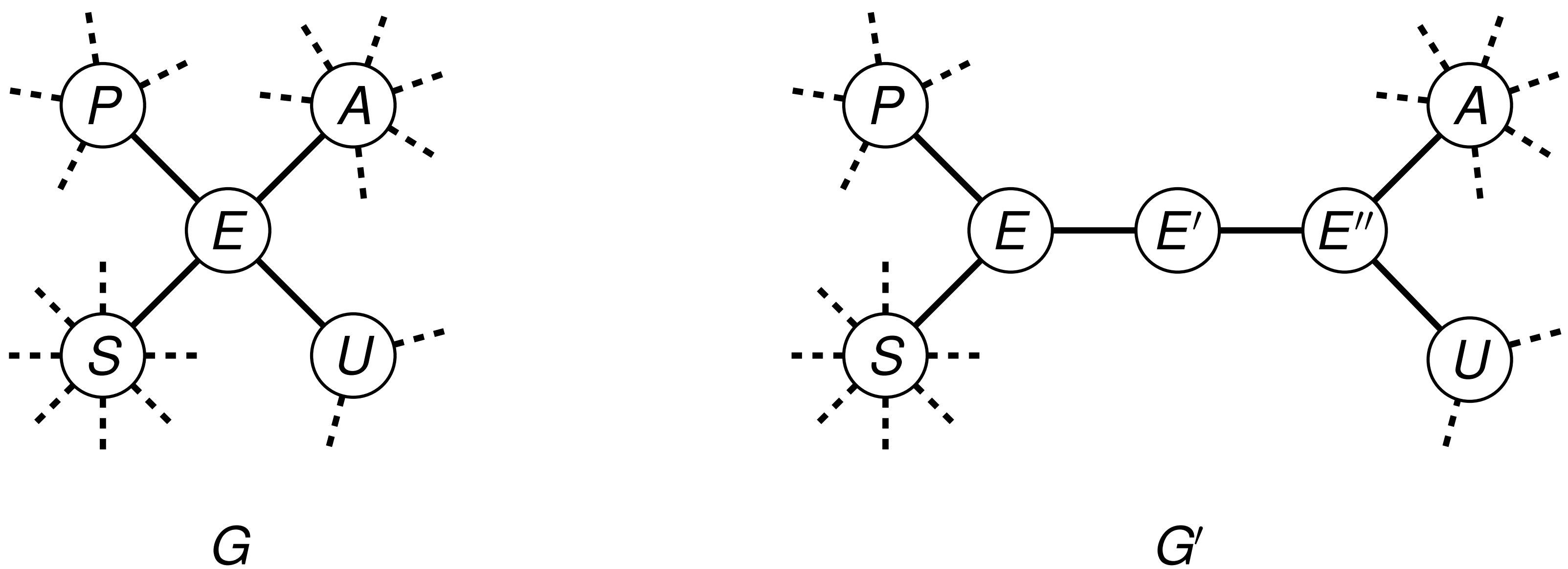
Was erreicht man mit der folgenden Konstruktion?





Was passiert hier?

Was erreicht man mit der folgenden Konstruktion?

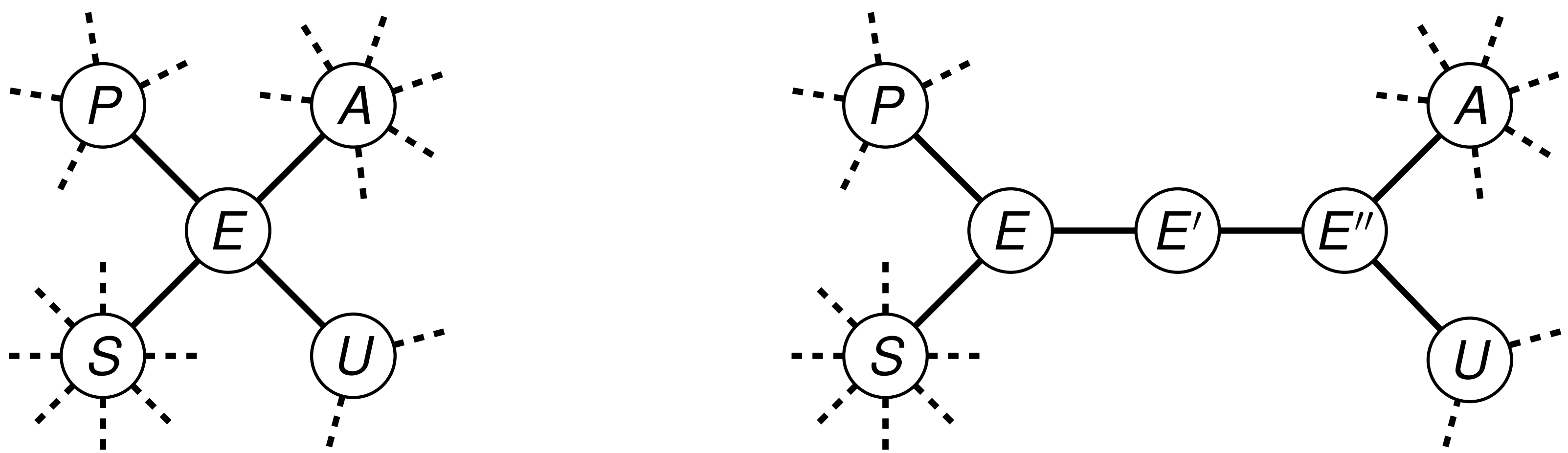


Antwort

- G hat VC der Größe $k \Leftrightarrow G'$ hat VC der Größe $k+1$

Was passiert hier?

Was erreicht man mit der folgenden Konstruktion?



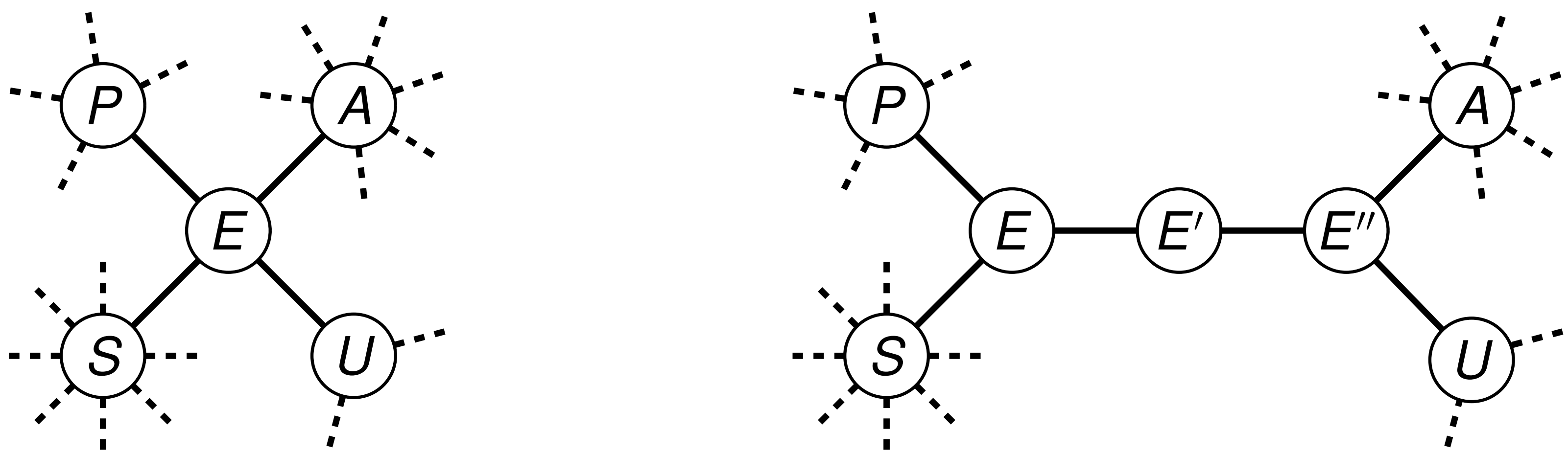
G $\qquad\qquad$ G'

Antwort

- G hat VC der Größe $k \Leftrightarrow G'$ hat VC der Größe $k+1$
- Grad von E wurde von 4 auf 3 reduziert

Was passiert hier?

Was erreicht man mit der folgenden Konstruktion?



G $\qquad\qquad$ G'

Antwort

- G hat VC der Größe $k \Leftrightarrow G'$ hat VC der Größe $k+1$
- Grad von E wurde von 4 auf 3 reduziert
- lässt sich auf höhere Grade verallgemeinern
- man kann so also zeigen, dass Vertex Cover für Graphen mit Maximalgrad 3 NP-schwer ist

Lieber eliminieren als ignorieren

Knoten mit kleinem Grad

- eben: ignoriere Knoten v wenn $\deg(v) = 1$ bzw. $\deg(v) = 2$
- jetzt: eliminiere solche Knoten

Lieber eliminieren als ignorieren

Knoten mit kleinem Grad

- eben: ignoriere Knoten v wenn $\deg(v) = 1$ bzw. $\deg(v) = 2$
- jetzt: eliminiere solche Knoten

Warum sollte das besser sein?

Lieber eliminieren als ignorieren

Knoten mit kleinem Grad

- eben: ignoriere Knoten v wenn $\deg(v) = 1$ bzw. $\deg(v) = 2$
- jetzt: eliminiere solche Knoten

Warum sollte das besser sein?

- Instanz verkleinern ist immer gut

Lieber eliminieren als ignorieren

Knoten mit kleinem Grad

- eben: ignoriere Knoten v wenn $\deg(v) = 1$ bzw. $\deg(v) = 2$
- jetzt: eliminiere solche Knoten

Warum sollte das besser sein?

- Instanz verkleinern ist immer gut
- schränkt im weiteren Verlauf die Klasse der möglichen Instanzen ein

(für $v \in V$ gilt $\deg(v) \geq 3$)

Lieber eliminieren als ignorieren

Knoten mit kleinem Grad

- eben: ignoriere Knoten v wenn $\deg(v) = 1$ bzw. $\deg(v) = 2$
- jetzt: eliminiere solche Knoten

Warum sollte das besser sein?

- Instanz verkleinern ist immer gut
- schränkt im weiteren Verlauf die Klasse der möglichen Instanzen ein
- hilft bei der Argumentation für spätere Fälle (für $v \in V$ gilt $\deg(v) \geq 3$)

Lieber eliminieren als ignorieren

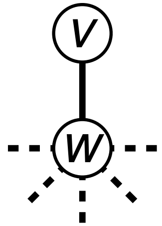
Knoten mit kleinem Grad

- eben: ignoriere Knoten v wenn $\deg(v) = 1$ bzw. $\deg(v) = 2$
- jetzt: eliminiere solche Knoten

Warum sollte das besser sein?

- Instanz verkleinern ist immer gut
- schränkt im weiteren Verlauf die Klasse der möglichen Instanzen ein
- hilft bei der Argumentation für spätere Fälle (für $v \in V$ gilt $\deg(v) \geq 3$)

Regel 1: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 1$



Lieber eliminieren als ignorieren

Knoten mit kleinem Grad

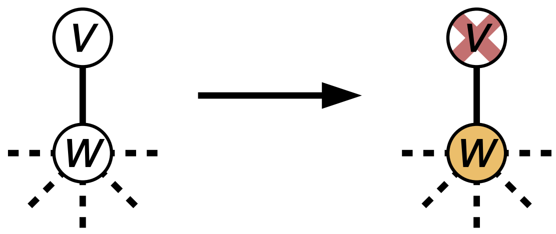
- eben: ignoriere Knoten v wenn $\deg(v) = 1$ bzw. $\deg(v) = 2$
- jetzt: eliminiere solche Knoten

Warum sollte das besser sein?

- Instanz verkleinern ist immer gut
- schränkt im weiteren Verlauf die Klasse der möglichen Instanzen ein
- hilft bei der Argumentation für spätere Fälle (für $v \in V$ gilt $\deg(v) \geq 3$)

Regel 1: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 1$

- es ist nie sinnvoll v zu wählen
- wähle also Nachbarn w von v



Lieber eliminieren als ignorieren

Knoten mit kleinem Grad

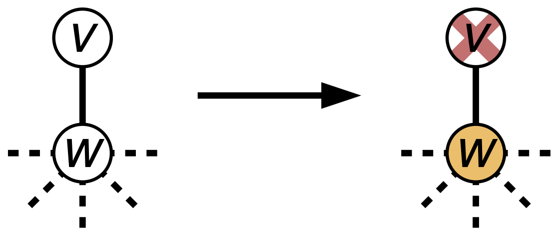
- eben: ignoriere Knoten v wenn $\deg(v) = 1$ bzw. $\deg(v) = 2$
- jetzt: eliminiere solche Knoten

Warum sollte das besser sein?

- Instanz verkleinern ist immer gut
- schränkt im weiteren Verlauf die Klasse der möglichen Instanzen ein
- hilft bei der Argumentation für spätere Fälle (für $v \in V$ gilt $\deg(v) \geq 3$)

Regel 1: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 1$

- es ist nie sinnvoll v zu wählen
- wähle also Nachbarn w von v

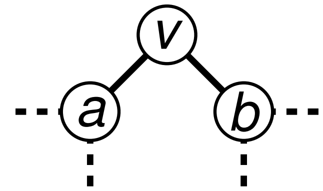


Beachte

- das ist nicht wirklich eine Verzweigungsregel, sondern eine Reduktionsregel (bzw. Verzweigung mit Vektor (1))
- verschlechtert die Basis in der Laufzeit aber sicher nicht

Knoten mit Grad 2

Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$ (sei $N(v) = \{a, b\}$)

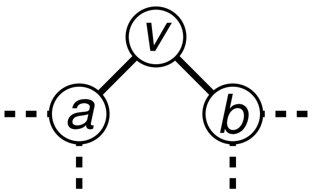


Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 2

Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$ (sei $N(v) = \{a, b\}$)

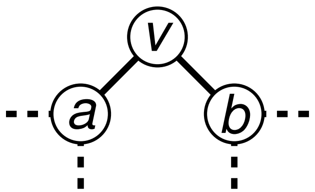
- falls a gewählt wird, macht es keinen Sinn v zu wählen



Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 2

Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$ (sei $N(v) = \{a, b\}$)

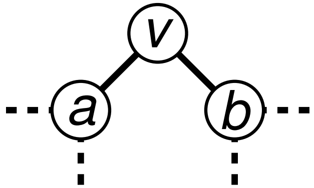


- falls a gewählt wird, macht es keinen Sinn v zu wählen
- wähle entweder a und b oder keinen der beiden

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 2

Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$ (sei $N(v) = \{a, b\}$)



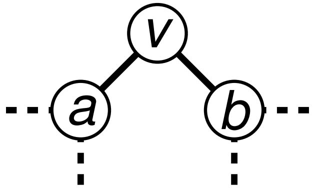
- falls a gewählt wird, macht es keinen Sinn v zu wählen
- wähle entweder a und b oder keinen der beiden
- keinen der beiden ist problematisch, wenn $ab \in E$

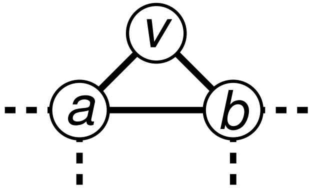
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 2

Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$ (sei $N(v) = \{a, b\}$)

- falls a gewählt wird, macht es keinen Sinn v zu wählen
- wähle entweder a und b oder keinen der beiden
- keinen der beiden ist problematisch, wenn $ab \in E$





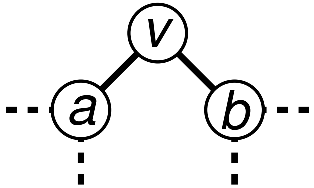
Fall 2.1: $ab \in E$

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 2

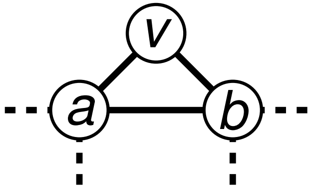
Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$ (sei $N(v) = \{a, b\}$)

- falls a gewählt wird, macht es keinen Sinn v zu wählen
- wähle entweder a und b oder keinen der beiden
- keinen der beiden ist problematisch, wenn $ab \in E$



Fall 2.1: $ab \in E$

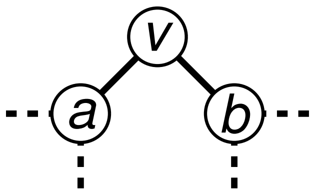
- zwei der drei Knoten müssen gewählt werden



Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

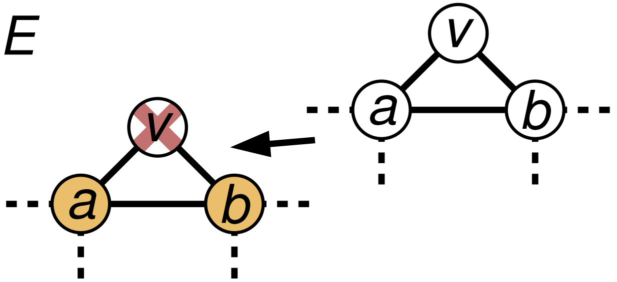
Knoten mit Grad 2

Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$ (sei $N(v) = \{a, b\}$)



- falls a gewählt wird, macht es keinen Sinn v zu wählen
- wähle entweder a und b oder keinen der beiden
- keinen der beiden ist problematisch, wenn $ab \in E$

Fall 2.1: $ab \in E$



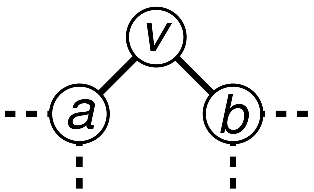
- zwei der drei Knoten müssen gewählt werden
- es ist immer besser a und b zu wählen

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 2

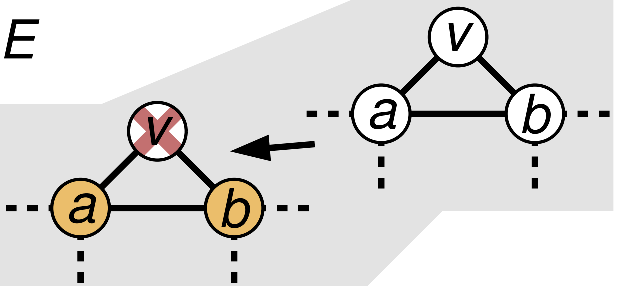
Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$ (sei $N(v) = \{a, b\}$)

- falls a gewählt wird, macht es keinen Sinn v zu wählen
- wähle entweder a und b oder keinen der beiden
- keinen der beiden ist problematisch, wenn $ab \in E$



Fall 2.1: $ab \in E$

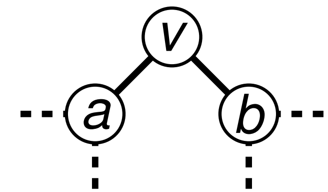
- zwei der drei Knoten müssen gewählt werden
- es ist immer besser a und b zu wählen
- keine Verzweigung nötig



Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 2

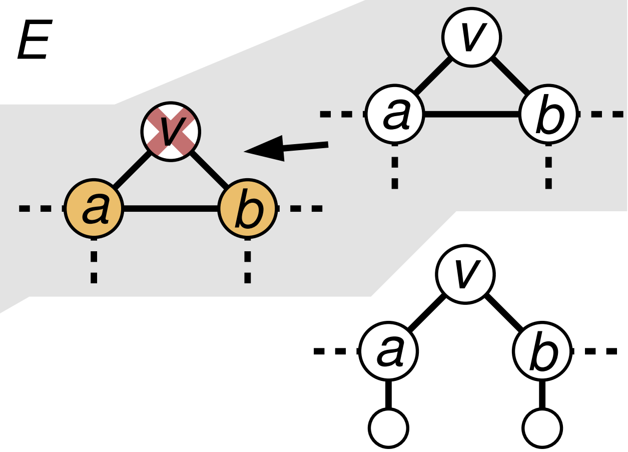
Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$ (sei $N(v) = \{a, b\}$)



- falls a gewählt wird, macht es keinen Sinn v zu wählen
- wähle entweder a und b oder keinen der beiden
- keinen der beiden ist problematisch, wenn $ab \in E$

Fall 2.1: $ab \in E$

- zwei der drei Knoten müssen gewählt werden
- es ist immer besser a und b zu wählen
- keine Verzweigung nötig



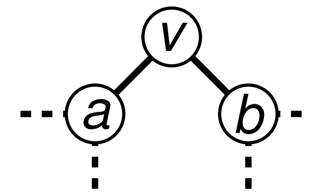
Fall 2.2: $|N(a) \cup N(b)| \geq 3$

- Bsp: a und b haben je einen anderen Nachbarn

Verzweigungsvektor	$(1, 1)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(1, 4)$	$(1, 5)$	$(2, 3)$	$(3, 3)$	$(3, 3, 6)$	$(3, 4, 6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

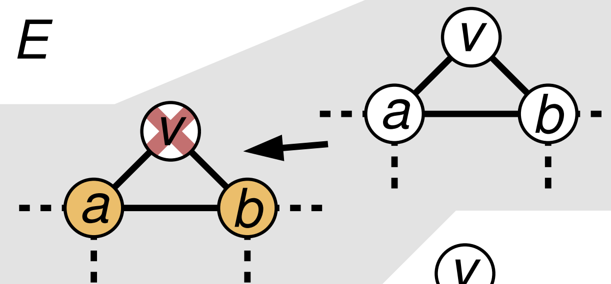
Knoten mit Grad 2

Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$ (sei $N(v) = \{a, b\}$)



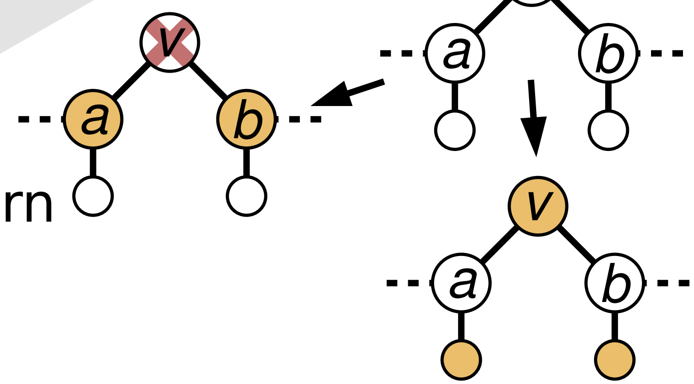
- falls a gewählt wird, macht es keinen Sinn v zu wählen
- wähle entweder a und b oder keinen der beiden
- keinen der beiden ist problematisch, wenn $ab \in E$

Fall 2.1: $ab \in E$



- zwei der drei Knoten müssen gewählt werden
- es ist immer besser a und b zu wählen
- keine Verzweigung nötig

Fall 2.2: $|N(a) \cup N(b)| \geq 3$



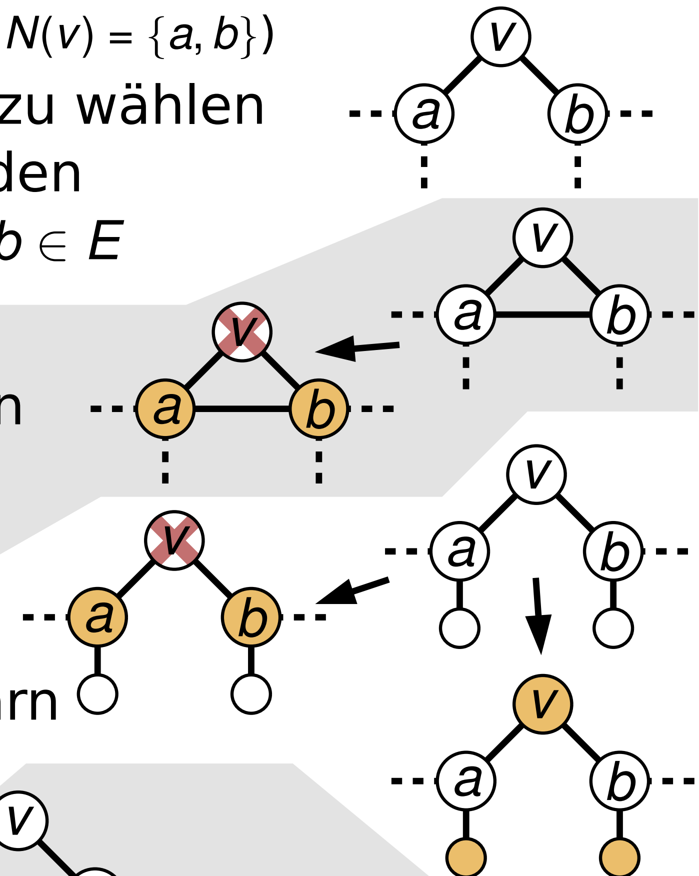
- Bsp: a und b haben je einen anderen Nachbarn
- wähle $\{a, b\}$ oder $N(a) \cup N(b) \to$ Vektor $(2, 3)$

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 2

Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$ (sei $N(v) = \{a, b\}$)

- falls a gewählt wird, macht es keinen Sinn v zu wählen
- wähle entweder a und b oder keinen der beiden
- keinen der beiden ist problematisch, wenn $ab \in E$



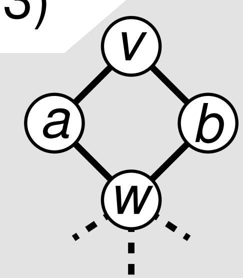
Fall 2.1: $ab \in E$

- zwei der drei Knoten müssen gewählt werden
- es ist immer besser a und b zu wählen
- keine Verzweigung nötig

Fall 2.2: $|N(a) \cup N(b)| \geq 3$

- Bsp: a und b haben je einen anderen Nachbarn
- wähle $\{a, b\}$ oder $N(a) \cup N(b)$ $\rightarrow$ Vektor $(2, 3)$

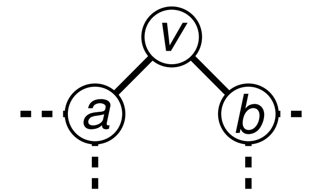
Fall 2.3: $N(a) \cup N(b) = \{v, w\}$



Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

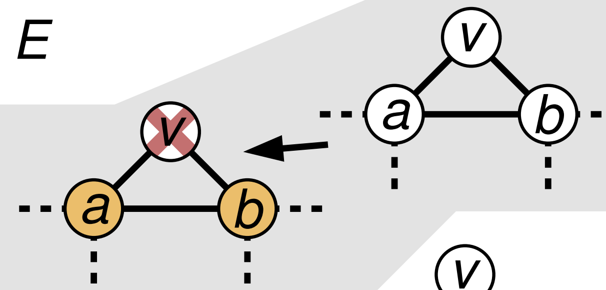
Knoten mit Grad 2

Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$ (sei $N(v) = \{a, b\}$)



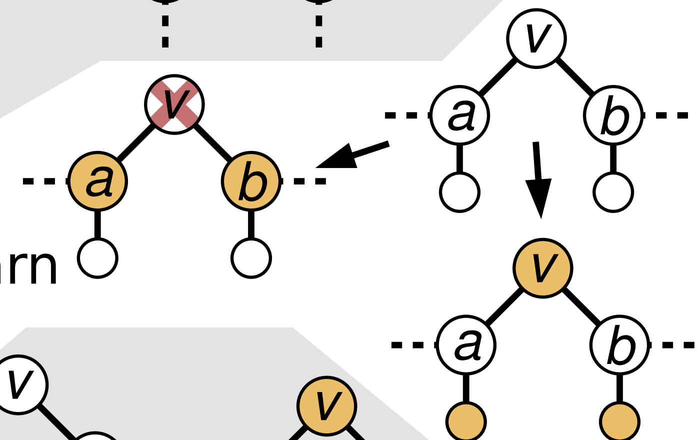
- falls a gewählt wird, macht es keinen Sinn v zu wählen
- wähle entweder a und b oder keinen der beiden
- keinen der beiden ist problematisch, wenn $ab \in E$

Fall 2.1: $ab \in E$



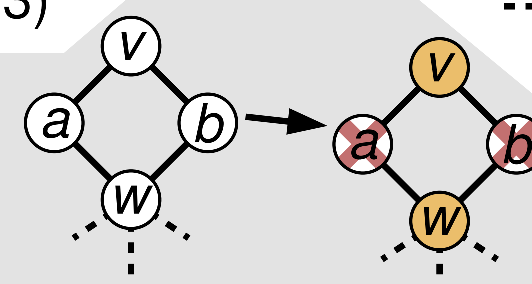
- zwei der drei Knoten müssen gewählt werden
- es ist immer besser a und b zu wählen
- keine Verzweigung nötig

Fall 2.2: $|N(a) \cup N(b)| \geq 3$



- Bsp: a und b haben je einen anderen Nachbarn
- wähle $\{a, b\}$ oder $N(a) \cup N(b) \rightarrow$ Vektor $(2, 3)$

Fall 2.3: $N(a) \cup N(b) = \{v, w\}$

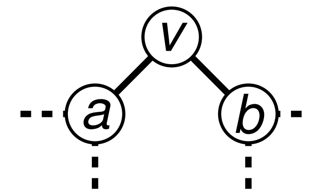


- es ist immer besser v und w zu wählen

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

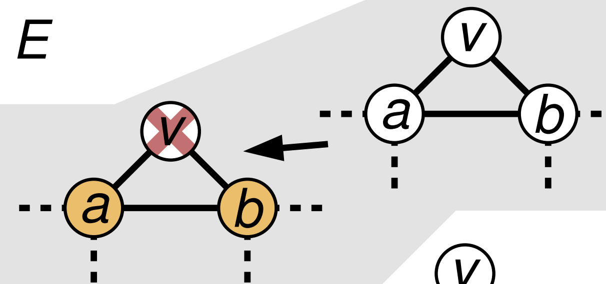
Knoten mit Grad 2

Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$ (sei $N(v) = \{a, b\}$)



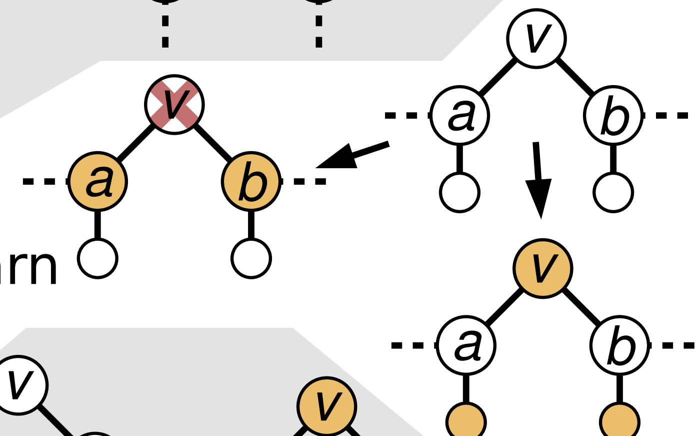
- falls a gewählt wird, macht es keinen Sinn v zu wählen
- wähle entweder a und b oder keinen der beiden
- keinen der beiden ist problematisch, wenn $ab \in E$

Fall 2.1: $ab \in E$



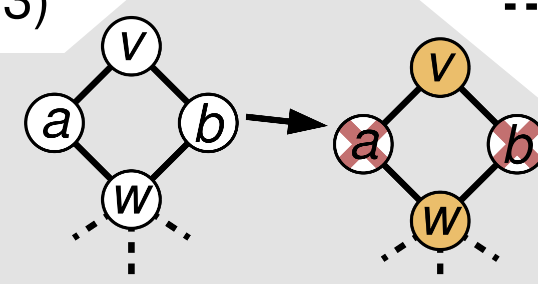
- zwei der drei Knoten müssen gewählt werden
- es ist immer besser a und b zu wählen
- keine Verzweigung nötig

Fall 2.2: $|N(a) \cup N(b)| \geq 3$



- Bsp: a und b haben je einen anderen Nachbarn
- wähle $\{a, b\}$ oder $N(a) \cup N(b)$ $\rightarrow$ Vektor $(2, 3)$

Fall 2.3: $N(a) \cup N(b) = \{v, w\}$



- es ist immer besser v und w zu wählen
- keine Verzweigung nötig

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 2

Grobe Strategie bei Knoten mit Grad 2

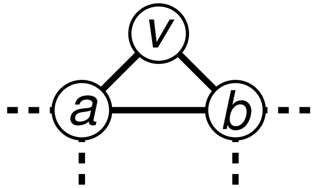
- Fallunterscheidung, wie „unabhängig“ die Nachbarschaft von v ist

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 2

Grobe Strategie bei Knoten mit Grad 2

- Fallunterscheidung, wie „unabhängig“ die Nachbarschaft von v ist
- Fall 2.1: Nachbarn sind direkt verbunden

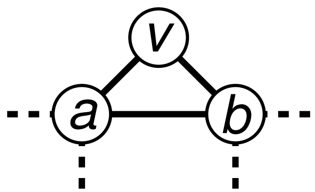


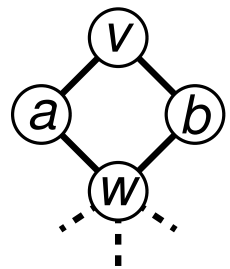
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 2

Grobe Strategie bei Knoten mit Grad 2

- Fallunterscheidung, wie „unabhängig“ die Nachbarschaft von v ist
- Fall 2.1: Nachbarn sind direkt verbunden
- Fall 2.3: Nachbarn teilen sich Nachbarn



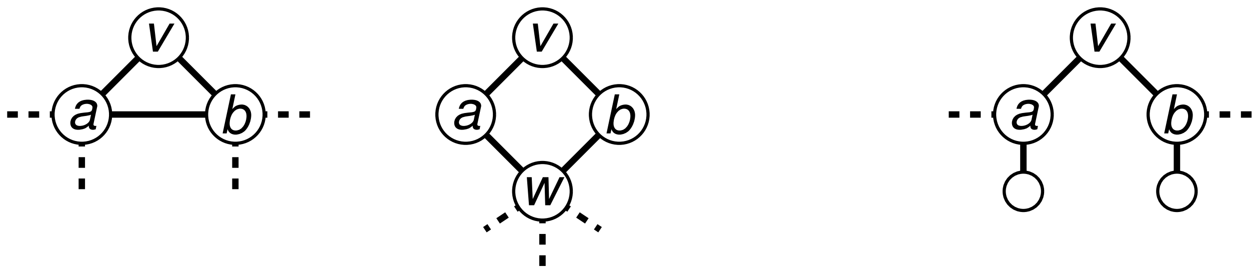


Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 2

Grobe Strategie bei Knoten mit Grad 2

- Fallunterscheidung, wie „unabhängig" die Nachbarschaft von v ist
- Fall 2.1: Nachbarn sind direkt verbunden
- Fall 2.3: Nachbarn teilen sich Nachbarn
- Fall 2.2: halbwegs unabhängige Nachbarschaften



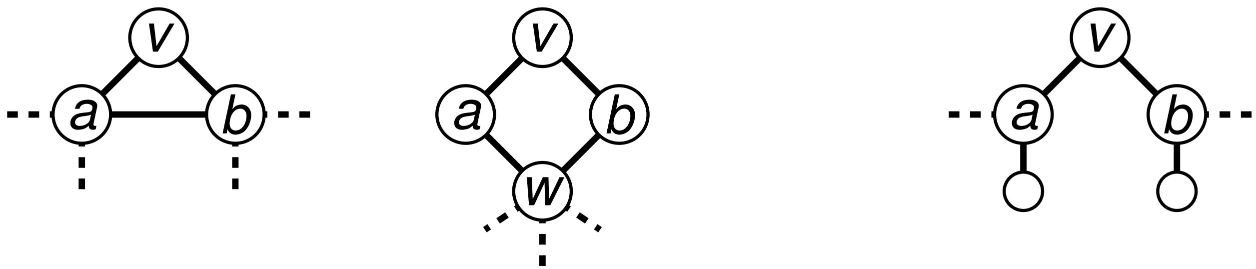
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 2

Karlsruher Institut für Technologie

Grobe Strategie bei Knoten mit Grad 2

- Fallunterscheidung, wie „unabhängig“ die Nachbarschaft von v ist
- Fall 2.1: Nachbarn sind direkt verbunden
- Fall 2.3: Nachbarn teilen sich Nachbarn
- Fall 2.2: halbwegs unabhängige Nachbarschaften



- unabhängige Nachbarschaften $\Rightarrow$ große Vereinigungen von Nachbarschaften $\Rightarrow$ gute Verzweigungsvektoren

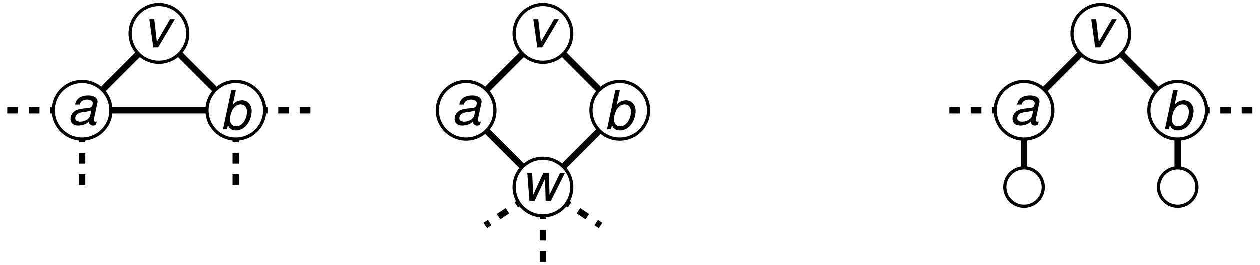
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 2

Karlsruher Institut für Technologie

Grobe Strategie bei Knoten mit Grad 2

- Fallunterscheidung, wie „unabhängig" die Nachbarschaft von v ist
- Fall 2.1: Nachbarn sind direkt verbunden
- Fall 2.3: Nachbarn teilen sich Nachbarn
- Fall 2.2: halbwegs unabhängige Nachbarschaften



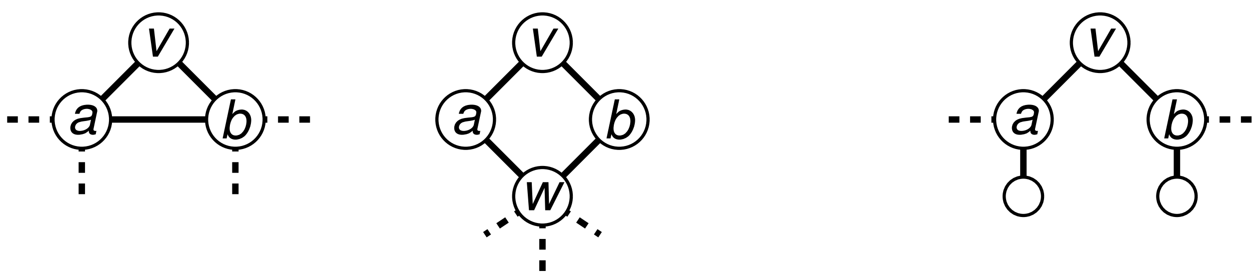
- unabhängige Nachbarschaften $\Rightarrow$ große Vereinigungen von Nachbarschaften $\Rightarrow$ gute Verzweigungsvektoren
- abhängige Nachbarschaften $\Rightarrow$ wegdiskutierbar (mittels Reduktion)

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 2

Grobe Strategie bei Knoten mit Grad 2

- Fallunterscheidung, wie „unabhängig“ die Nachbarschaft von v ist
- Fall 2.1: Nachbarn sind direkt verbunden
- Fall 2.3: Nachbarn teilen sich Nachbarn
- Fall 2.2: halbwegs unabhängige Nachbarschaften



- unabhängige Nachbarschaften $\Rightarrow$ große Vereinigungen von Nachbarschaften $\Rightarrow$ gute Verzweigungsvektoren
- abhängige Nachbarschaften $\Rightarrow$ wegdiskutierbar (mittels Reduktion)

Ziel im Folgenden

- ähnliches Vorgehen für $\deg(v) = 3$
- nutze, dass $\deg(u) \geq 3$ für alle $u \in V$

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

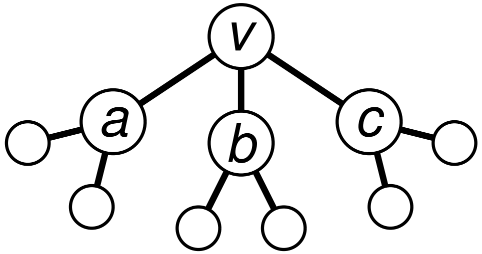
Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)

Fall 3.1: $N(a), N(b), N(c), N(v)$ schneiden sich paarweise höchstens in v



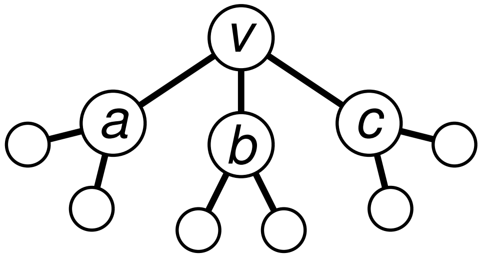
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)

Fall 3.1: $N(a), N(b), N(c), N(v)$ schneiden sich paarweise höchstens in v

- Möglichkeit 1: wähle a nicht



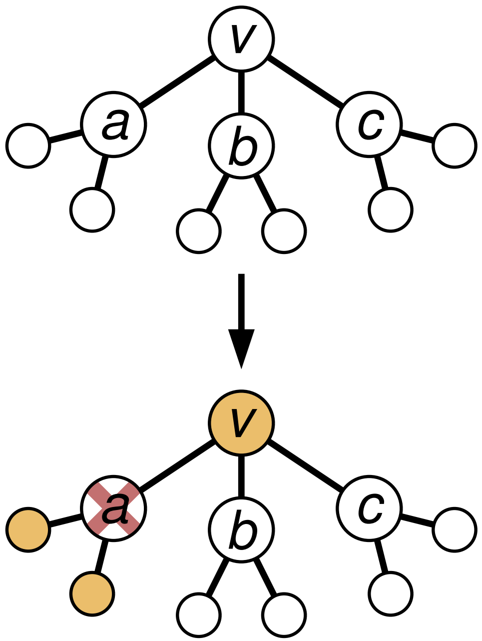
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)

Fall 3.1: $N(a), N(b), N(c), N(v)$ schneiden sich paarweise höchstens in v

- Möglichkeit 1: wähle a nicht
  $\Rightarrow N(a)$ muss gewählt werden



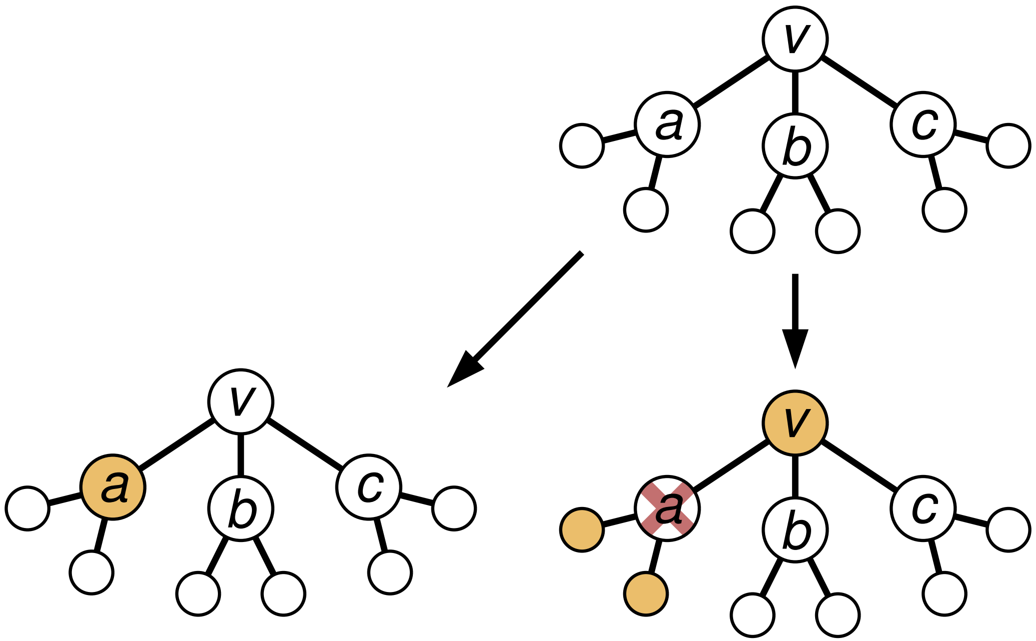
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)

Fall 3.1: $N(a), N(b), N(c), N(v)$ schneiden sich paarweise höchstens in v

- Möglichkeit 1: wähle a nicht
  $\Rightarrow$ $N(a)$ muss gewählt werden
- Möglichkeit 2: wähle a



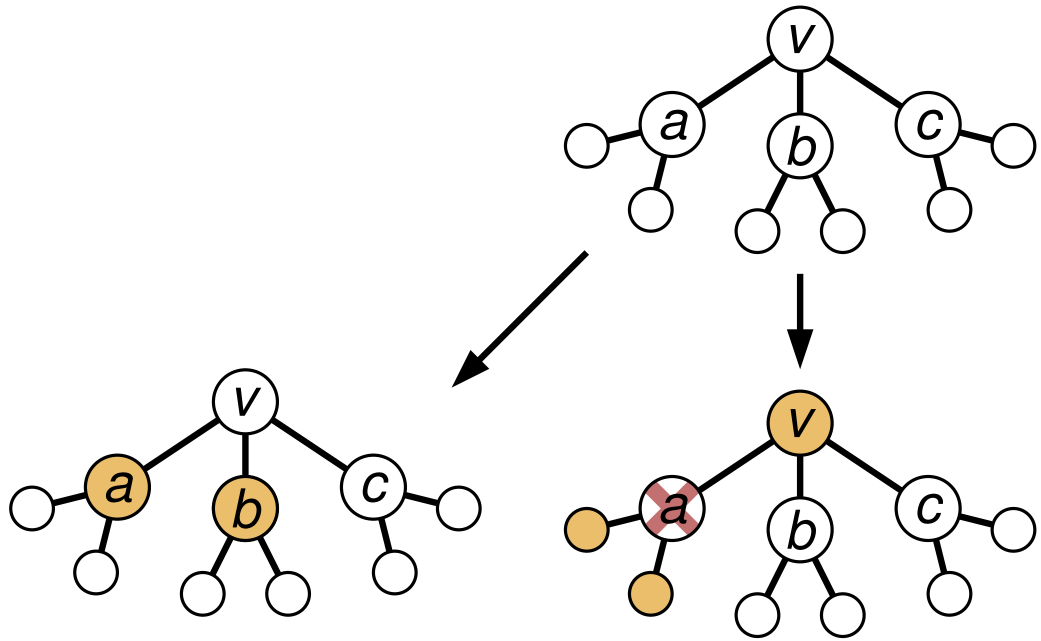
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)

Fall 3.1: $N(a), N(b), N(c), N(v)$ schneiden sich paarweise höchstens in v

- Möglichkeit 1: wähle a nicht
  $\Rightarrow$ $N(a)$ muss gewählt werden
- Möglichkeit 2: wähle a
  - Möglichkeit 2.1: wähle zusätzlich b



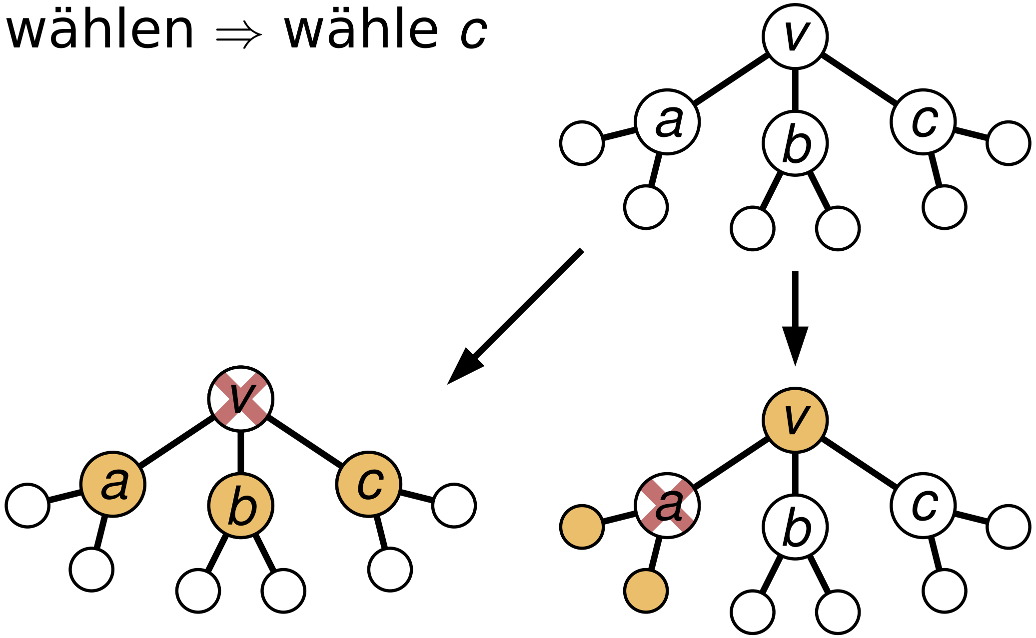
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)

Fall 3.1: $N(a), N(b), N(c), N(v)$ schneiden sich paarweise höchstens in v

- Möglichkeit 1: wähle a nicht
  $\Rightarrow$ $N(a)$ muss gewählt werden
- Möglichkeit 2: wähle a
  - Möglichkeit 2.1: wähle zusätzlich b
    $\Rightarrow$ es macht keinen Sinn v zu wählen $\Rightarrow$ wähle c



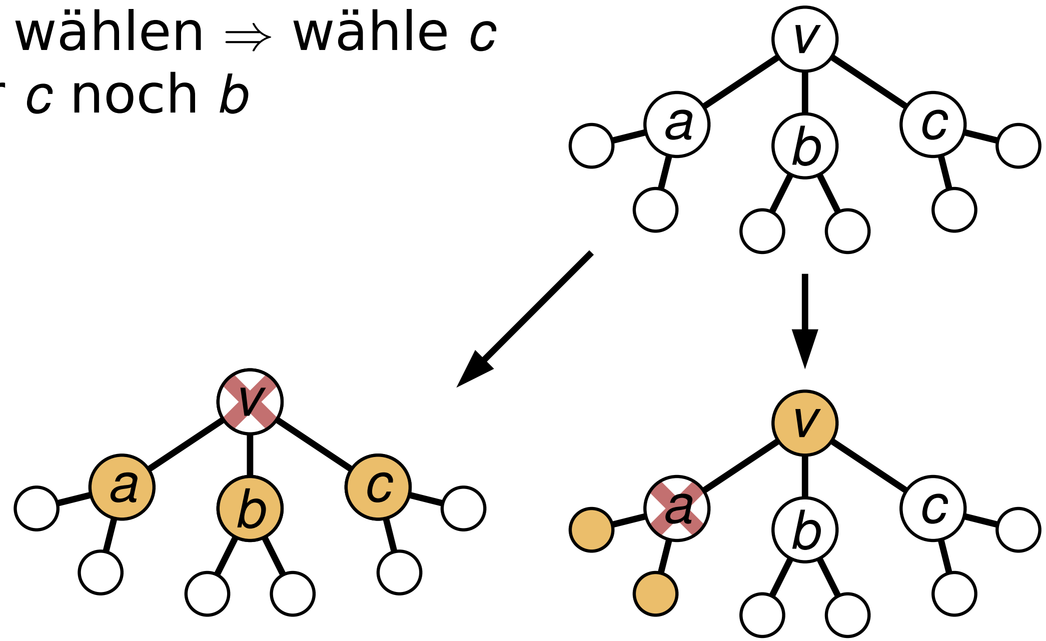
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)

Fall 3.1: $N(a), N(b), N(c), N(v)$ schneiden sich paarweise höchstens in v

- Möglichkeit 1: wähle a nicht
  $\Rightarrow$ $N(a)$ muss gewählt werden
- Möglichkeit 2: wähle a
  - Möglichkeit 2.1: wähle zusätzlich b
    $\Rightarrow$ es macht keinen Sinn v zu wählen $\Rightarrow$ wähle c
  - Möglichkeit 2.2: wähle weder c noch b



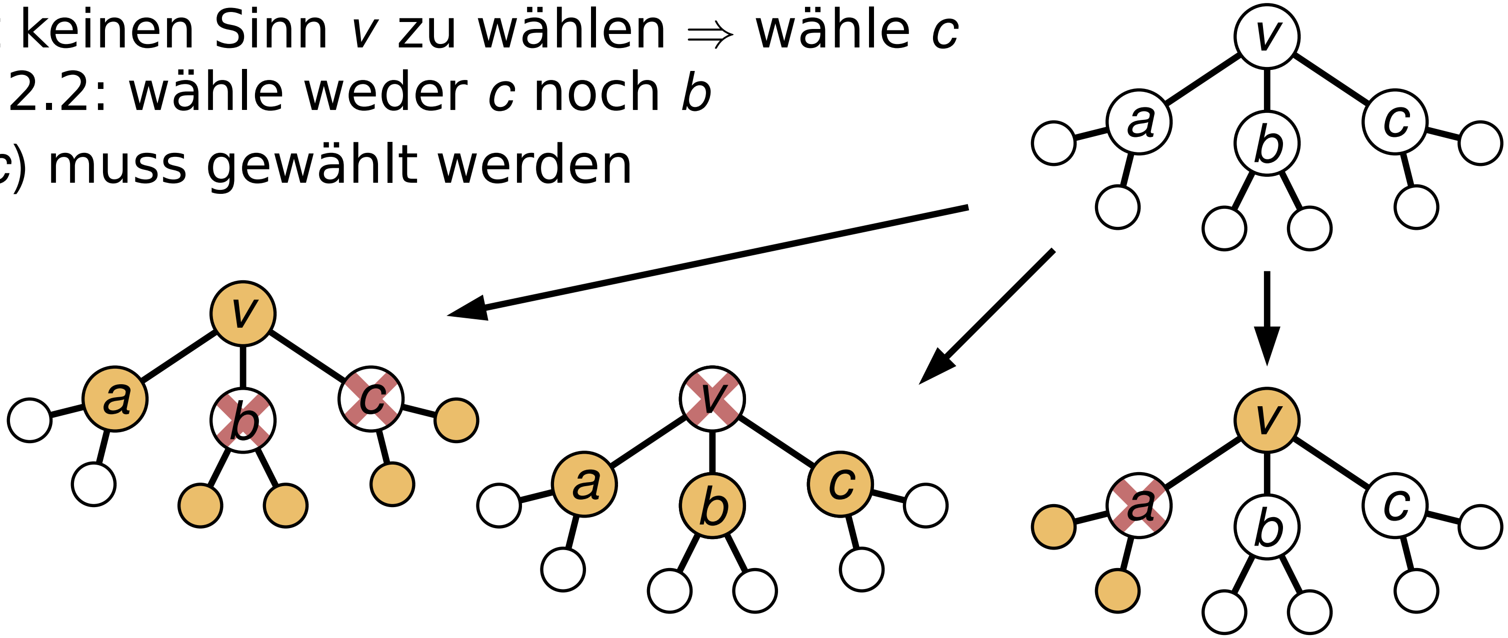
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)

Fall 3.1: $N(a), N(b), N(c), N(v)$ schneiden sich paarweise höchstens in v

- Möglichkeit 1: wähle a nicht
  $\Rightarrow$ $N(a)$ muss gewählt werden
- Möglichkeit 2: wähle a
  - Möglichkeit 2.1: wähle zusätzlich b
    $\Rightarrow$ es macht keinen Sinn v zu wählen $\Rightarrow$ wähle c
  - Möglichkeit 2.2: wähle weder c noch b
    $\Rightarrow$ $N(b) \cup N(c)$ muss gewählt werden



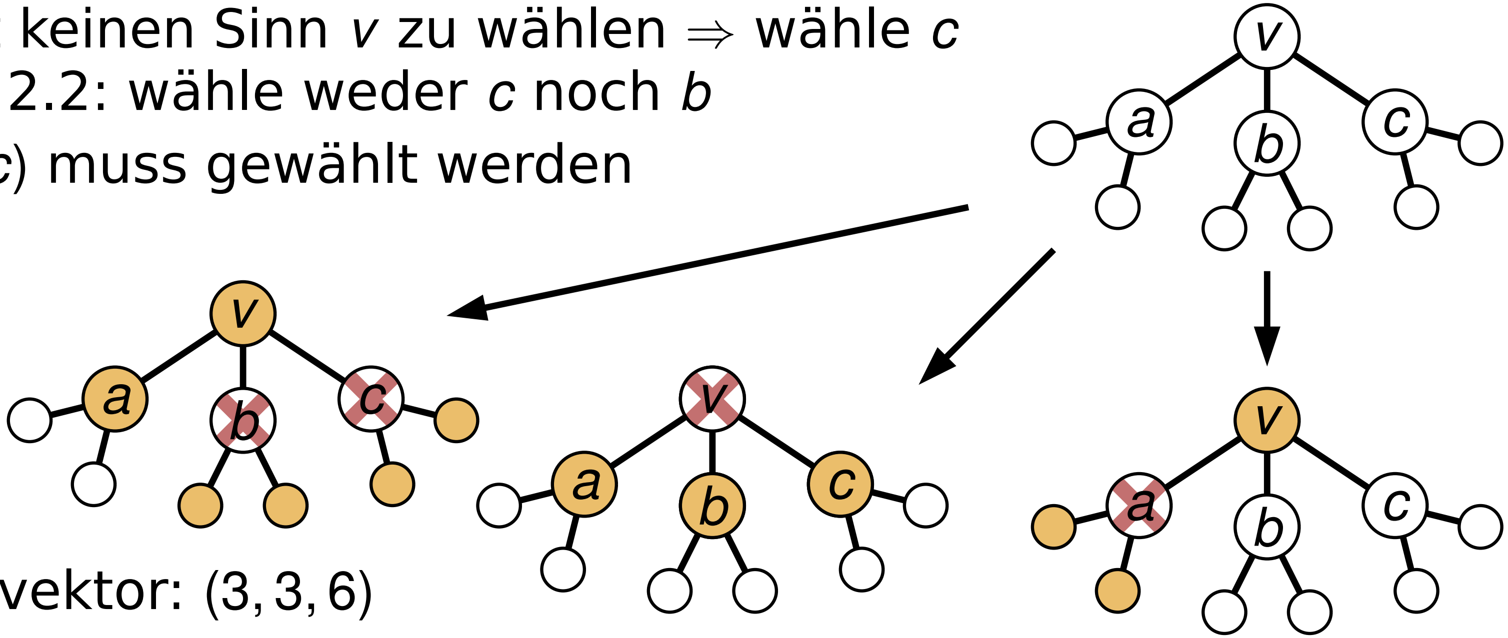
Verzweigungsvektor	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(2, 3)	(3, 3)	(3, 3, 6)	(3, 4, 6)
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)

Fall 3.1: $N(a), N(b), N(c), N(v)$ schneiden sich paarweise höchstens in v

- Möglichkeit 1: wähle a nicht
  $\Rightarrow$ $N(a)$ muss gewählt werden
- Möglichkeit 2: wähle a
  - Möglichkeit 2.1: wähle zusätzlich b
    $\Rightarrow$ es macht keinen Sinn v zu wählen $\Rightarrow$ wähle c
  - Möglichkeit 2.2: wähle weder c noch b
    $\Rightarrow$ $N(b) \cup N(c)$ muss gewählt werden



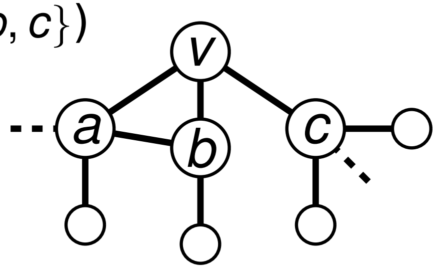
- Verzweigungsvektor: $(3, 3, 6)$

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)

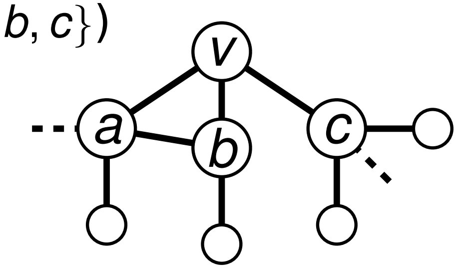
Fall 3.2: $ab \in E$



Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)



Fall 3.2: $ab \in E$

- Möglichkeit 1: wähle c nicht

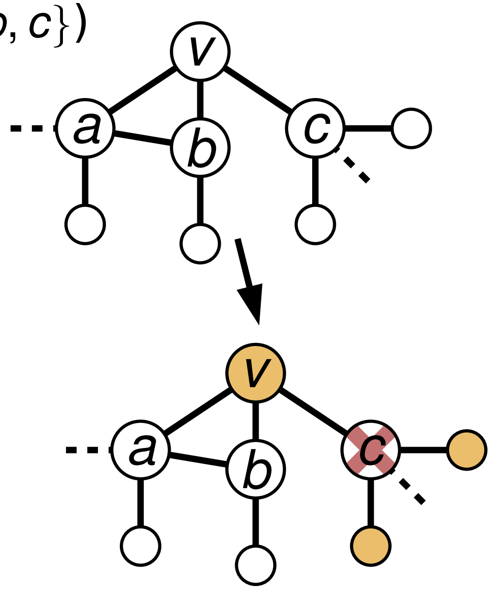
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)

Fall 3.2: $ab \in E$

- Möglichkeit 1: wähle c nicht
  $\Rightarrow N(c)$ muss gewählt werden



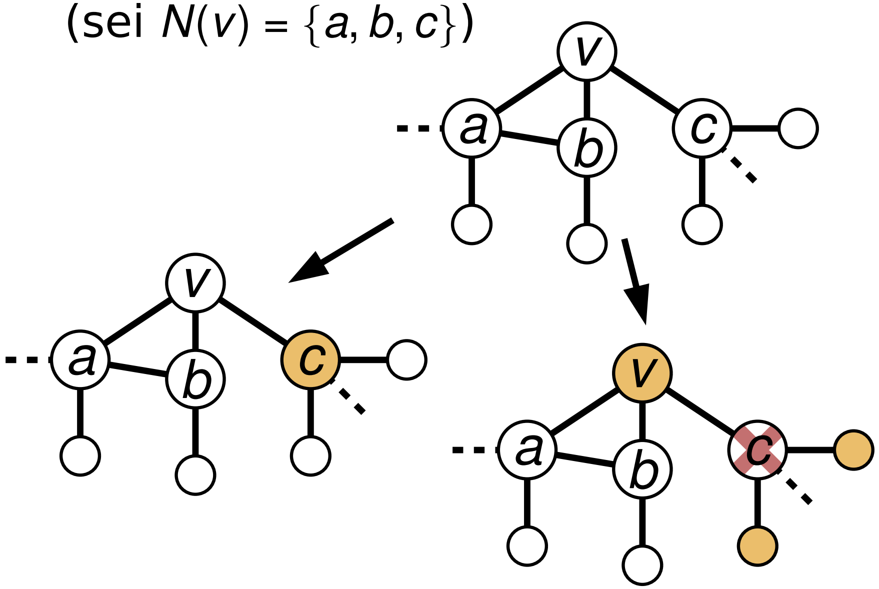
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)

Fall 3.2: $ab \in E$

- Möglichkeit 1: wähle c nicht
  $\Rightarrow N(c)$ muss gewählt werden
- Möglichkeit 2: wähle c



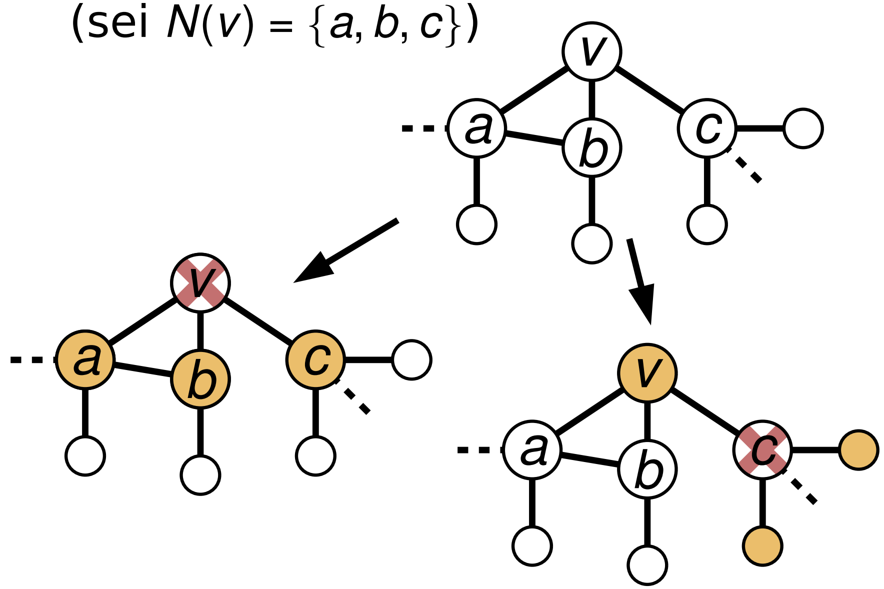
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)

Fall 3.2: $ab \in E$

- Möglichkeit 1: wähle c nicht
  $\Rightarrow$ $N(c)$ muss gewählt werden
- Möglichkeit 2: wähle c
  $\Rightarrow$ es macht keinen Sinn v zu wählen
  $\Rightarrow$ wähle zusätzlich $\{a, b\}$



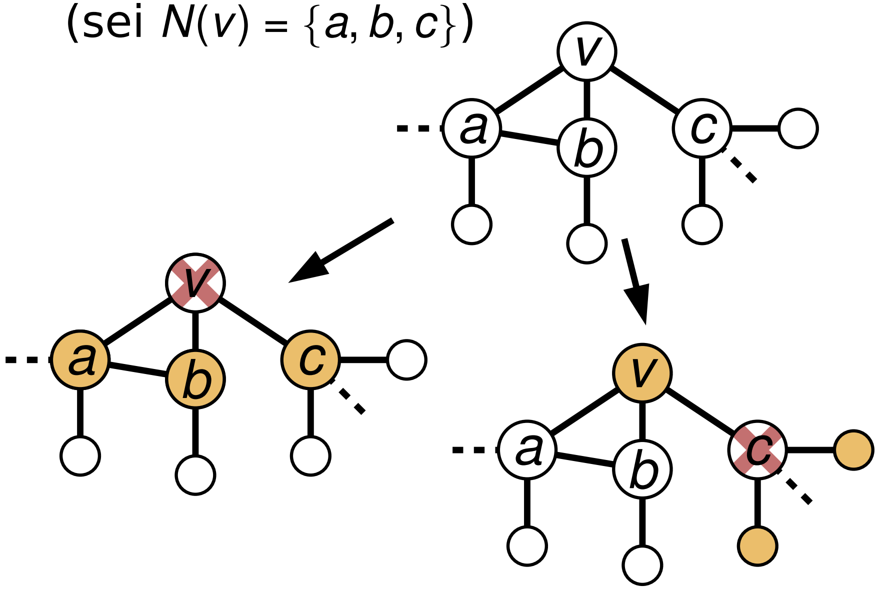
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)

Fall 3.2: $ab \in E$

- Möglichkeit 1: wähle c nicht
  $\Rightarrow$ $N(c)$ muss gewählt werden
- Möglichkeit 2: wähle c
  $\Rightarrow$ es macht keinen Sinn v zu wählen
  $\Rightarrow$ wähle zusätzlich $\{a, b\}$
- Verzweigungsvektor: $(3, 3)$



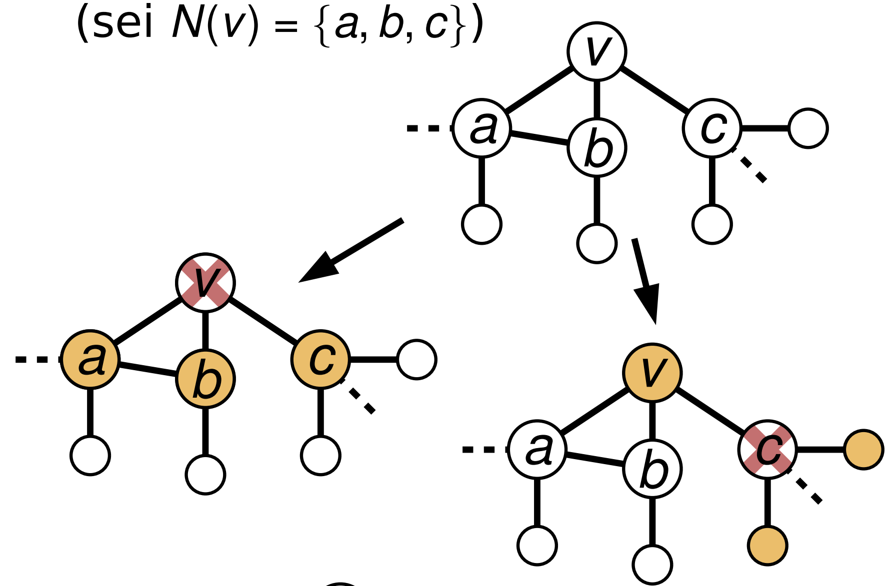
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

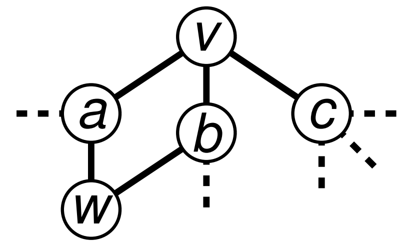
Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)

Fall 3.2: $ab \in E$

- Möglichkeit 1: wähle c nicht
  - $\Rightarrow$ $N(c)$ muss gewählt werden
- Möglichkeit 2: wähle c
  - $\Rightarrow$ es macht keinen Sinn v zu wählen
  - $\Rightarrow$ wähle zusätzlich $\{a, b\}$
- Verzweigungsvektor: $(3, 3)$



Fall 3.3: a und b haben gem. Nachbarn w



Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)

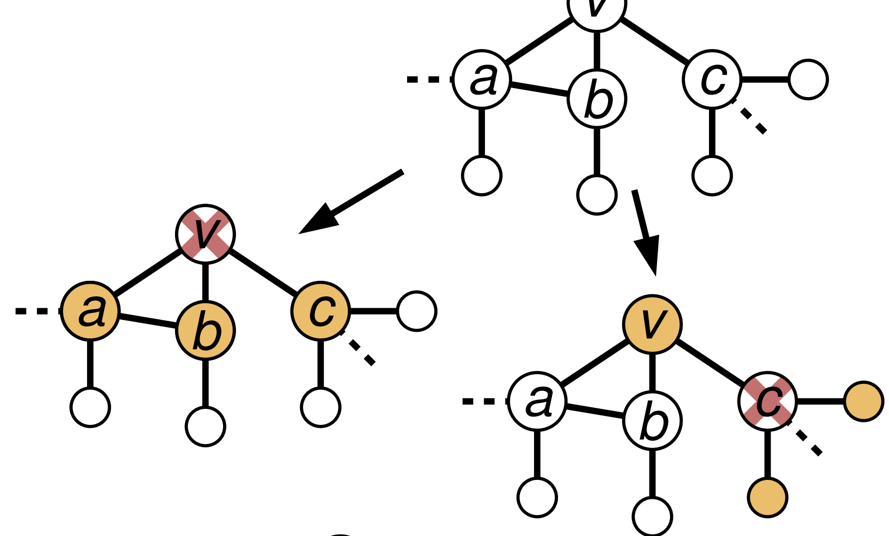
Fall 3.2: $ab \in E$

- Möglichkeit 1: wähle c nicht

  $\Rightarrow$ $N(c)$ muss gewählt werden
- Möglichkeit 2: wähle c

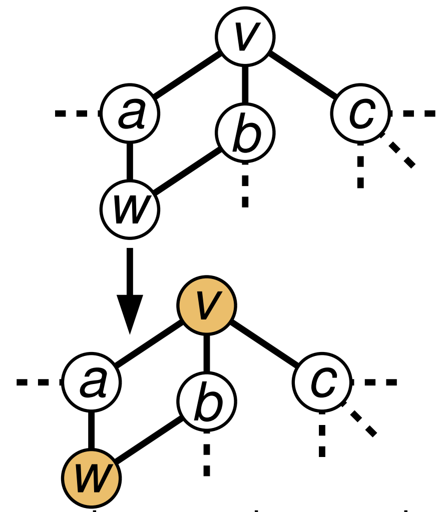
  $\Rightarrow$ es macht keinen Sinn v zu wählen

  $\Rightarrow$ wähle zusätzlich $\{a, b\}$
- Verzweigungsvektor: $(3, 3)$



Fall 3.3: a und b haben gem. Nachbarn w

- Möglichkeit 1: wähle $\{v, w\}$



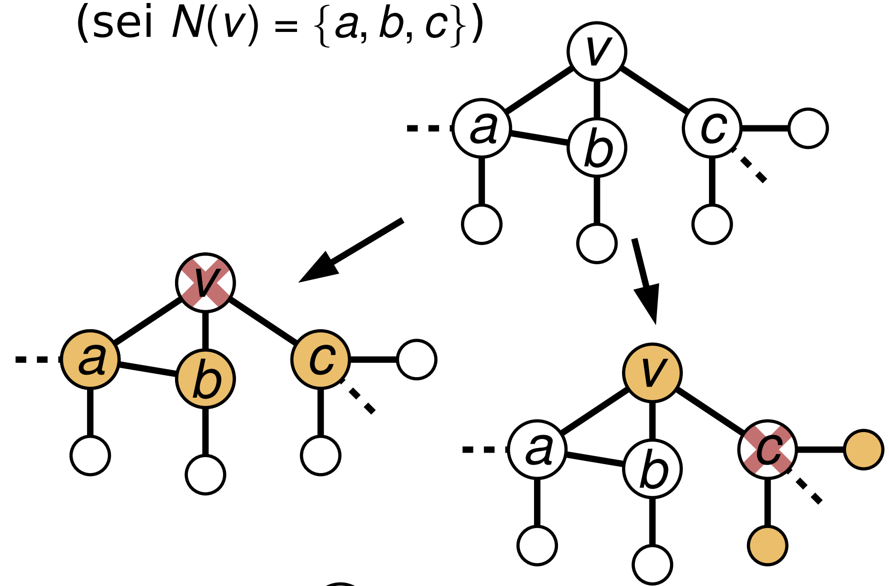
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)

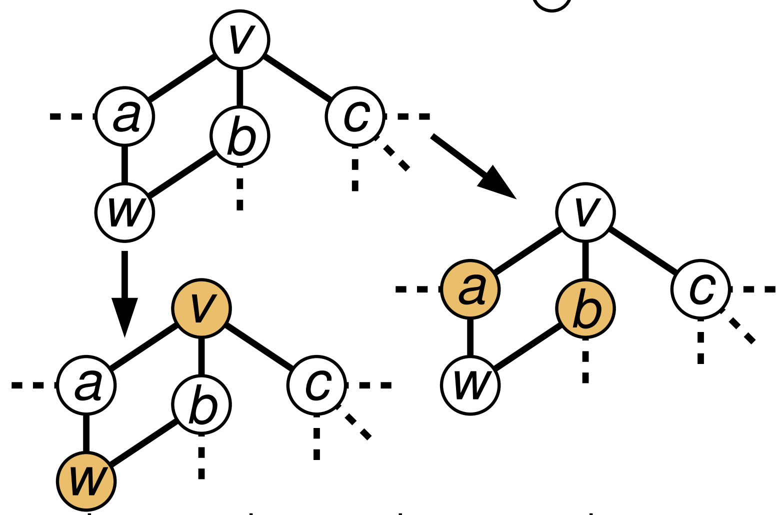
Fall 3.2: $ab \in E$

- Möglichkeit 1: wähle c nicht
  $\Rightarrow$ $N(c)$ muss gewählt werden
- Möglichkeit 2: wähle c
  $\Rightarrow$ es macht keinen Sinn v zu wählen
  $\Rightarrow$ wähle zusätzlich $\{a, b\}$
- Verzweigungsvektor: $(3, 3)$



Fall 3.3: a und b haben gem. Nachbarn w

- Möglichkeit 1: wähle $\{v, w\}$
- Möglichkeit 2: wähle $\{a, b\}$



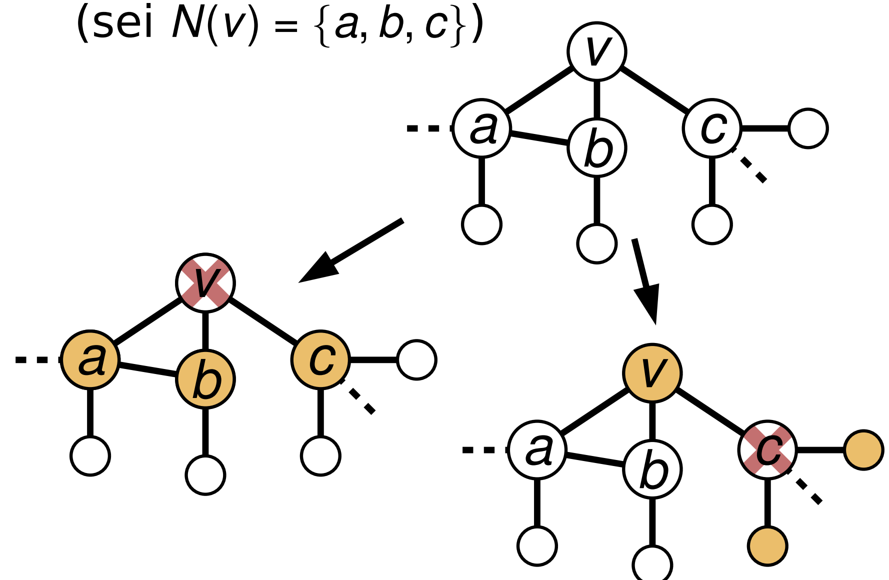
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)

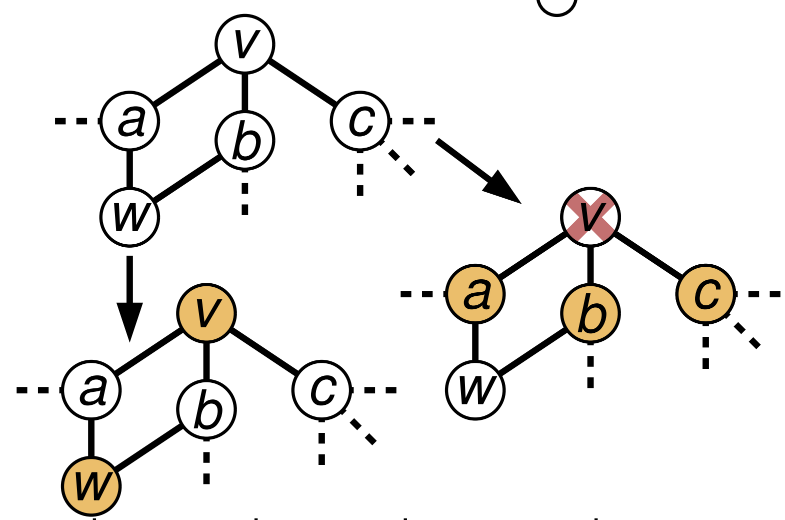
Fall 3.2: $ab \in E$

- Möglichkeit 1: wähle c nicht
  $\Rightarrow$ $N(c)$ muss gewählt werden
- Möglichkeit 2: wähle c
  $\Rightarrow$ es macht keinen Sinn v zu wählen
  $\Rightarrow$ wähle zusätzlich $\{a, b\}$
- Verzweigungsvektor: $(3, 3)$



Fall 3.3: a und b haben gem. Nachbarn w

- Möglichkeit 1: wähle $\{v, w\}$
- Möglichkeit 2: wähle $\{a, b\}$
  $\Rightarrow$ es macht keinen Sinn v zu wählen
  $\Rightarrow$ wähle zusätzlich c



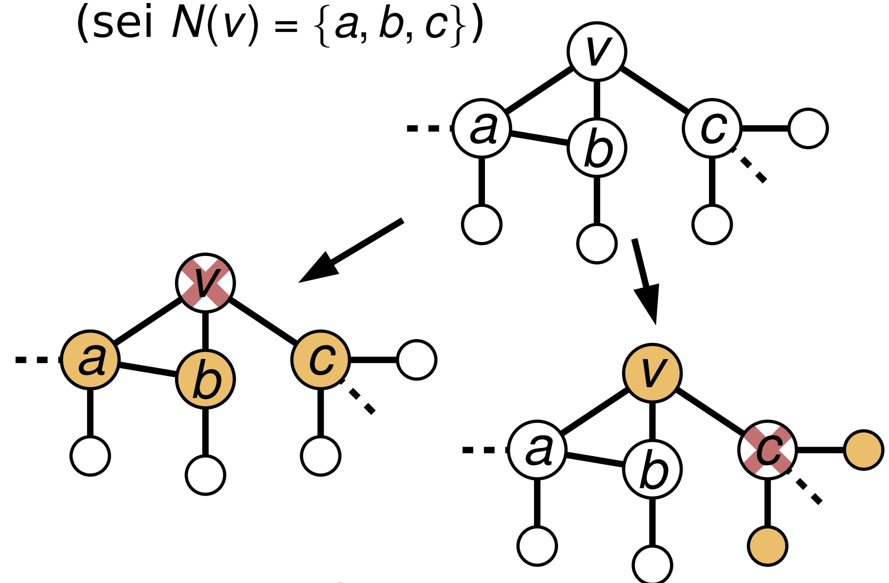
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)

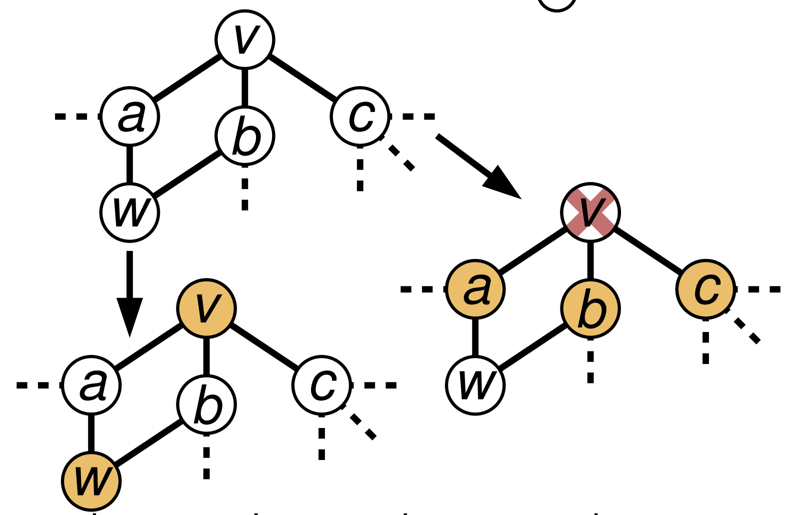
Fall 3.2: $ab \in E$

- Möglichkeit 1: wähle c nicht
  $\Rightarrow$ $N(c)$ muss gewählt werden
- Möglichkeit 2: wähle c
  $\Rightarrow$ es macht keinen Sinn v zu wählen
  $\Rightarrow$ wähle zusätzlich $\{a, b\}$
- Verzweigungsvektor: $(3, 3)$



Fall 3.3: a und b haben gem. Nachbarn w

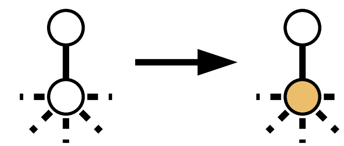
- Möglichkeit 1: wähle $\{v, w\}$
- Möglichkeit 2: wähle $\{a, b\}$
  $\Rightarrow$ es macht keinen Sinn v zu wählen
  $\Rightarrow$ wähle zusätzlich c
- Verzweigungsvektor: $(2, 3)$



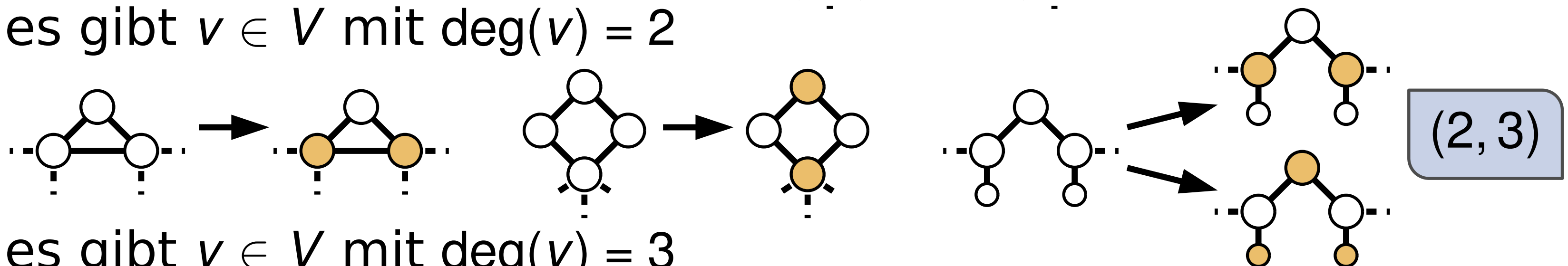
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Bisheriger Stand

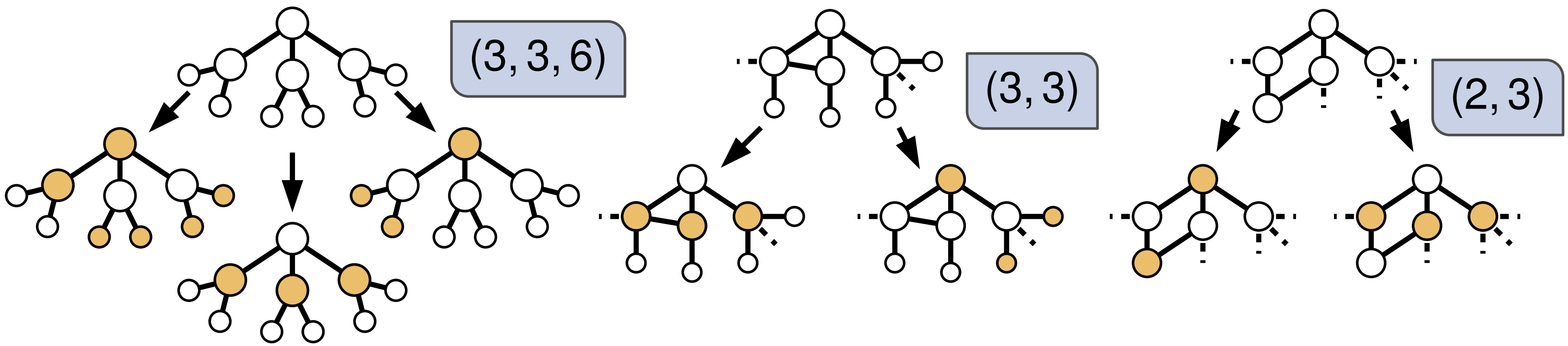
Regel 1: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 1$



Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$



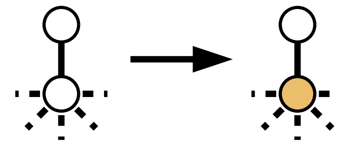
Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$



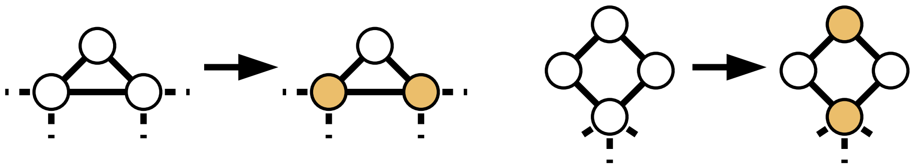
Verzweigungsvektor	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(2, 3)	(3, 3)	(3, 3, 6)	(3, 4, 6)
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

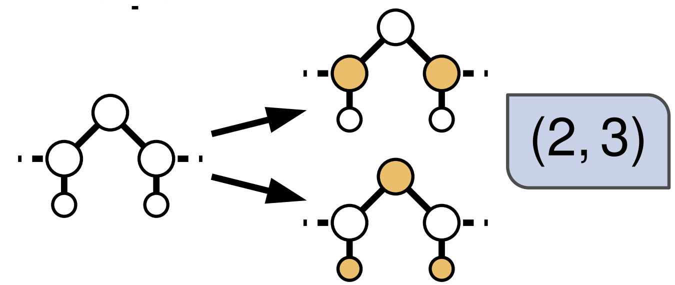
Bisheriger Stand

Regel 1: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 1$

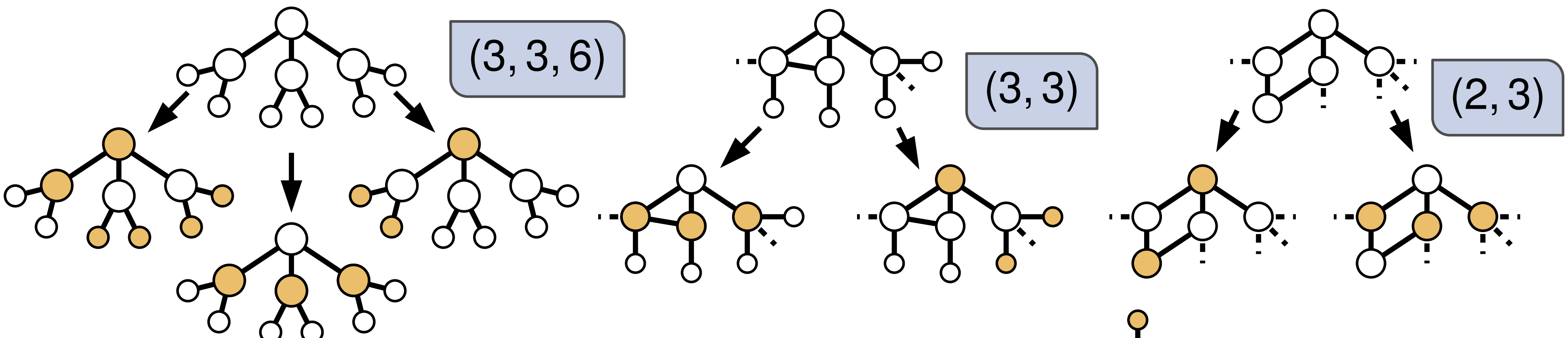


Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$

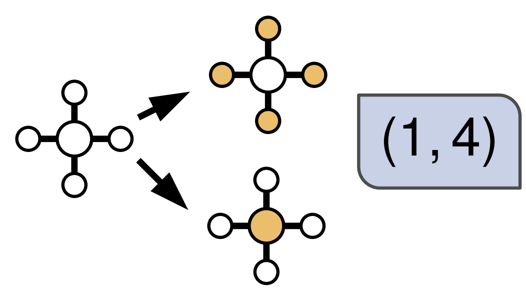




Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$



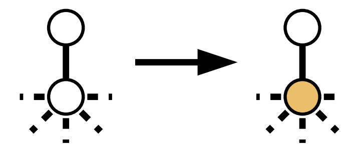
Regel 4: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 4$



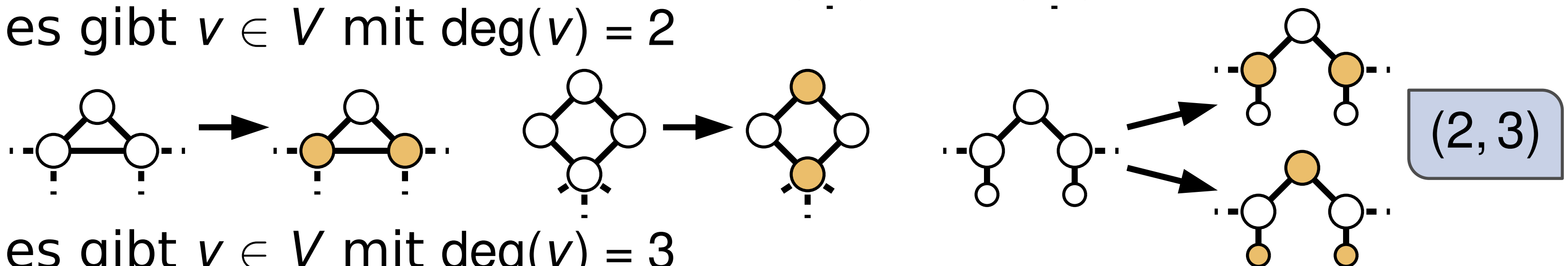
Verzweigungsvektor	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(2, 3)	(3, 3)	(3, 3, 6)	(3, 4, 6)
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Bisheriger Stand

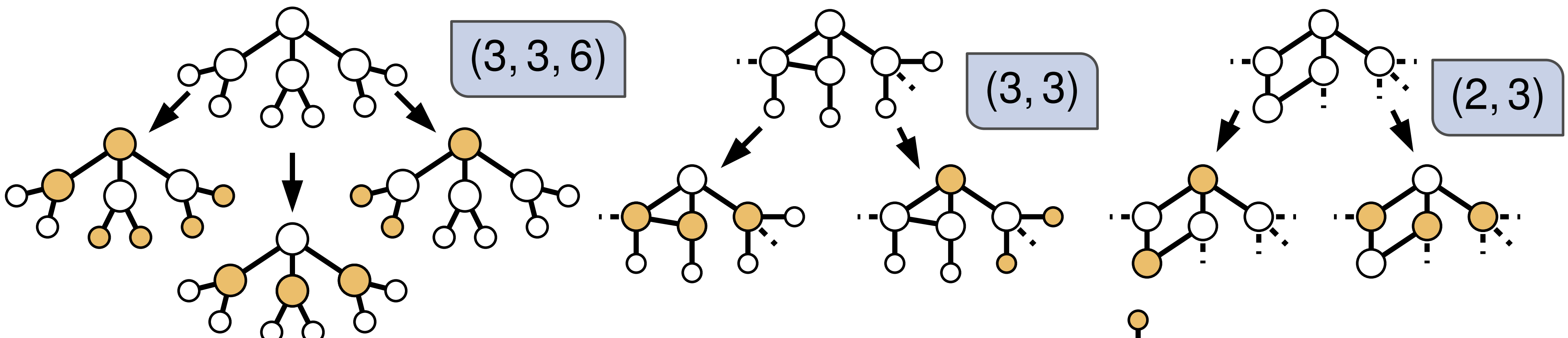
Regel 1: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 1$



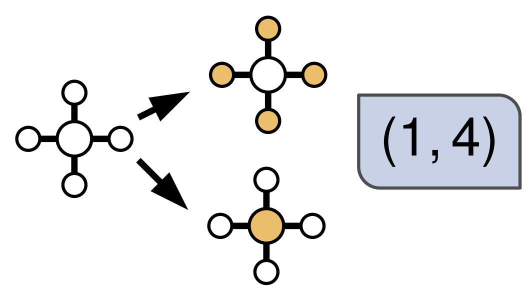
Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$



Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$



Regel 4: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 4$



$\Rightarrow$ **Gesamtlaufzeit:** $1{,}381^k \cdot n^{O(1)}$

Verzweigungsvektor	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(2, 3)	(3, 3)	(3, 3, 6)	(3, 4, 6)
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Geht es noch besser?

Regel 1: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 1$

Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$

$(2, 3)$

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$

$(3, 3, 6)$ $(3, 3)$ $(2, 3)$

Verzweigungsvektor	$(1, 1)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(1, 4)$	$(1, 5)$	$(2, 3)$	$(3, 3)$	$(3, 3, 6)$	$(3, 4, 6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Geht es noch besser?

Regel 1: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 1$

Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$

$(2, 3)$

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$

$(3, 3, 6)$ $(3, 3)$ $(2, 3)$

Regel 4: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) \geq 5$

$(1, \deg(v))$

Regel 5: alle Knoten haben Grad 4

$(1, 4)$

Verzweigungsvektor	$(1, 1)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(1, 4)$	$(1, 5)$	$(2, 3)$	$(3, 3)$	$(3, 3, 6)$	$(3, 4, 6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Geht es noch besser?

Regel 1: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 1$

Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$

$(2, 3)$

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$

$(3, 3, 6)$ $(3, 3)$ $(2, 3)$

Regel 4: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) \geq 5$

$(1, \deg(v))$

Regel 5: alle Knoten haben Grad 4

$(1, 4)$

Behauptung: die Gesamtlaufzeit ist $1{,}342^k \cdot n^{O(1)}$

Verzweigungsvektor	$(1, 1)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(1, 4)$	$(1, 5)$	$(2, 3)$	$(3, 3)$	$(3, 3, 6)$	$(3, 4, 6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Geht es noch besser?

Regel 1: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 1$

Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$

$(2, 3)$

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$

$(3, 3, 6)$ $(3, 3)$ $(2, 3)$

Regel 4: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) \geq 5$

$(1, \deg(v))$

Regel 5: alle Knoten haben Grad 4

$(1, 4)$

Behauptung: die Gesamtlaufzeit ist $1{,}342^k \cdot n^{O(1)}$

Intuitive Begründung: Regel 5 kann in jedem Teilbaum nur ein Mal angewendet werden $\Rightarrow$ Verzweigungsvektor $(1, 4)$ kann man ignorieren

Verzweigungsvektor	$(1, 1)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(1, 4)$	$(1, 5)$	$(2, 3)$	$(3, 3)$	$(3, 3, 6)$	$(3, 4, 6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Zusammenfassung & Literaturhinweis

Theorem
Vertex Cover mit der Lösungsgröße k als Parameter kann in $1{,}342^k \cdot n^{O(1)}$ Zeit gelöst werde.

Zusammenfassung & Literaturhinweis

Theorem
Vertex Cover mit der Lösungsgröße k als Parameter kann in $1{,}342^k \cdot n^{O(1)}$ Zeit gelöst werde.

Beschränkte Suchbäume

- mit besseren Verzweigungsregeln kann man die Basis verkleinern

Zusammenfassung & Literaturhinweis

Theorem
Vertex Cover mit der Lösungsgröße k als Parameter kann in $1{,}342^k \cdot n^{O(1)}$ Zeit gelöst werde.

Beschränkte Suchbäume
- mit besseren Verzweigungsregeln kann man die Basis verkleinern
- Verzweigungsvektoren helfen bei der Analyse

Zusammenfassung & Literaturhinweis

Theorem
Vertex Cover mit der Lösungsgröße k als Parameter kann in $1{,}342^k \cdot n^{O(1)}$ Zeit gelöst werde.

Beschränkte Suchbäume

- mit besseren Verzweigungsregeln kann man die Basis verkleinern
- Verzweigungsvektoren helfen bei der Analyse
- Nutzung des „schlechtesten" aller Verzweigungsvektoren liefert potentiell ungenaue Schranke (Bsp: verzweige meist mit $(5, 5)$; selten mit $(1, 1)$)

Zusammenfassung & Literaturhinweis

Theorem
VERTEX COVER mit der Lösungsgröße k als Parameter kann in $1{,}342^k \cdot n^{O(1)}$ Zeit gelöst werde.

Beschränkte Suchbäume

- mit besseren Verzweigungsregeln kann man die Basis verkleinern
- Verzweigungsvektoren helfen bei der Analyse
- Nutzung des „schlechtesten“ aller Verzweigungsvektoren liefert potentiell ungenaue Schranke (Bsp: verzweige meist mit $(5, 5)$; selten mit $(1, 1)$)

Kleinere Basis

- beste Basis seit 2010: $O(1{,}2738^k + kn)$ `doi.org/10.1016/j.tcs.2010.06.026`

Zusammenfassung & Literaturhinweis

Theorem
VERTEX COVER mit der Lösungsgröße k als Parameter kann in $1{,}342^k \cdot n^{O(1)}$ Zeit gelöst werde.

Beschränkte Suchbäume

- mit besseren Verzweigungsregeln kann man die Basis verkleinern
- Verzweigungsvektoren helfen bei der Analyse
- Nutzung des „schlechtesten“ aller Verzweigungsvektoren liefert potentiell ungenaue Schranke (Bsp: verzweige meist mit $(5, 5)$; selten mit $(1, 1)$)

Kleinere Basis

- beste Basis seit 2010: $O(1{,}2738^k + kn)$ `doi.org/10.1016/j.tcs.2010.06.026`
- Resultat von 2024: $O^*(1{,}252\,84^k)$ `https://doi.org/10.4230/LIPIcs.STACS.2024.40`

Zusammenfassung & Literaturhinweis

Theorem
VERTEX COVER mit der Lösungsgröße k als Parameter kann in $1{,}342^k \cdot n^{O(1)}$ Zeit gelöst werde.

Beschränkte Suchbäume

- mit besseren Verzweigungsregeln kann man die Basis verkleinern
- Verzweigungsvektoren helfen bei der Analyse
- Nutzung des „schlechtesten" aller Verzweigungsvektoren liefert potentiell ungenaue Schranke (Bsp: verzweige meist mit $(5, 5)$; selten mit $(1, 1)$)

Kleinere Basis

- beste Basis seit 2010: $O(1{,}2738^k + kn)$ `doi.org/10.1016/j.tcs.2010.06.026`
- Resultat von 2024: $O^*(1{,}252\,84^k)$ `https://doi.org/10.4230/LIPIcs.STACS.2024.40`
- siehe auch: `http://fpt.wikidot.com/fpt-races`

Problem	f(k)	vertices in kernel	Reference/Comments
Vertex Cover	1.2529^k	$2k$	42
Connected Vertex Cover	2^k	no $k^{O(1)}$	26, randomized algorithm
Multiway Cut	2^k	not known	21, 38: $O(k^{s+1})$-vertex kernel with s terminals
Directed Multiway Cut	$2^{O(k^3)}$	no $k^{O(1)}$	34
Almost-2-SAT (VC-PM)	2.3146^k	$O(k^6)$	37, 38, randomized kernel
Multicut	$2^{O(k^3)}$	no $k^{O(1)}$	22, 35