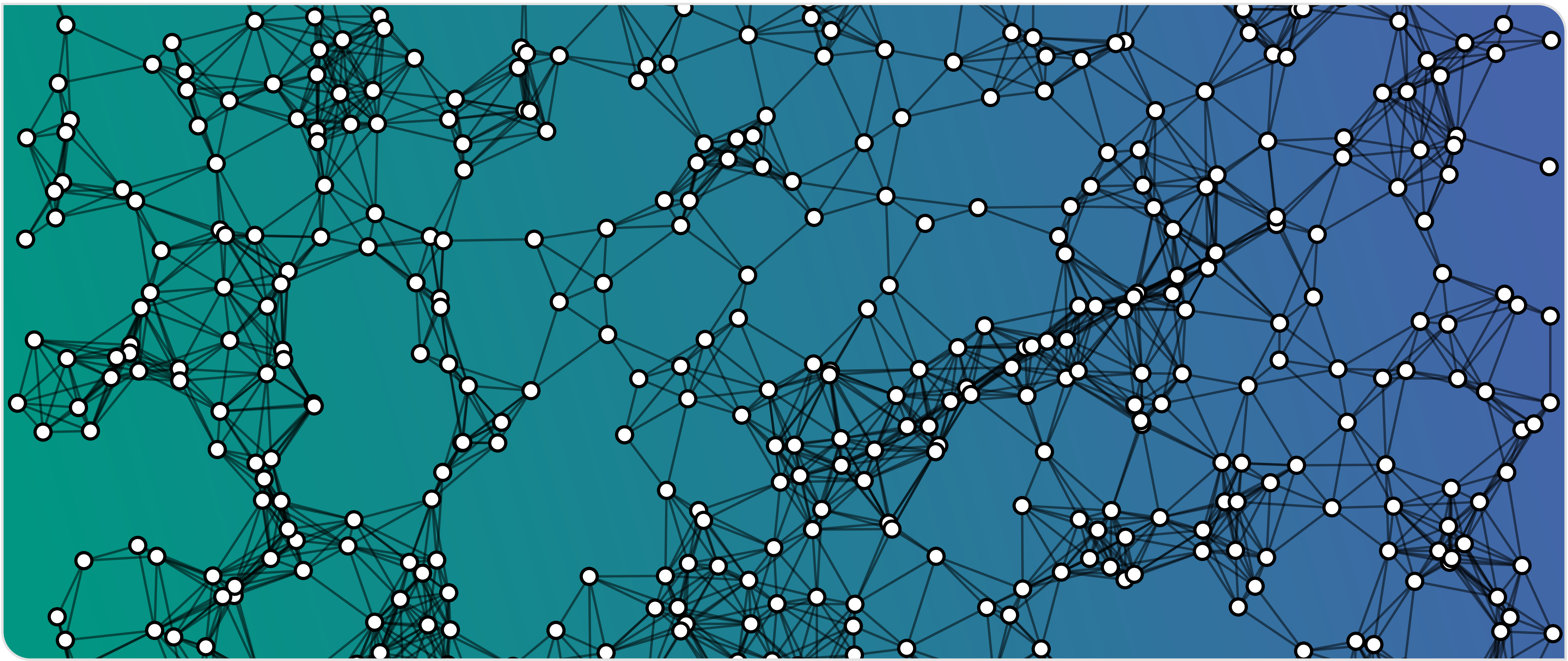
Karlsruher Institut für Technologie

# Parametrisierte Algorithmen

## FPT-Techniken: Suchbäume, Kernbildung, iterative Kompression



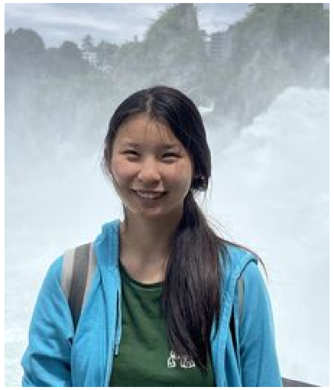
# Allgemeines

## Beteiligte


Thomas


Jean-Pierre


Marcus


Wendy

?
Ihr

## Materialien & Infos

- Vorlesungsfolien, Übungsblätter, Online-VL von Sommer 21
- Homepage: `https://scale.iti.kit.edu/teaching/2024ws/param_algo/`
- Discord: `https://discord.gg/JrM8qaJvCK` (falls ihr schon dort seid: sendet `!help` an scale-bot)

## Voraussetzungen

- gutes algorithmisches Verständnis
- inhaltlich: keine

# Ablauf

| | Woche $i-1$ | | | | | | | Woche $i$ | | | | | | | Woche $i+1$ | | | | | | | Woche $i+2$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Mo | Di | Mi | Do | Fr | Sa | So | Mo | Di | Mi | Do | Fr | Sa | So | Mo | Di | Mi | Do | Fr | Sa | So | Mo | Di | Mi | Do | Fr | Sa | So |
| ($i$ gerade) | | | Übungsblatt $\frac{i}{2}$ | | | | | | | | | | | | | | Übungsblatt $\frac{i}{2}+1$ | | | | | | | | | | | |

**Vorlesung**

- Vorlesung mit Folien
- neuer Stoff

**Aktiv-Session**

- gemeinsames Erarbeiten weiterführender Aspekte
- Kuriositäten
- gemeinsames Papier-Lesen

**Prüfung**

- mündlich
- Zulassung: Übungsschein

**Übungsblätter**

- Abgabe in (Zweier-)Gruppen
- korrigiert von Sven

**Übungen**

- mit Jean-Pierre, Marcus, Wendy
- Übung des Stoffs
- Unterstützung bei Übungsblättern
- ???

# Übungsschein

**Ziel:** $\frac{1}{2}$ der Punkte auf **jedem** Übungsblatt

**Und wenn ich mal nicht auf die Lösung komme?**

- es gibt auch Punkte für Erklärungen, was nicht funktioniert
- schreibt auf, was ihr versucht habt und warum das nicht geht
- außerdem: viele Gelegenheiten für Unterstützung
  - sprecht mit euren Kommiliton:innen
  - fragt in der Übung
  - fragt via Discord

**Und wenn ich ein Blatt mal nicht abgeben kann?**

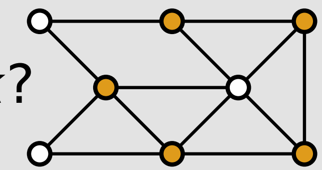
- uns ist klar, dass im Leben auch noch andere Dinge passieren
- sprecht uns an, wir finden eine Lösung

**Unser Ziel**

- ihr beschäftigt euch aktiv mit dem Stoff und schreibt Lösungen auf
- Übungsschein ist dann keine große Hürde

# Parametrisierte Sichtweise

**Problem: $k$-Vertex Cover**
Gibt es im Graphen $G = (V, E)$ ein Vertex Cover der Größe $k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



## Können wir das effizient lösen?

- $k$-Vertex Cover ist NP-vollständig

## Und was, wenn die betrachteten Graphen gutartig sind?

- Was, wenn $G$ kleinen Maximalgrad hat?
- Was, wenn das minimale Vertex Cover in $G$ klein ist?
- Was, wenn $G$ kleine chromatische Zahl hat?
- Oder kleine Cliquenzahl? Kleine Baumweite? Kleine . . . ?

## Ziel

- Laufzeitanalyse nicht nur bzgl. der Eingabegröße
- sondern außerdem bzgl. eines (oder mehrerer) Parameter

# Grundlegende Definitionen

Karlsruher Institut für Technologie

**Definition**
Ein **parametrisiertes Problem** ist eine Sprache $L \subseteq \Sigma^\star \times \mathbb{N}$. Für eine Instanz $(x, k) \in \Sigma^\star \times \mathbb{N}$ ist $k$ der **Parameter**.

**Beachte:** ein Algorithmus löst das parametrisierte Problem $L$, wenn es für jede Instanz $(x, k)$ korrekt entscheidet ob $(x, k) \in L$

**Definition**
Ein parametrisiertes Problem $L$ ist **fixed parameter tractable (FPT)**, wenn es einen Algorithmus gibt, der $L$ in $O(f(k)n^c)$ löst. Dabei ist $f$ eine berechenbare Funktion, $n$ die Eingabegröße und $c$ eine Konstante.

Welche der Laufzeiten gehören zu einem FPT-Algorithmus?

$A = 2^k(n^4 + k^2)$ $\quad B = k^{\log n}$ $\quad C = 2^{k^2+2\log n}$ $\quad D = k^2 n!$ $\quad E = n^{17} k^{k!}$

$F = n^{\log k}$ $\quad G = k! n \log n$ $\quad H = n^k n^2$ $\quad I = n^{\frac{3}{2}}$ $\quad J = 2^{k \log n}$

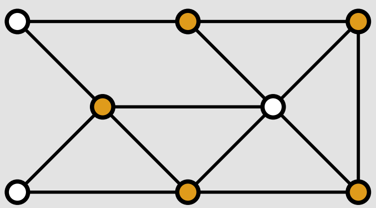
$$\text{FPT} \Leftrightarrow \begin{cases} k \text{ konstant} \Rightarrow \text{polynomielle Laufzeit} \\ k \text{ konstant} \Rightarrow \text{asymptotische Laufzeit unabhängig von } k \end{cases}$$

# Beispiel: parametrisiertes Vertex Cover

**Definition**
Ein **parametrisiertes Problem** ist eine Sprache $L \subseteq \Sigma^\star \times \mathbb{N}$. Für eine Instanz $(x, k) \in \Sigma^\star \times \mathbb{N}$ ist $k$ der **Parameter**.

**Definition**
Ein parametrisiertes Problem $L$ ist **fixed parameter tractable (FPT)**, wenn es einen Algorithmus gibt, der $L$ in $O(f(k)n^c)$ löst. Dabei ist $f$ eine berechenbare Funktion, $n$ die Eingabegröße und $c$ eine Konstante.

**Problem: Vertex Cover**
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter $k$.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



## Komplexität

- Vertex Cover ist NP-vollständig
- Aufzählung aller $\binom{n}{k}$ Teilmengen der Größe $k$ (Brute-Force): $O(n^k m)$
- gilt Vertex Cover $\in$ FPT?

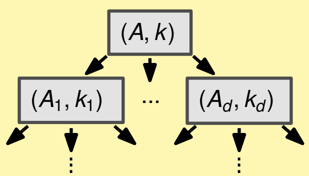
polynomiell für konstantes $k$!

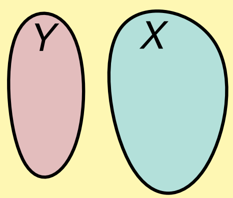
# Inhalt

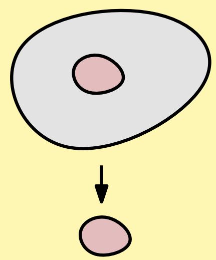
Karlsruher Institut für Technologie

## Basic Toolbox

- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung

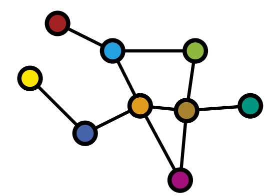


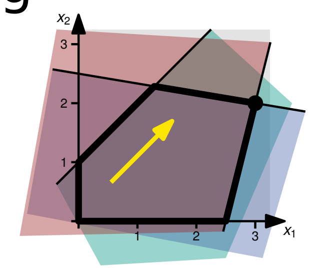



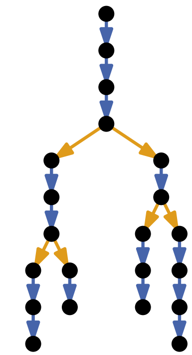



## Erweiterte Toolbox

- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding





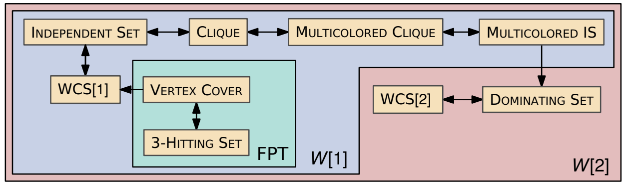


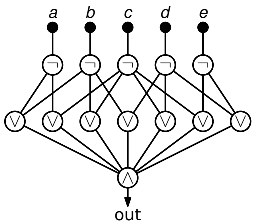
## Baumweite

- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem

## Untere Schranken

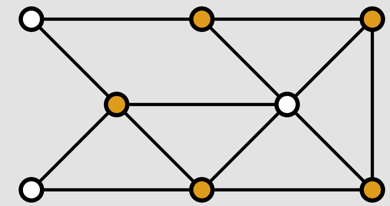
- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH

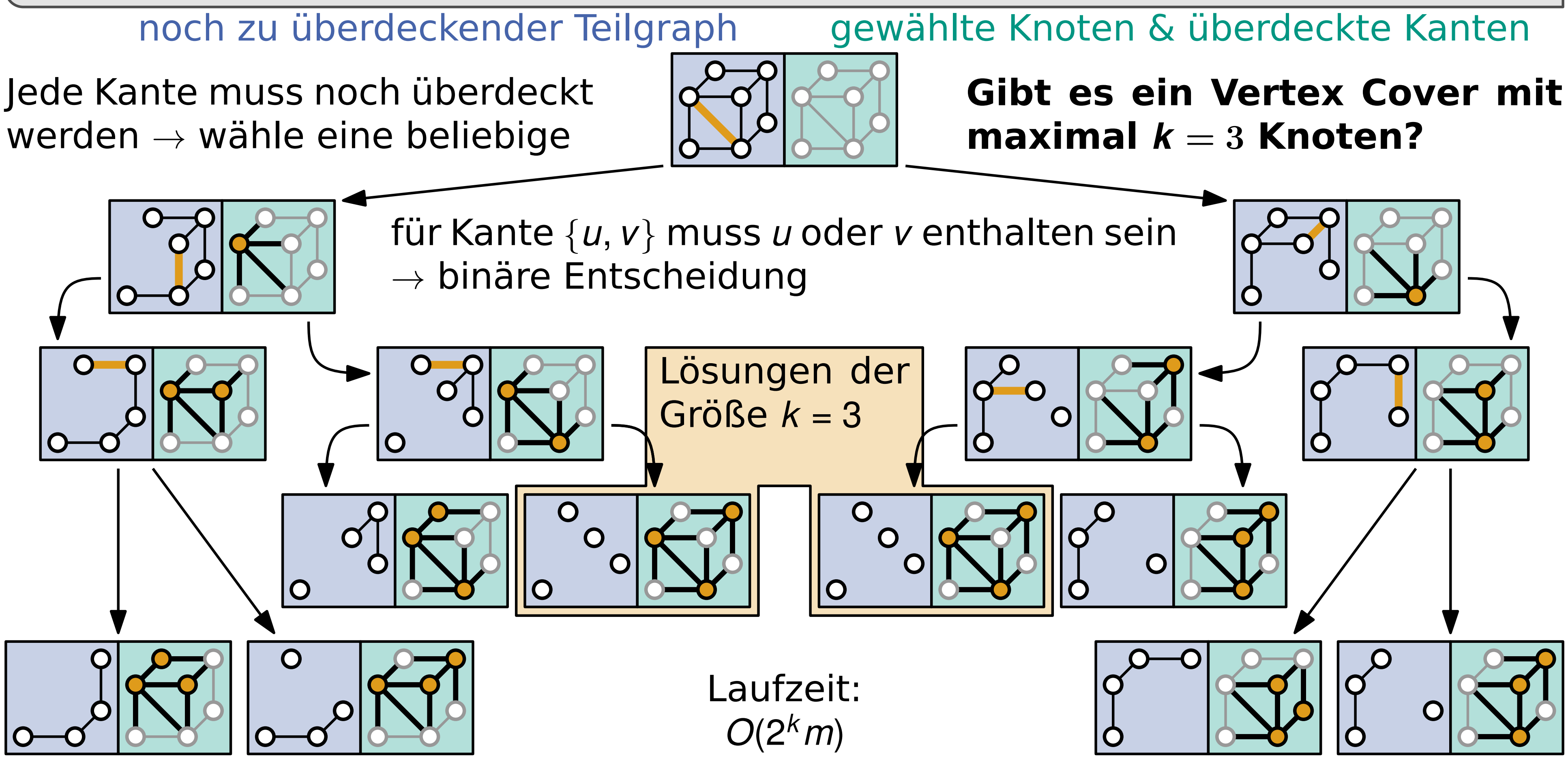


# Beschränkter Suchbaum

**Problem: Vertex Cover**
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter $k$.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

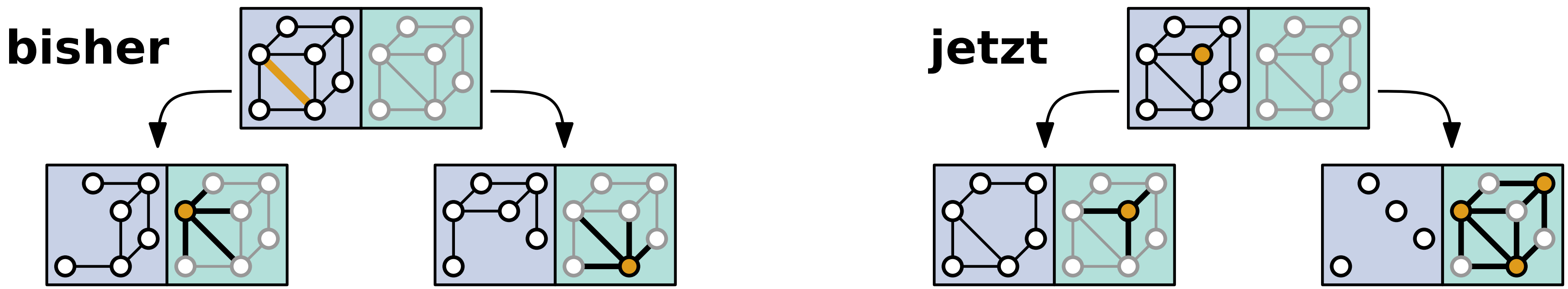




# Beschränkterer Suchbaum

## Geht es schneller?

- Ziel: reduziere die Größe des Suchbaums (bisher: $2^k$ Blätter)
- Verzweigungsregel bisher: für Kante $\{u, v\}$ wähle entweder $u$ oder $v$
- neue Verzweigungsregel: für Knoten $v$ wähle entweder $v$ oder $N(v)$




## Wie viele Blätter hat der resultierende Baum abhängig von $k$?

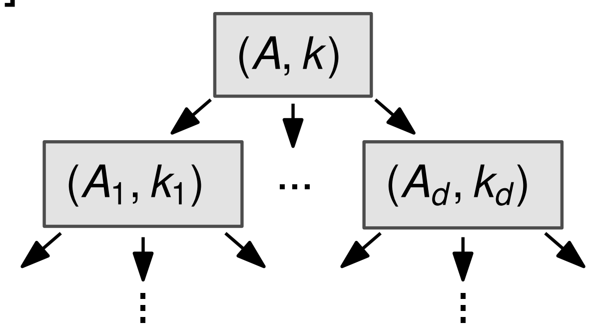
- wähle für $v$ immer einen Knoten mit Grad $\geq 2$
- obere Schranke für #Blätter: $T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$
- wir erhalten: $T(k) \leq 1{,}6181^k$
- Wie kommt man auf 1,6181? Geht es besser? $\longrightarrow$ nächste Vorlesung

# Grundlegende Techniken

**Beschränkter Suchbaum** (Bounded Search Tree)

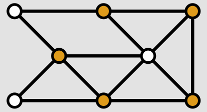
- für eine Instanz $(A, k)$ bilde, in Zeit $n^c$, $(A_1, k_1), \dots, (A_d, k_d)$, sodass:
  $(A, k)$ ist lösbar $\Leftrightarrow$ $(A_i, k_i)$ ist lösbar für ein $i \in [1, d]$
- beschränke $d$ durch eine Funktion $f_1(k)$
- beschränke Verzweigungstiefe durch $f_2(k)$

  (Beispiel: Parameter wird in jedem Schritt kleiner)
- $\Rightarrow$ FPT-Algo mit Laufzeit $O(f_1(k)^{f_2(k)} n^c)$



# Kernbildung am Beispiel Vertex Cover

**Problem: VERTEX COVER**
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter $k$.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



## Reduktionsregel 1

- lösche einen isolierten Knoten

## Reduktionsregel 2

- füge einen Knoten $v$ mit $\deg(v) > k$ zum VC hinzu
- neue Instanz: lösche $v$, verringere $k$ um 1

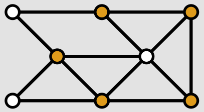
**Lemma**
Reduktionsregel 1 ist sicher. (neue Instanz lösbar $\Leftrightarrow$ alte Instanz lösbar)

**Beweis:** offensichtlich

# Kernbildung am Beispiel Vertex Cover

Karlsruher Institut für Technologie

**Problem: VERTEX COVER**
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter $k$.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



## Reduktionsregel 1

- lösche einen isolierten Knoten

## Reduktionsregel 2

- füge einen Knoten $v$ mit $\deg(v) > k$ zum VC hinzu
- neue Instanz: lösche $v$, verringere $k$ um 1

**Lemma**
Reduktionsregel 2 ist sicher. (neue Instanz lösbar $\Leftrightarrow$ alte Instanz lösbar)

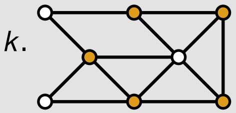
## Beweis

- entweder $v$ oder jeder Nachbar von $v$ muss im VC enthalten sein
- wählt man $v$ nicht, so wird das VC sicher zu groß ($\deg(v) > k$)

# Kernbildung am Beispiel Vertex Cover

Karlsruher Institut für Technologie

**Problem: Vertex Cover**
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter $k$.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



## Reduktionsregel 1

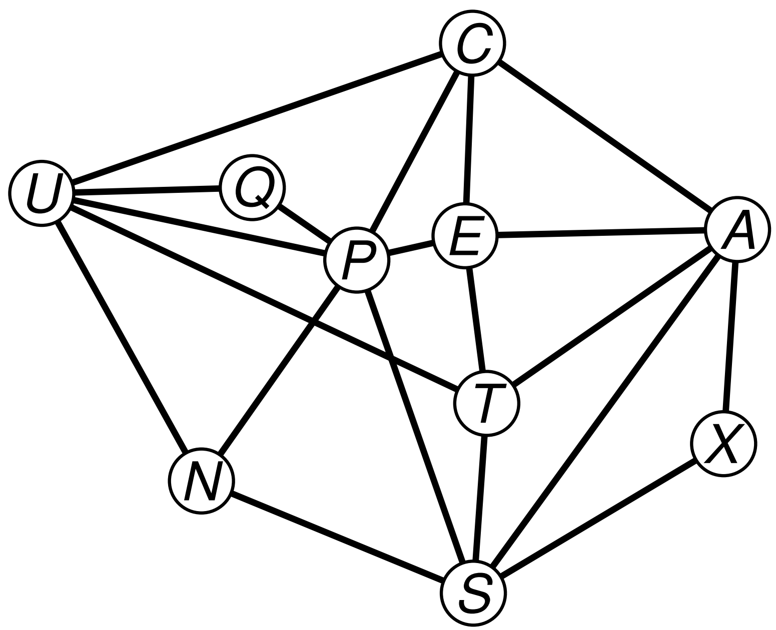
- lösche einen isolierten Knoten

## Reduktionsregel 2

- füge einen Knoten $v$ mit $\deg(v) > k$ zum VC hinzu
- neue Instanz: lösche $v$, verringere $k$ um 1

## Wende Regel 2 so oft an, wie möglich

$k = 5$

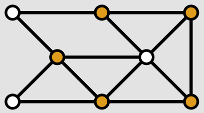



## Lösungswort:

# Kernbildung am Beispiel Vertex Cover

Karlsruher Institut für Technologie

**Problem: VERTEX COVER**
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter $k$.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



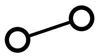
## Reduktionsregel 1

- lösche einen isolierten Knoten

## Reduktionsregel 2

- füge einen Knoten $v$ mit $\deg(v) > k$ zum VC hinzu
- neue Instanz: lösche $v$, verringere $k$ um 1

## Reduktionsregel 3

- falls Regel 1 und Regel 2 nicht anwendbar sind und $m > k^2$
- neue Instanz: $(H, 0)$, mit $H =$  (konstant große NEIN-Instanz)

**Lemma**
Reduktionsregel 3 ist sicher. (neue Instanz lösbar $\Leftrightarrow$ alte Instanz lösbar)

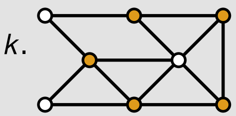
## Beweis

- Regel 2 nicht anwendbar $\Rightarrow \deg(v) \leq k$ für alle $v \in V$
- jeder Knoten deckt maximal $k$ Kanten ab
- $k$ Knoten decken maximal $k^2$ Kanten ab
- Instanz nicht lösbar, da $m > k^2$

# Kernbildung am Beispiel Vertex Cover

Karlsruher Institut für Technologie

**Problem:** VERTEX COVER
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter $k$.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



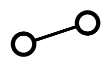
## Reduktionsregel 1

- lösche einen isolierten Knoten

## Reduktionsregel 2

- füge einen Knoten $v$ mit $\deg(v) > k$ zum VC hinzu
- neue Instanz: lösche $v$, verringere $k$ um 1

## Reduktionsregel 3

- falls Regel 1 und Regel 2 nicht anwendbar sind und $m > k^2$
- neue Instanz: $(H, 0)$, mit $H =$  (konstant große NEIN-Instanz)

## Kernbildung

- wende Reduktionsregel so lange an, wie möglich
- übrig bleibt der Problemkern der Größe $O(k^2) \to$ Brute-Force

**Theorem**
VERTEX COVER hat einen Kern mit $O(k^2)$ Knoten und $O(k^2)$ Kanten. Er kann in $O(m)$ Zeit berechnet werden.

# Kernbildung – Formale Definition

**Definition**
Eine **Kernbildung** für ein parametrisiertes Problem $L$ ist ein Algorithmus, der jede Eingabe $(x,k)$ in polynomieller Zeit (gemessen in $|x|$) in eine Eingabe $(x',k')$ (den **Kern**) überführt, sodass:

- $(x,k) \in L$ genau dann wenn $(x',k') \in L$, und
- $|x'| + k' \leq g(k)$ für eine von $x$ unabhängige Funktion $g$.

**Theorem**
Ein entscheidbares parametrisiertes Problem $L$ ist in FPT genau dann wenn es eine Kernbildung für $L$ gibt.

**Beweis (der anderen Richtung)**

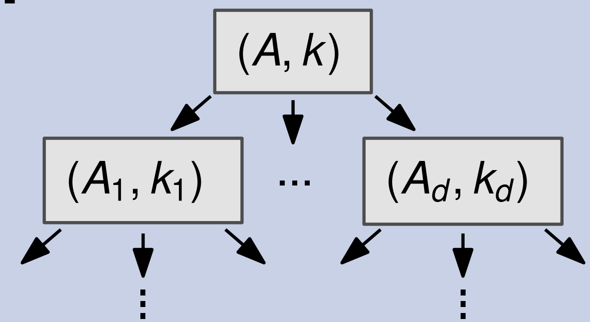
- sei $\mathcal{A}$ ein Algorithmus, der $(x,k) \in L$ in $f(k)|x|^c$ entscheidet
- lasse $\mathcal{A}$ auf $(x,k)$ für $|x|^{c+1}$ Schritten laufen
- falls $\mathcal{A}$ fertig wird: Problem gelöst $\to$ trivialer Kern
- sonst: $|x|^{c+1} < f(k)|x|^c \Rightarrow |x| < f(k)$
- $(x, k)$ selbst ist schon ein geeigneter Kern $\to$ gib $(x, k)$ zurück

# Grundlegende Techniken

## Beschränkter Suchbaum (Bounded Search Tree)

- für eine Instanz $(A, k)$ bilde, in Zeit $n^c$, $(A_1, k_1), \dots, (A_d, k_d)$, sodass: $(A, k)$ ist lösbar $\Leftrightarrow$ $(A_i, k_i)$ ist lösbar für ein $i \in [1, d]$
- beschränke $d$ durch eine Funktion $f_1(k)$
- beschränke Verzweigungstiefe durch $f_2(k)$

  (Beispiel: Parameter wird in jedem Schritt kleiner)
- $\Rightarrow$ FPT-Algo mit Laufzeit $O(f_1(k)^{f_2(k)} n^c)$




## Kernbildung (Kernelization)

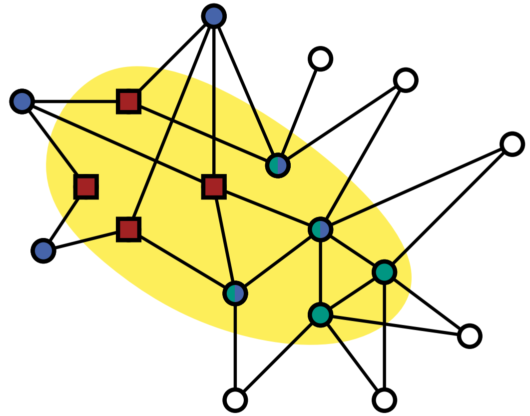
- wende sukzessive sichere Reduktionsregeln an
- zeige: übrig bleibt ein Kern, dessen Größe nur von $k$ abhängt

# Vertex Cover Compression

**Problem: Vertex Cover Compression**
Gegeben sind ein Graph $G$, ein Parameter $k$ und ein VC $Z$ der Größe $k+1$ in $G$. Gibt es ein VC der Größe $k$ in $G$?

## Idee

- rate eine Teilmenge $X \subseteq Z$; $Y = Z \setminus X$
- gibt es VC $Z'$ mit $|Z'| \leq k$ und $Z' \cap Z = X$?



**Fall 1:** $G[Y]$ enthält Kante $\Rightarrow$ $Z'$ existiert nicht
**Fall 2:** sonst gilt:

- $Z'$ muss alle Nachbarn $N(Y)$ von $Y$ enthalten
- $X \cup N(Y)$ ist ein VC
- es gibt das gewünschte VC $Z' \Leftrightarrow |X \cup N(Y)| \leq k$

## Algorithmus

- wende obige Prozedur auf jede Teilmenge $X \subseteq Z$ an
- es gibt $2^{k+1}$ solche Teilmengen
- Laufzeit $O(m)$ für jedes $X \Rightarrow$ insgesamt $O(2^k m)$

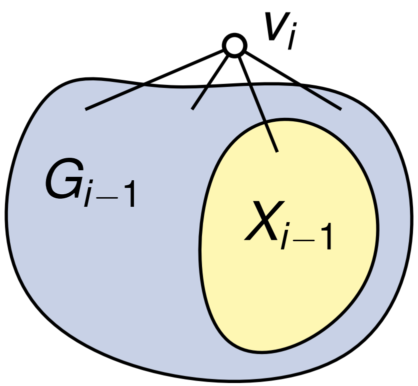
# Iterative Kompression

**Problem: Vertex Cover Compression**
Gegeben sind ein Graph $G$, ein Parameter $k$ und ein VC $Z$ der Größe $k+1$ in $G$. Gibt es ein VC der Größe $k$ in $G$?

**Gerade gesehen:** $O(2^k m)$-Algorithmus für Vertex Cover Compression

## Algorithmus für Vertex Cover

- iteriere über die Subgraphen $G_i$ bestehend aus den Knoten $v_1, \dots, v_i$
- Initialisierung: in $G_k$ bilden alle Knoten ein VC der Größe $k$
- Annahme für $i > k$: für $G_{i-1}$ kennen wir ein VC $X_{i-1}$ der Größe $k$
- $\Rightarrow X_{i-1} \cup \{v_i\}$ ist ein VC der Größe $k+1$ in $G_i$
- verwende Algo für Vertex Cover Compression:
  - **Fall 1:** $G_i$ hat ein VC der Größe $k \Rightarrow$ weiter mit $G_{i+1}$
  - **Fall 2:** $G_i$ hat kein VC der Größe $k \Rightarrow G$ hat kein VC der Größe $k \Rightarrow$ Abbruch




$\Rightarrow$ Algo für Vertex Cover mit Laufzeit $O(2^k nm)$

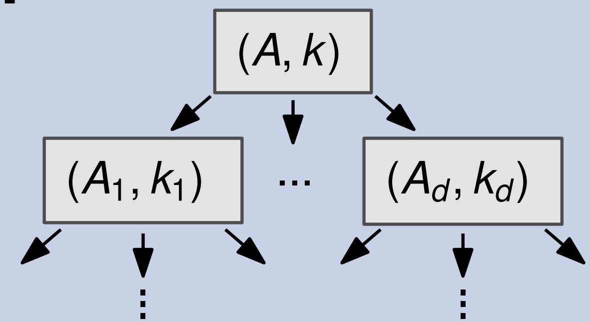
# Grundlegende Techniken



**Beschränkter Suchbaum** (Bounded Search Tree)

- für eine Instanz $(A, k)$ bilde, in Zeit $n^c$, $(A_1, k_1), \dots, (A_d, k_d)$, sodass: $(A, k)$ ist lösbar $\Leftrightarrow$ $(A_i, k_i)$ ist lösbar für ein $i \in [1, d]$
- beschränke $d$ durch eine Funktion $f_1(k)$
- beschränke Verzweigungstiefe durch $f_2(k)$

  (Beispiel: Parameter wird in jedem Schritt kleiner)
- $\Rightarrow$ FPT-Algo mit Laufzeit $O(f_1(k)^{f_2(k)} n^c)$




**Kernbildung** (Kernelization)

- wende sukzessive sichere Reduktionsregeln an
- zeige: übrig bleibt ein Kern, dessen Größe nur von $k$ abhängt

**Iterative Kompression** (Iterative Compression)

- Kompressionsalgo: löst das Problem unter der Annahme eine etwas zu große Lösung zu kennen
- vergrößere Instanz schrittweise und halte initiale Lösung durch wiederholte Kompression klein

# Zusammenfassung

Karlsruher Institut für Technologie

$$\textsc{Vertex Cover} \in \mathrm{FPT}$$

(wenn man die Lösungsgröße als Parameter verwendet!)

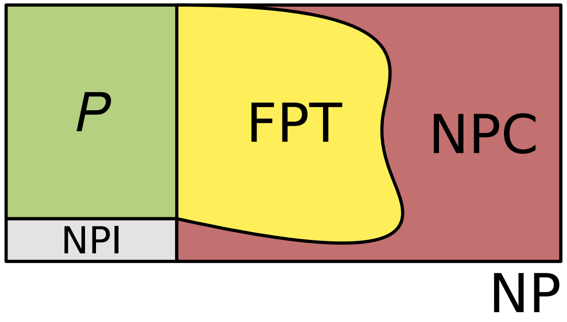
# Bonus: Wie verhält sich FPT zu NP?

## Formal korrekte Antwort: gar nicht

- $\mathrm{NP} \cap \mathrm{FPT} = \emptyset$ (NP enthält Probleme, FPT enthält parametrisierte Probleme)
- sei $L$ entscheidbar; es gibt Parametrisierungen $L'$ und $L''$ sodass:
  - $L' \in \mathrm{FPT}$ (Laufzeit des Algos als Parameter)
  - $L'' \notin \mathrm{FPT}$, außer wenn $L \in \mathrm{P}$ (konstanter Parameter)

## Typische Situation: Was wollen wir mit FPT erreichen?

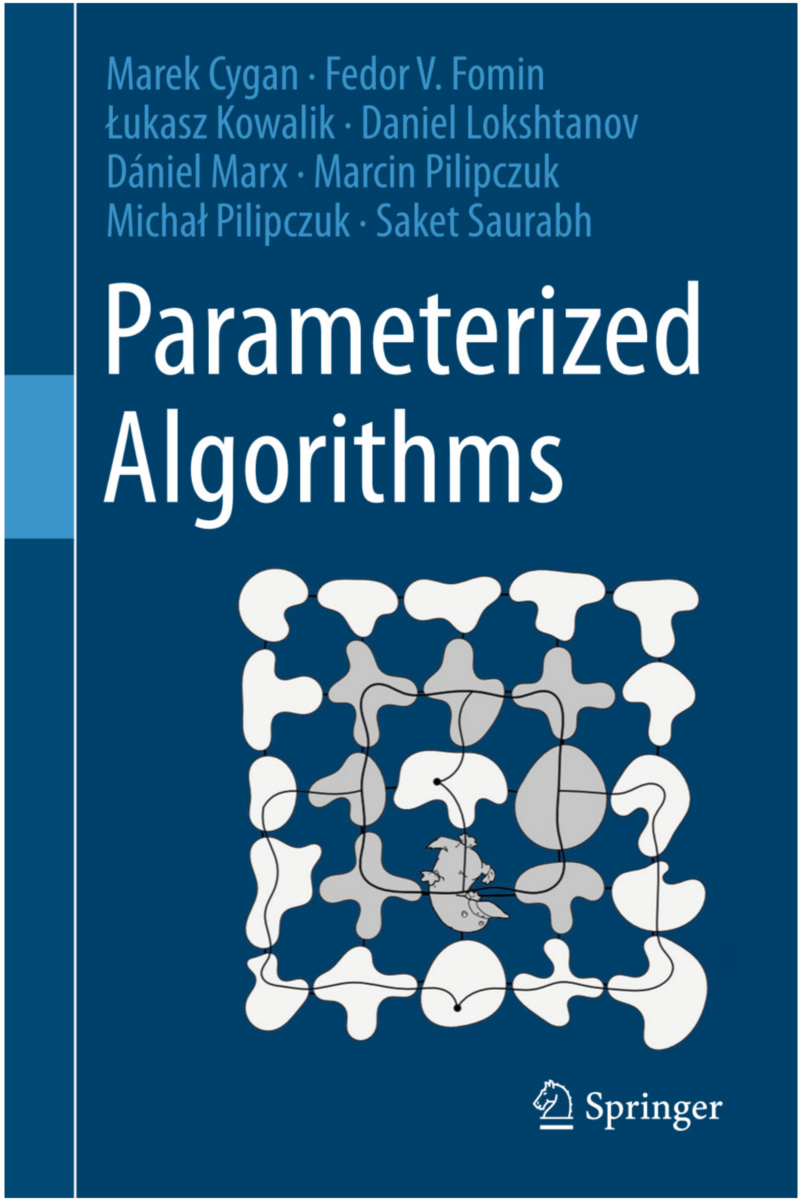
- löse Probleme in NPC halbwegs effizient
- wir betrachten hauptsächlich Probleme in NP
- gute Vorstellung: FPT schlägt eine Brücke zwischen P und NPC (auch wenn man das formal so nicht sagen kann)




## Zusatzhinweis: para-NP

- para-NP ist das Gegenstück zu NP für parametrisierte Probleme
- FPT verhält sich zu para-NP wie P zu NP

# Literaturhinweis




## Anmerkungen

- viele der behandelten Themen findet ihr so oder so ähnlich in diesem Buch
- aus dem Uninetz kostenlos abrufbar

`link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-21275-3`