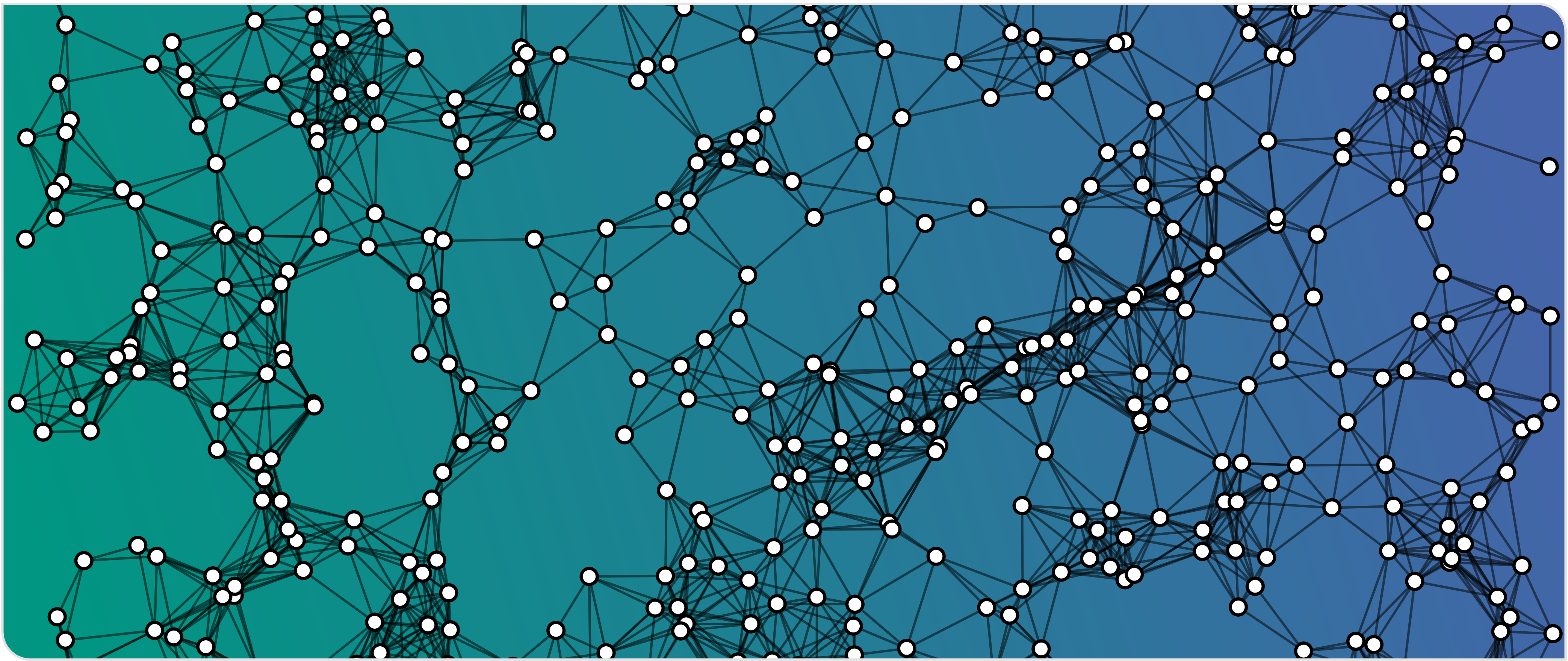
Karlsruher Institut für Technologie

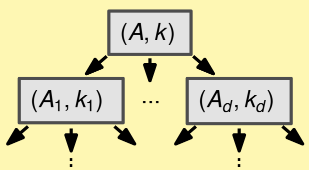
Parametrisierte Algorithmen

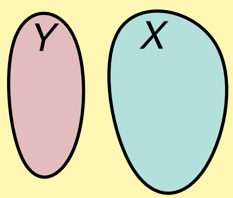
Beschränkte Suchbäume: bessere Verzweigung

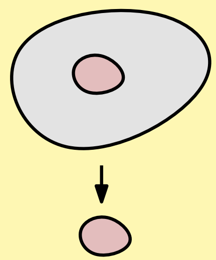


Inhalt

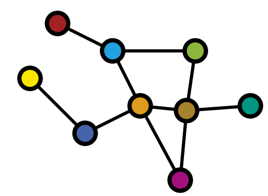
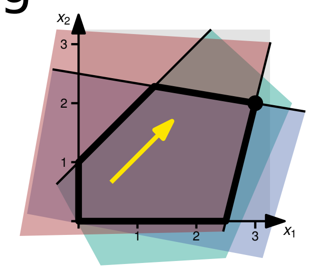
Basic Toolbox
- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung

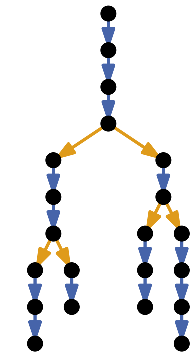






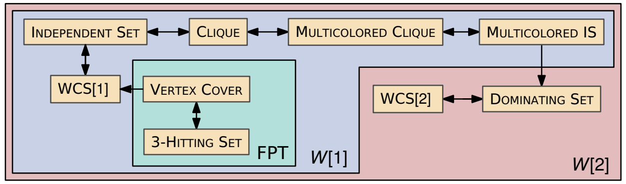
Erweiterte Toolbox
- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding

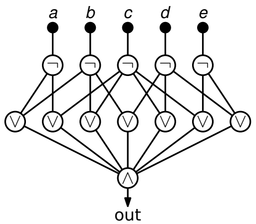





Baumweite
- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem

Untere Schranken
- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH





Anmerkung: Wie verhält sich FPT zu NP?

Karlsruher Institut für Technologie

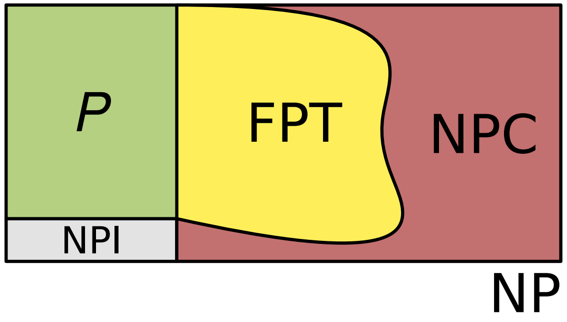
Formal korrekte Antwort: gar nicht

- $\mathrm{NP} \cap \mathrm{FPT} = \emptyset$ (NP enthält Probleme, FPT enthält parametrisierte Probleme)
- sei L entscheidbar; es gibt Parametrisierungen L' und L'' sodass:
  - $L' \in \mathrm{FPT}$ (Laufzeit des Algos als Parameter)
  - $L'' \notin \mathrm{FPT}$, außer wenn $L \in \mathrm{P}$ (konstanter Parameter)

Typische Situation: Was wollen wir mit FPT erreichen?

- löse Probleme in NPC halbwegs effizient
- wir betrachten hauptsächlich Probleme in NP
- gute Vorstellung: FPT schlägt eine Brücke zwischen P und NPC

  (auch wenn man das formal so nicht sagen kann)

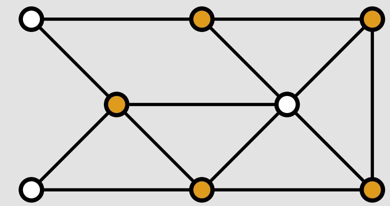


Zusatzhinweis: para-NP

- para-NP ist das Gegenstück zu NP für parametrisierte Probleme
- FPT verhält sich zu para-NP wie P zu NP

Wiederholung: Beschränkter Suchbaum

Problem: VERTEX COVER
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



noch zu überdeckender Teilgraph

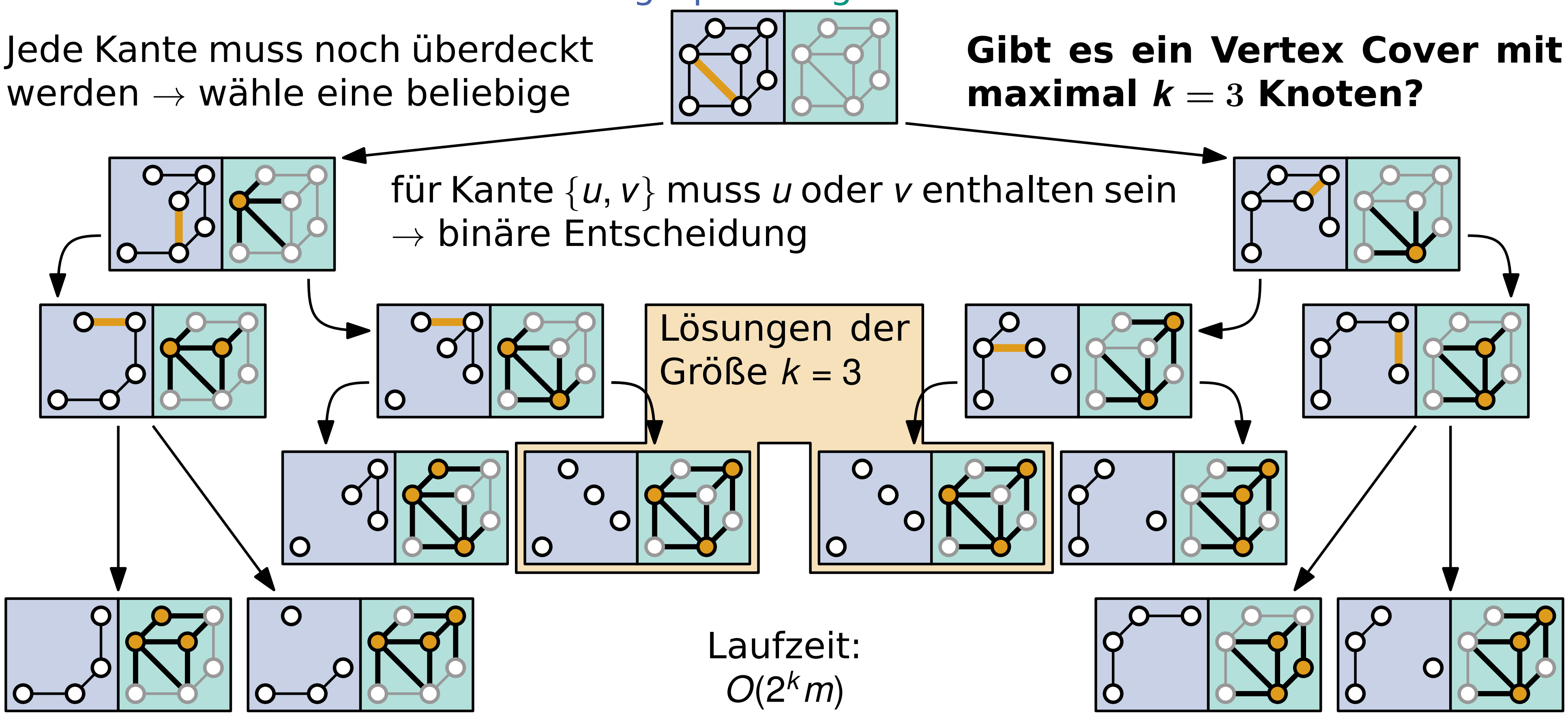
gewählte Knoten & überdeckte Kanten

Jede Kante muss noch überdeckt werden $\rightarrow$ wähle eine beliebige

Gibt es ein Vertex Cover mit maximal $k = 3$ Knoten?

für Kante $\{u, v\}$ muss u oder v enthalten sein
$\rightarrow$ binäre Entscheidung

Lösungen der Größe $k = 3$

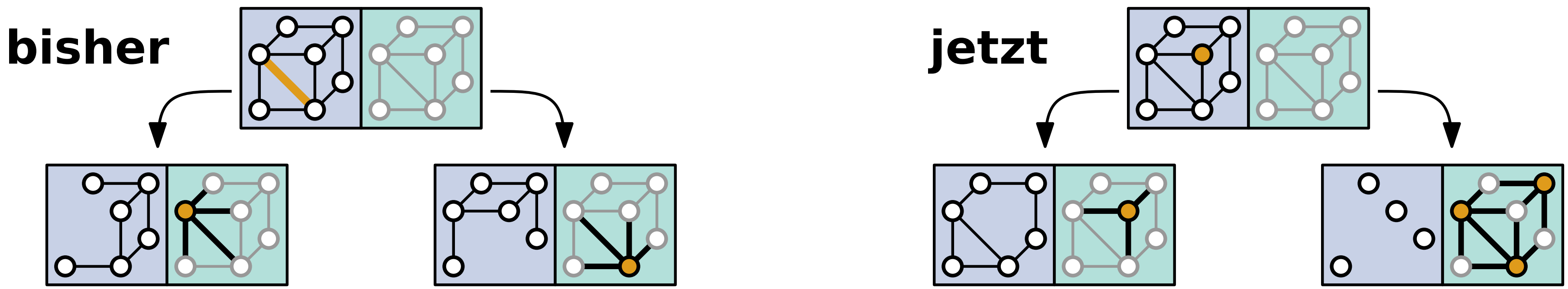


Laufzeit:
$O(2^k m)$

Wiederholung: Beschränkterer Suchbaum

Geht es schneller?

- Ziel: reduziere die Größe des Suchbaums (bisher: 2^k Blätter)
- Verzweigungsregel bisher: für Kante $\{u, v\}$ wähle entweder u oder v
- neue Verzweigungsregel: für Knoten v wähle entweder v oder $N(v)$



Wie viele Blätter hat der resultierende Baum abhängig von k?

- wähle für v immer einen Knoten mit Grad ≥ 2
- obere Schranke für #Blätter: $T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$
- wir erhalten: $T(k) \leq 1{,}6181^k$
- Wie kommt man auf 1,6181? Geht es besser? ⟶ ~~nächste Vorlesung~~ heute

Verzweigungsvektoren

Allgemeine Verzweigung

- für Instanz (G, k) erzeuge ℓ Kind-Instanzen $(G_1, k_1), \dots, (G_\ell, k_\ell)$
- (G, k) lösbar $\Leftrightarrow$ mindestens eine der Instanzen (G_i, k_i) lösbar
- sei $d_i = k - k_i$ (Parameter wird in Kind-Instanz G_i um d_i kleiner)
- Verzweigungsvektor: $(d_1, \dots, d_\ell)$

Bisher gesehen

- Verzweigungsvektor $(1, 1) \Rightarrow$ Baumgröße 2^k
- Verzweigungsvektor $(1, 2) \Rightarrow$ Baumgröße $1{,}6181^k$

Wie beweist man die Baumgröße?

- rate Basis λ
- zeige $T(k) \leq c \cdot \lambda^k$ mittels Induktion (gleich mehr)

Wie rät man die Basis?

- finde Nullstelle eines Polynoms (gleich mehr)
- WolframAlpha hilft beim Lösen

Baumgröße

Beispiel: Verzweigungsvektor (1, 2)

- Rekurrenz:
$$T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$
- Behauptung: $T(k) \leq 1{,}6181^k$

Beweis

- I.A.: $k < 2 \Rightarrow T(k) = 1 \leq 1{,}6181^k$
- I.S.:
$$\begin{aligned} T(k) &= T(k-1) + T(k-2) \\ &\leq 1{,}6181^{k-1} + 1{,}6181^{k-2} \\ &= 1{,}6181^{k-2} \cdot \underbrace{(1{,}6181 + 1)}_{\leq 1{,}6181^2 \approx 2{,}6182} \leq 1{,}6181^k \end{aligned}$$

Basis raten

Beispiel: Verzweigungsvektor (1, 2)

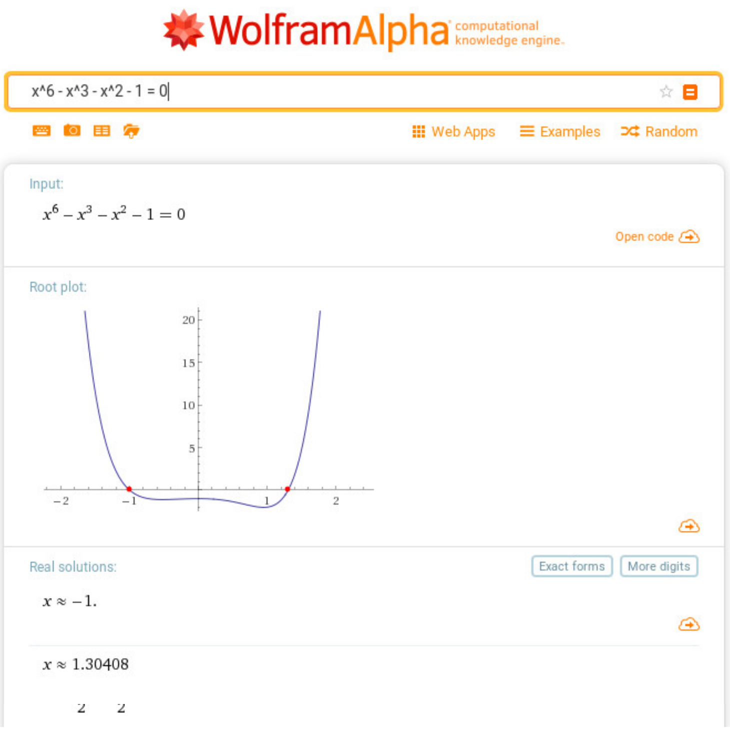
- Rekurrenz:

$$T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

- finde möglichst kleines $\lambda > 0$, sodass: $T(k) \leq c \cdot \lambda^k$
- wähle λ, sodass: $c \cdot \lambda^{k-1} + c \cdot \lambda^{k-2} \leq c \cdot \lambda^k$
  (dann gilt: $T(k) = T(k-1) + T(k-2) \leq c \cdot \lambda^{k-1} + c \cdot \lambda^{k-2} \leq c \cdot \lambda^k$)
- löse: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
- „geratene“ Lösung: $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq 1{,}6181$

Allgemein

- Verzweigungsvektor: $(d_1, \dots, d_\ell)$
- d = Maximum der d_i
- löse: $0 = \lambda^d - \lambda^{d-d_1} - \cdots - \lambda^{d-d_\ell}$
- Beispiel: Verzweigungsvektor $(3, 4, 6)$
- löse: $0 = \lambda^6 - \lambda^3 - \lambda^2 - 1$



Zurück zu Vertex Cover

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

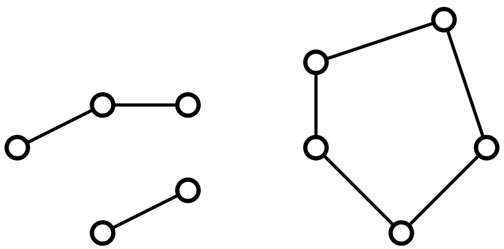
Bisher gesehen

- für eine Kante uv, wähle u oder $v \rightarrow$ Verzweigungsvektor $(1,1)$
- für Knoten v mit $\deg(v) \geq 2$, wähle v oder $N(v) \rightarrow$ Vektor $(1,2)$

Warum gibt es immer einen Knoten v mit $\deg(v) \geq 2$?

Geht es besser?

- gibt es auch immer ein $v \in V$ mit $\deg(v) \geq 3$?
- falls nicht: G besteht aus Pfaden und Kreisen
- $\deg(v) \leq 2$ für alle $v \in V \Rightarrow$ in poly-Zeit lösbar
- also: für Knoten v mit $\deg(v) \geq 3$, wähle v oder $N(v) \rightarrow$ Vektor $(1,3)$

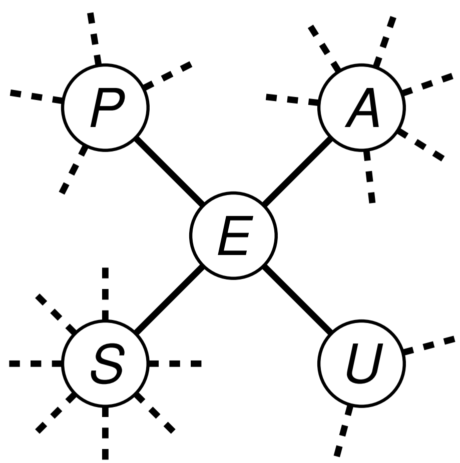


Geht es noch besser?

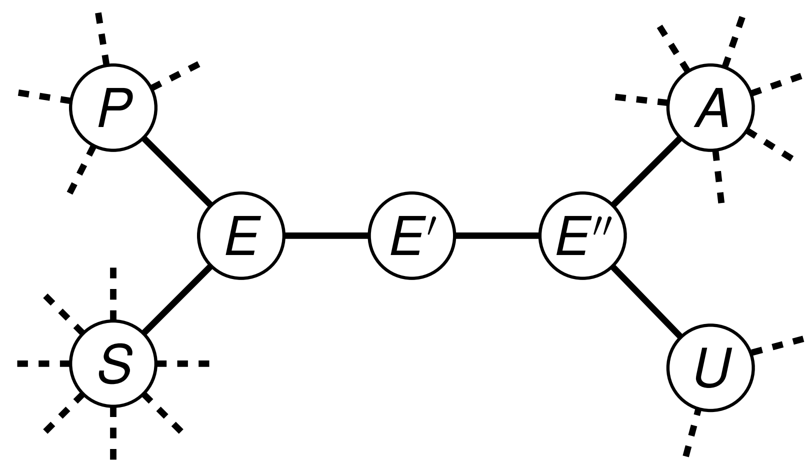
- Vertex Cover ist NP-schwer für Graphen mit Maximalgrad 3
- Verzweigungsvektor $(1,4)$ erhält man nicht genauso leicht

Was passiert hier?

Was erreicht man mit der folgenden Konstruktion?



G



G'

Antwort

- G hat VC der Größe $k \Leftrightarrow G'$ hat VC der Größe $k+1$
- Grad von E wurde von 4 auf 3 reduziert
- lässt sich auf höhere Grade verallgemeinern
- man kann so also zeigen, dass VERTEX COVER für Graphen mit Maximalgrad 3 NP-schwer ist

Lieber eliminieren als ignorieren

Knoten mit kleinem Grad

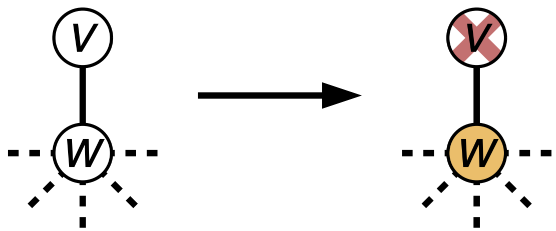
- eben: ignoriere Knoten v wenn $\deg(v) = 1$ bzw. $\deg(v) = 2$
- jetzt: eliminiere solche Knoten

Warum sollte das besser sein?

- Instanz verkleinern ist immer gut
- schränkt im weiteren Verlauf die Klasse der möglichen Instanzen ein
- hilft bei der Argumentation für spätere Fälle (für $v \in V$ gilt $\deg(v) \geq 3$)

Regel 1: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 1$

- es ist nie sinnvoll v zu wählen
- wähle also Nachbarn w von v

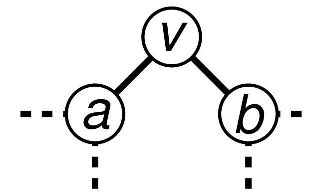


Beachte

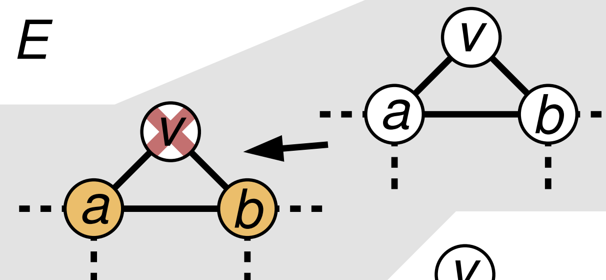
- das ist nicht wirklich eine Verzweigungsregel, sondern eine Reduktionsregel (bzw. Verzweigung mit Vektor (1))
- verschlechtert die Basis in der Laufzeit aber sicher nicht

Knoten mit Grad 2

Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$ (sei $N(v) = \{a, b\}$)

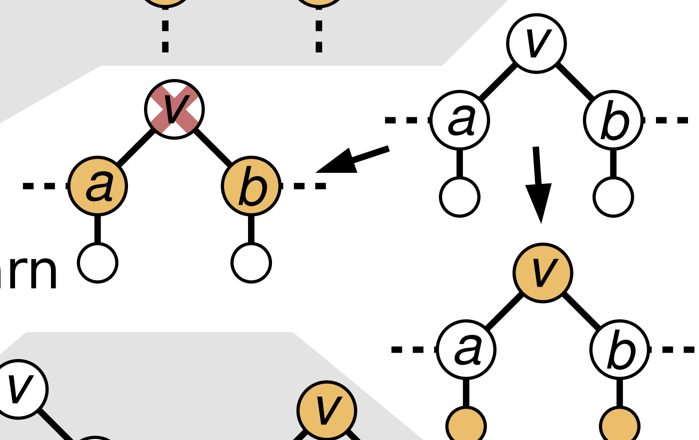


- falls a gewählt wird, macht es keinen Sinn v zu wählen
- wähle entweder a und b oder keinen der beiden
- keinen der beiden ist problematisch, wenn $ab \in E$



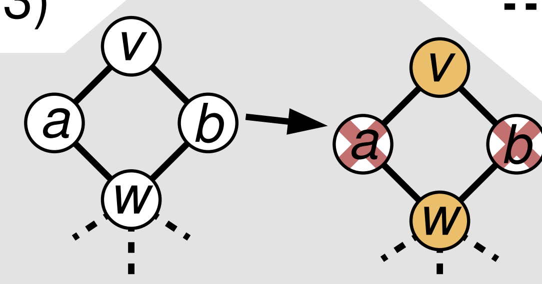
Fall 2.1: $ab \in E$

- zwei der drei Knoten müssen gewählt werden
- es ist immer besser a und b zu wählen
- keine Verzweigung nötig



Fall 2.2: $|N(a) \cup N(b)| \geq 3$

- Bsp: a und b haben je einen anderen Nachbarn
- wähle $\{a, b\}$ oder $N(a) \cup N(b) \to$ Vektor $(2, 3)$



Fall 2.3: $N(a) \cup N(b) = \{v, w\}$

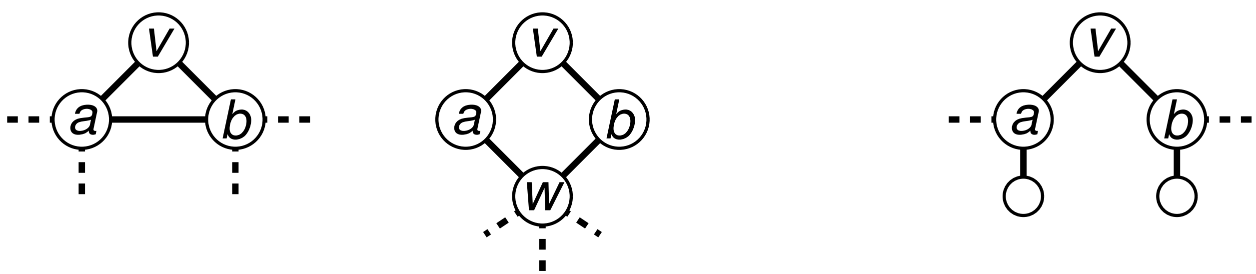
- es ist immer besser v und w zu wählen
- keine Verzweigung nötig

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 2

Grobe Strategie bei Knoten mit Grad 2

- Fallunterscheidung, wie „unabhängig“ die Nachbarschaft von v ist
- Fall 2.1: Nachbarn sind direkt verbunden
- Fall 2.3: Nachbarn teilen sich Nachbarn
- Fall 2.2: halbwegs unabhängige Nachbarschaften



- unabhängige Nachbarschaften $\Rightarrow$ große Vereinigungen von Nachbarschaften $\Rightarrow$ gute Verzweigungsvektoren
- abhängige Nachbarschaften $\Rightarrow$ wegdiskutierbar (mittels Reduktion)

Ziel im Folgenden

- ähnliches Vorgehen für $\deg(v) = 3$
- nutze, dass $\deg(u) \geq 3$ für alle $u \in V$

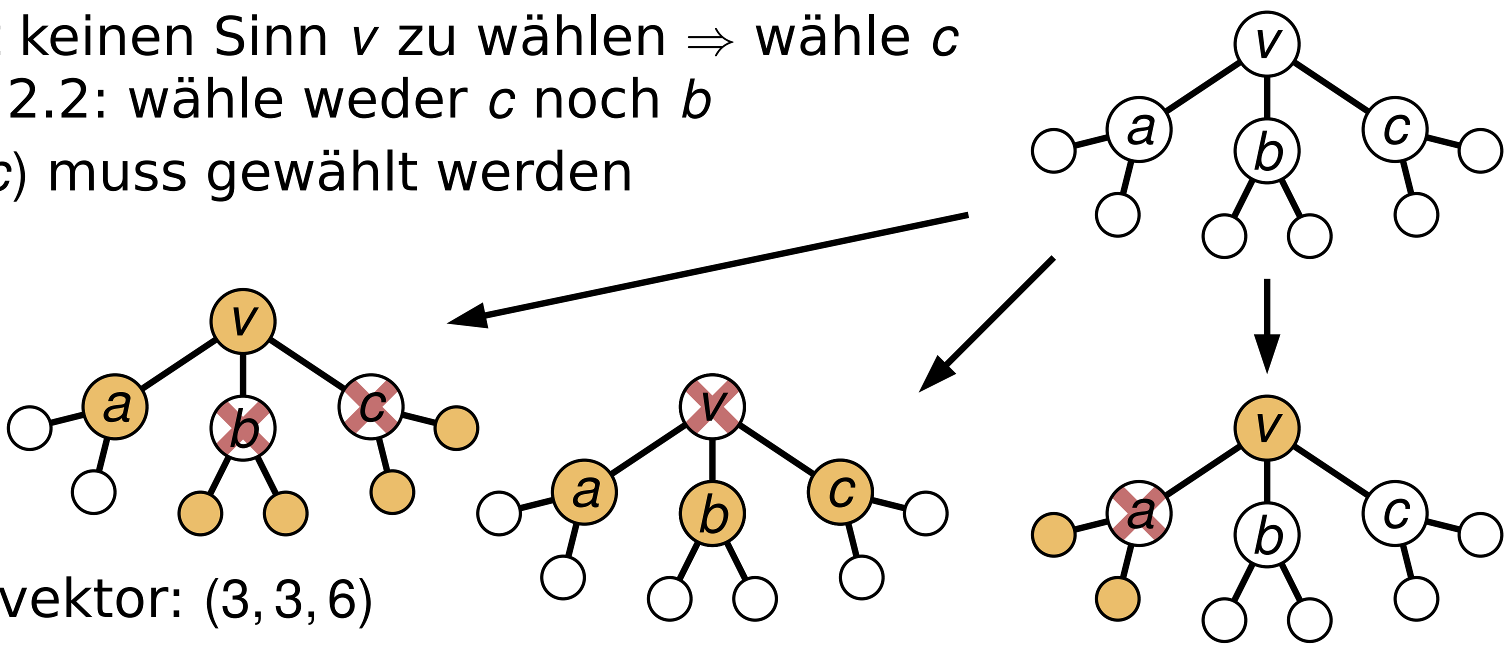
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)

Fall 3.1: $N(a), N(b), N(c), N(v)$ schneiden sich paarweise höchstens in v

- Möglichkeit 1: wähle a nicht
  $\Rightarrow$ $N(a)$ muss gewählt werden
- Möglichkeit 2: wähle a
  - Möglichkeit 2.1: wähle zusätzlich b
    $\Rightarrow$ es macht keinen Sinn v zu wählen $\Rightarrow$ wähle c
  - Möglichkeit 2.2: wähle weder c noch b
    $\Rightarrow$ $N(b) \cup N(c)$ muss gewählt werden



- Verzweigungsvektor: $(3, 3, 6)$

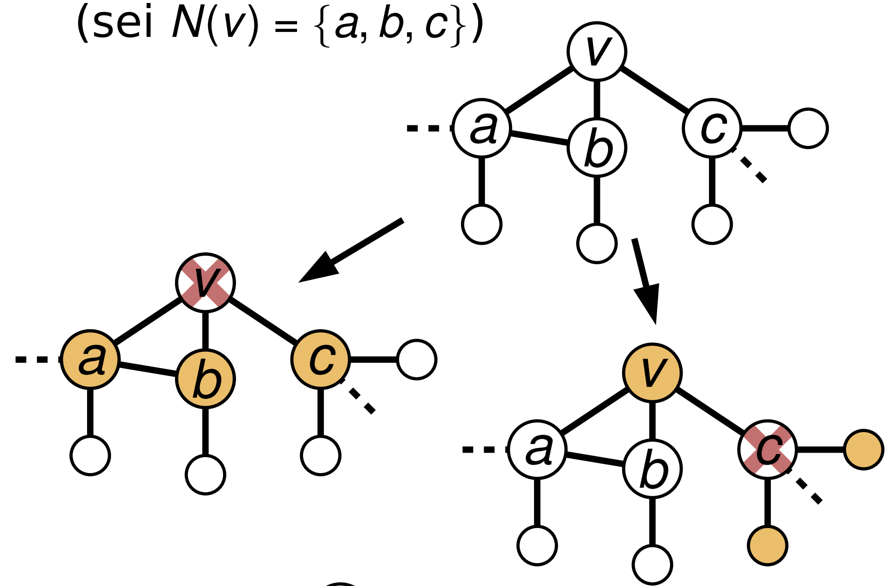
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Knoten mit Grad 3

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$ (sei $N(v) = \{a, b, c\}$)

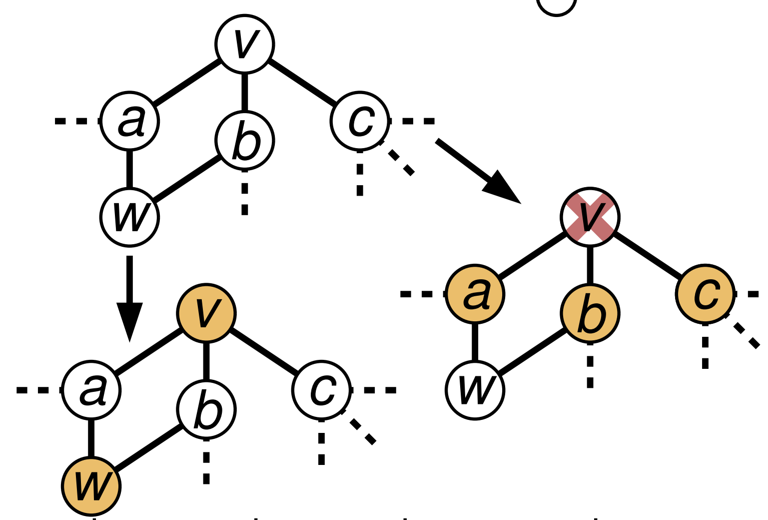
Fall 3.2: $ab \in E$

- Möglichkeit 1: wähle c nicht
  $\Rightarrow$ $N(c)$ muss gewählt werden
- Möglichkeit 2: wähle c
  $\Rightarrow$ es macht keinen Sinn v zu wählen
  $\Rightarrow$ wähle zusätzlich $\{a, b\}$
- Verzweigungsvektor: $(3, 3)$



Fall 3.3: a und b haben gem. Nachbarn w

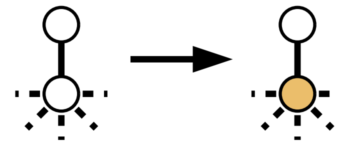
- Möglichkeit 1: wähle $\{v, w\}$
- Möglichkeit 2: wähle $\{a, b\}$
  $\Rightarrow$ es macht keinen Sinn v zu wählen
  $\Rightarrow$ wähle zusätzlich c
- Verzweigungsvektor: $(2, 3)$



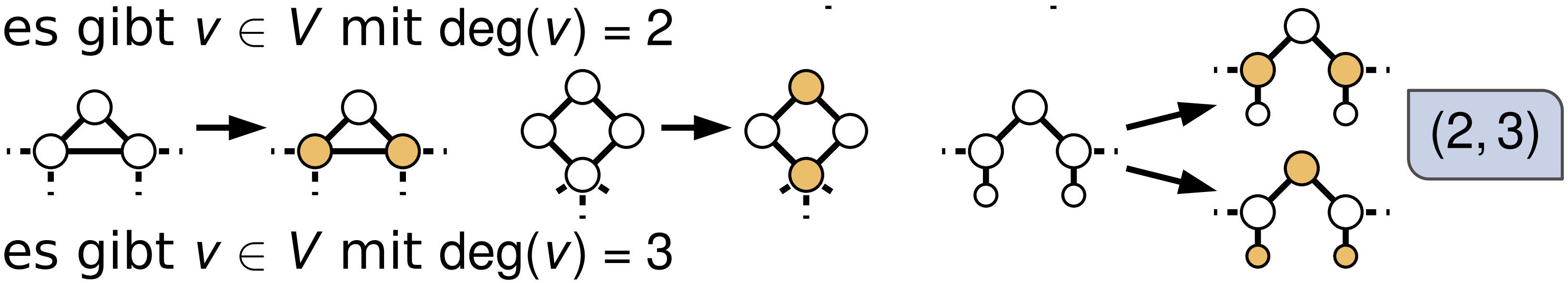
Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Bisheriger Stand

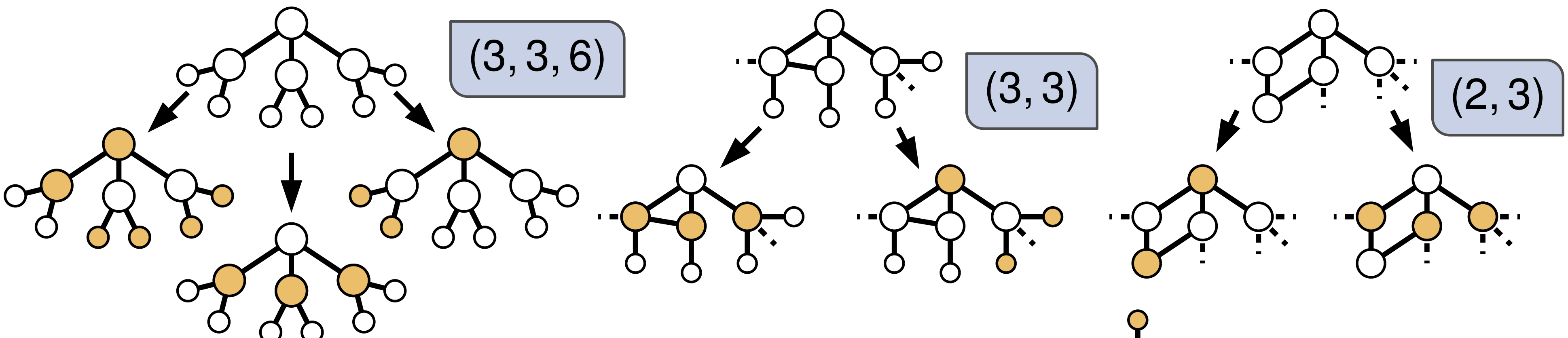
Regel 1: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 1$



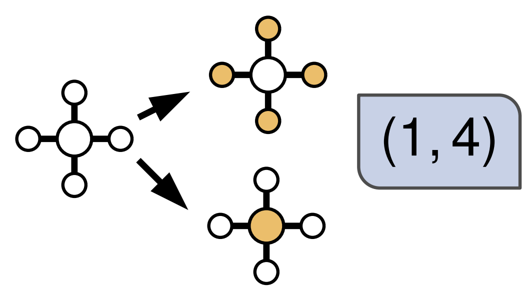
Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$



Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$



Regel 4: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 4$



$\Rightarrow$ **Gesamtlaufzeit:** $1{,}381^k \cdot n^{O(1)}$

Verzweigungsvektor	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(2, 3)	(3, 3)	(3, 3, 6)	(3, 4, 6)
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Geht es noch besser?

Regel 1: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 1$

Regel 2: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 2$

$\boxed{(2, 3)}$

Regel 3: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) = 3$

$\boxed{(3, 3, 6)}$ $\boxed{(3, 3)}$ $\boxed{(2, 3)}$

Regel 4: es gibt $v \in V$ mit $\deg(v) \geq 5$

$\boxed{(1, \deg(v))}$

Regel 5: alle Knoten haben Grad 4

$\boxed{(1, 4)}$

Behauptung: die Gesamtlaufzeit ist $1{,}342^k \cdot n^{O(1)}$

Intuitive Begründung: Regel 5 kann in jedem Teilbaum nur ein Mal angewendet werden $\Rightarrow$ Verzweigungsvektor $(1, 4)$ kann man ignorieren

Verzweigungsvektor	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(3,3,6)$	$(3,4,6)$
Basis b	2	1,618	1,466	1,381	1,325	1,325	1,26	1,342	1,305

Zusammenfassung & Literaturhinweis

Theorem
Vertex Cover mit der Lösungsgröße k als Parameter kann in $1{,}342^k \cdot n^{O(1)}$ Zeit gelöst werde.

Beschränkte Suchbäume

- mit besseren Verzweigungsregeln kann man die Basis verkleinern
- Verzweigungsvektoren helfen bei der Analyse
- Nutzung des „schlechtesten" aller Verzweigungsvektoren liefert potentiell ungenaue Schranke (Bsp: verzweige meist mit $(5, 5)$; selten mit $(1, 1)$)

Kleinere Basis

- beste Basis seit 2010: $O(1{,}2738^k + kn)$ `doi.org/10.1016/j.tcs.2010.06.026`
- Resultat von 2024: $O^*(1{,}252\,84^k)$ `https://doi.org/10.4230/LIPIcs.STACS.2024.40`
- siehe auch: `http://fpt.wikidot.com/fpt-races`

Problem	f(k)	vertices in kernel	Reference/Comments
Vertex Cover	1.2529^k	$2k$	42
Connected Vertex Cover	2^k	no $k^{O(1)}$	26, randomized algorithm
Multiway Cut	2^k	not known	21, 38: $O(k^{s+1})$-vertex kernel with s terminals
Directed Multiway Cut	$2^{O(k^3)}$	no $k^{O(1)}$	34
Almost-2-SAT (VC-PM)	2.3146^k	$O(k^6)$	37, 38, randomized kernel
Multicut	$2^{O(k^3)}$	no $k^{O(1)}$	22, 35