Karlsruher Institut für Technologie

# Algorithmen für Routenplanung

**1. Vorlesung, Sommersemester 2024**

Adrian Feilhauer | 17. April 2024

# Organisatorisches

## Vorlesung

- Montags 14:00–15:30 Uhr
- Mittwochs 11:30–13:00 Uhr

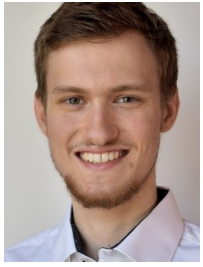
## Prüfung

- Prüfbar im Master
- Im Master: 5 ECTS
- VF: Algorithmentechnik

# Dozenten

Thomas
Bläsius

Adrian
Feilhauer



Moritz
Laupichler

Michael
Zündorf

## Vorlesungswebseite

https://scale.iti.kit.edu/teaching/2024ss/routenplanung/start

# Organisatorisches

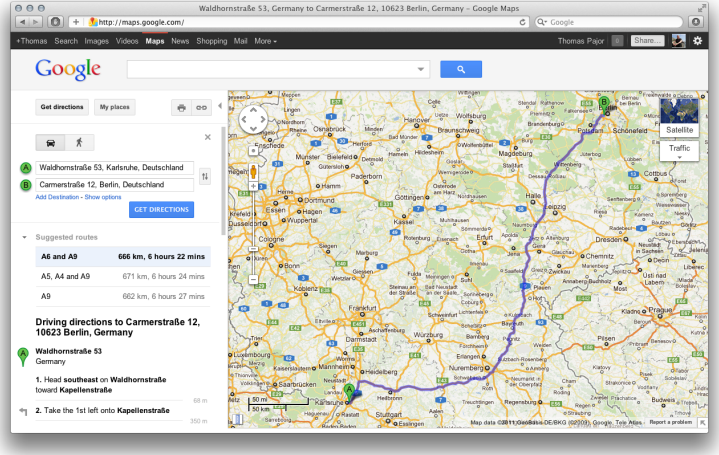
**Terminübersicht:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mittwoch | 17.4. | Michael | Einführung, Grundlagen, Dijkstras Algorithmus |
| Montag | 22.4. | Michael | Kontraktion & TopoCore |
| Mittwoch | 24.4. | Michael | A*, ALT, CALT |
| Montag | 29.4. | Adrian | Arc-Flags, SHARC |
| Montag | 6.5. | Adrian | MLO/CRP |

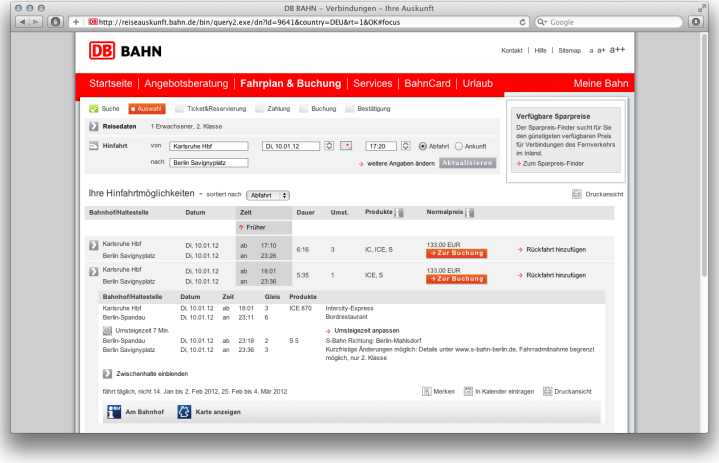
...

# Routenplanung in der Anwendung

# Routenplanung in der Anwendung

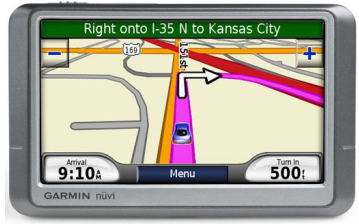


# Routenplanung in der Anwendung



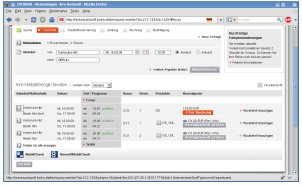
# Routenplanung in der Anwendung

# Motivation Routenplanung




**Wichtiger Anwendungsbereich**

- Navigationssysteme
- Kartendienste: Google Maps, Bing Maps, ...
- Fahrplanauskunftssysteme



**Viele kommerzielle Systeme**

- Nutzen heuristische Methoden
- Betrachten nur Teile des Transportnetzwerkes
- Geben keine Qualitätsgarantien

Wir untersuchen Methoden zur Routenplanung in Transportnetzwerken
mit beweisbar optimalen Lösungen

# Problemstellung

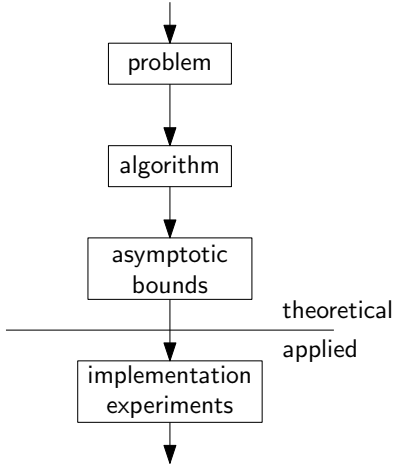
**Anfrage:**

- Finde beste Verbindung in Transportnetz

**Modellierung:**

- Netzwerk als Graph $G = (V, E)$
- Kantengewichte sind Reisezeit
- Kürzeste Wege in $G$ entsprechen schnellsten Verbindungen

# Klassischer Algorithmenentwurf



# Problemstellung

**Anfrage:**

- Finde beste Verbindung in Transportnetz

**Modellierung:**

- Netzwerk als Graph $G = (V, E)$
- Kantengewichte sind Reisezeit
- Kürzeste Wege in $G$ entsprechen schnellsten Verbindungen
- Klassisches Problem (Dijkstra [Dij59])

**Probleme:**

- Transportnetzwerke sind riesig
- Dijkstras Algorithmus zu langsam
  ($> 1$ Sekunde)

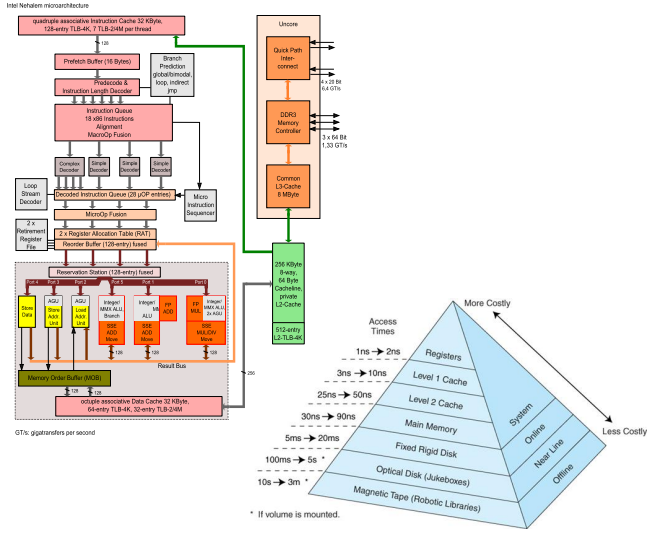
# Moderne CPU Architektur

**Einige Fakten:**

- steile Speicherhierarchie
- viele Kerne
- mehr Kerne als Speicherkontroller
- Cache-Kohärenz
- SIMD (SSE, AVX)

**Hauptherausforderungen:**

- Speicherzugriff/Datenlokalität
- Parallelisierung
  - Nicht nur race-conditions, etc.
  - auch Speicherzugriff
    z.B. “false-sharing” (Cache-Kohärenz)



# Lücke Theorie vs. Praxis

| **Theorie** | vs. | **Praxis** |
|---|---|---|
| einfach | Problem-Modell | komplex |
| einfach | Maschinenmodell | komplex |
| komplex | Algorithmen | einfach |
| fortgeschritten | Datenstrukturen | einfach |
| worst-case | Komplexitäts-Messung | typische Eingaben |
| asymptotisch | Effizienz | konstante Faktoren |

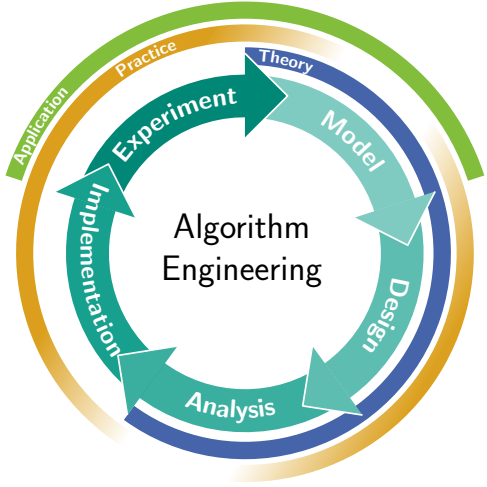
# Lücke Theorie vs. Praxis

| **Theorie** | vs. | **Praxis** |
|---|---|---|
| einfach | Problem-Modell | komplex |
| einfach | Maschinenmodell | komplex |
| komplex | Algorithmen | einfach |
| fortgeschritten | Datenstrukturen | einfach |
| worst-case | Komplexitäts-Messung | typische Eingaben |
| asymptotisch | Effizienz | konstante Faktoren |

**Routenplanung:**

- sehr anwendungsnahes Gebiet
- Eingaben sind echte Daten
  - Straßengraphen
  - Eisenbahn (Fahrpläne)
  - Flugpläne

# Algorithm Engineering



# Beschleunigungstechniken

**Beobachtung:**

- Viele Anfragen in (statischem) Netzwerk
- „Unnötige“ Berechnungen

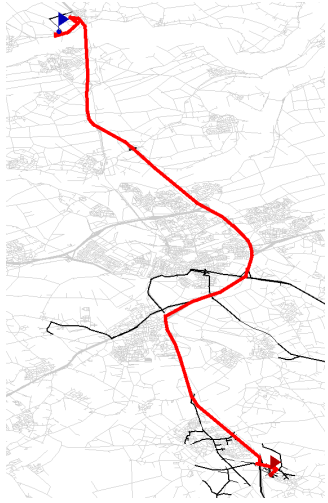
# Beschleunigungstechniken

**Beobachtung:**

- Viele Anfragen in (statischem) Netzwerk
- „Unnötige“ Berechnungen

**Idee:**

- Zwei Phasen
  - Offline: Generiere Zusatzinformation in Vorberechnung
  - Online: Beschleunige Anfrage mit dieser Information
- Drei Kriterien: Vorberechnungsplatz, Vorberechnungszeit, Beschleunigung

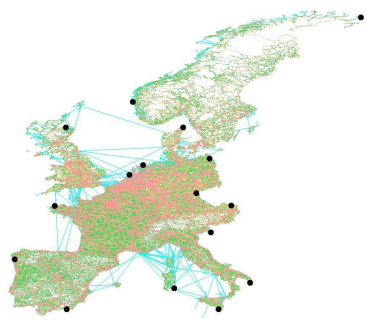


# Experimentelle Evaluation

**Eingabe:** Straßennetzwerk von Europa

- 18 Mio. Knoten, 42 Mio. Kanten

| | Vorberechnung | | Anfragen | |
|---|---|---|---|---|
| Algorithmus | Zeit [h:m] | Platz [GiB] | Zeit [$\mu$s] | Beschleun. |
| Dijkstra [Dij59] | — | — | 2 550 000 | — |
| ALT [GH05, GW05] | 0:42 | 2.2 | 24 521 | 104 |
| CRP [DGPW11] | $\ll$ 0:01 | $<$ 0.1 | 1 650 | 1 545 |
| Arc-Flags [Lau04] | 0:20 | 0.3 | 408 | 6 250 |
| CH [GSSD08] | 0:05 | 0.2 | 110 | 23 181 |
| TNR [ALS13] | 0:20 | 2.1 | 1.25 | 2 040 000 |
| HL [ADGW12] | 0:37 | 18.4 | 0.56 | 4 553 571 |

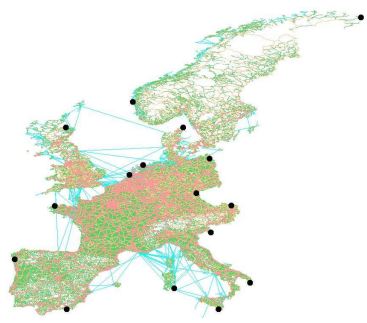


# Experimentelle Evaluation

**Eingabe:** Straßennetzwerk von Europa

- 18 Mio. Knoten, 42 Mio. Kanten

| | Vorberechnung | | Anfragen | |
|---|---|---|---|---|
| Algorithmus | Zeit [h:m] | Platz [GiB] | Zeit [$\mu$s] | Beschleun. |
| Dijkstra [Dij59] | — | — | 2 550 000 | — |
| ALT [GH05, GW05] | 0:42 | 2.2 | 24 521 | 104 |
| CRP [DGPW11] | $\ll$ 0:01 | $<$ 0.1 | 1 650 | 1 545 |
| Arc-Flags [Lau04] | 0:20 | 0.3 | 408 | 6 250 |
| CH [GSSD08] | 0:05 | 0.2 | 110 | 23 181 |
| TNR [ALS13] | 0:20 | 2.1 | 1.25 | 2 040 000 |
| HL [ADGW12] | 0:37 | 18.4 | 0.56 | 4 553 571 |



Mittlerweile im Einsatz bei Bing, Google, Apple, Tomtom, ...

# Schwerpunkte der Vorlesung

- Algorithm Engineering + ein bisschen Theorie
- Beschleunigungstechniken
- Implementierungsdetails
- Ergebnisse auf Real-Welt Daten
- Aktuellster Stand der Forschung (Veröffentlichungen bis 2021)
- Ideale Grundlage für Masterarbeiten

# Was diese Vorlesung nicht ist

**keine Algorithmen III**

- Vertiefung von kürzesten Wegen (Dijkstra)
  - Grundlage ist der Stoff von Algo I;
    heute nochmal Crashkurs
- Grundvorlesung "vereinfachen" Wahrheit oft
- Implementierung
- Betonung auf Messergebnisse

**keine reine Theorievorlesung**

- relativ wenig Beweise (wenn doch, eher kurz)
- reale Leistung vor Asymptotik
- Vielen vorkommende Optimierungsproblemen sind $\mathcal{NP}$-schwer

# Inhalt der Vorlesung

**1. Grundlagen**

- Algorithm Engineering
- Graphen, Modelle, usw.
- Kürzeste Wege
- Dijkstra's Algorithmus

**2. Beschleunigung von (statischen) Punkt-zu-Punkt Anfragen**

- Zielgerichtete Verfahren
- Hierarchische Techniken
- Many-to-many-Anfragen und Distanztabellen
- Kombinationen

# Inhalt der Vorlesung

**3. Theorie**

- Theoretische Charakterisierung von Straßennetzwerken
- Highway-Dimension
- Komplexität von Beschleunigungstechniken

**4. Fortgeschrittene Szenarien**

- Schnelle many-to-many und all-pairs shortest-paths
- Alternativrouten
- Zeitabhängige Routenplanung
- Fahrplanauskunft
- Routenplanung für Elektroautos
- Multi-modale Routenplanung

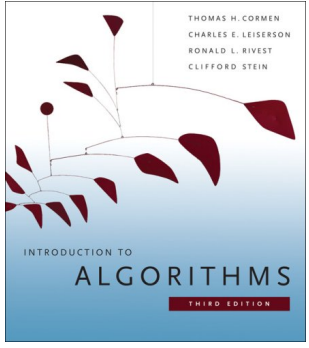
# Nützliche Vorkenntnisse

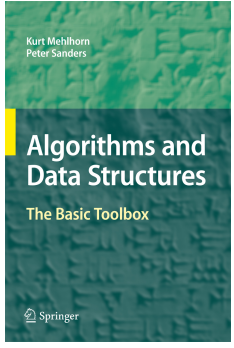
- Informatik I/II oder Algorithmen I
- Algorithmentechnik oder Algorithmen II (muss aber nicht sein)
- ein bisschen Rechnerarchitektur
- passive Kenntnisse von C++/Java

**Vertiefungsgebiet:** Algorithmentechnik, ~~Theoretische Grundlagen~~

# Material

- Folien
- wissenschaftliche Aufsätze (siehe Vorlesunghomepage)
- Basiskenntnisse:



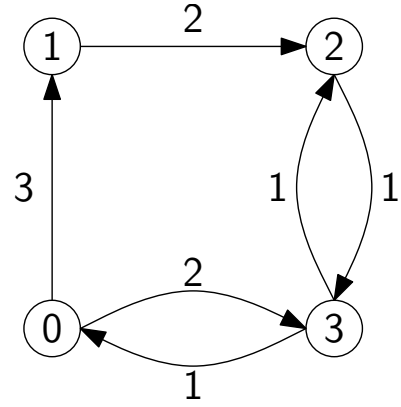



# 1. Grundlagen

# Graph-Repräsentationen

**Drei klassische Ansätze:**

- Adjazenzmatrix
- Adjazenzlisten
- Adjazenzarray

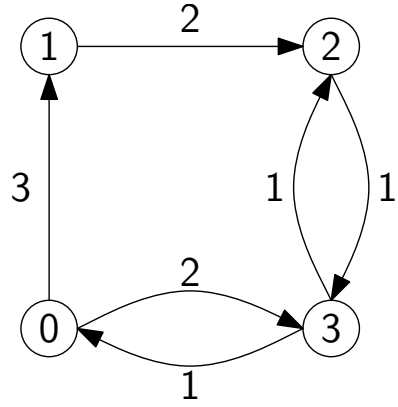


# Graph-Repräsentationen

**Drei klassische Ansätze:**

- Adjazenzmatrix
- Adjazenzlisten
- Adjazenzarray

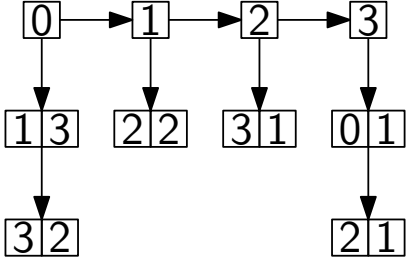
| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | – | 3 | – | 2 |
| 1 | – | – | 2 | – |
| 2 | – | – | – | 1 |
| 3 | 1 | – | 1 | – |

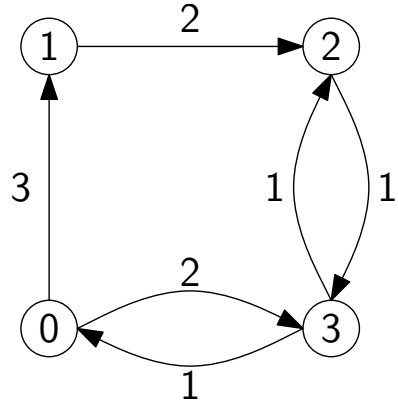


# Graph-Repräsentationen

**Drei klassische Ansätze:**

- Adjazenzmatrix
- Adjazenzlisten
- Adjazenzarray

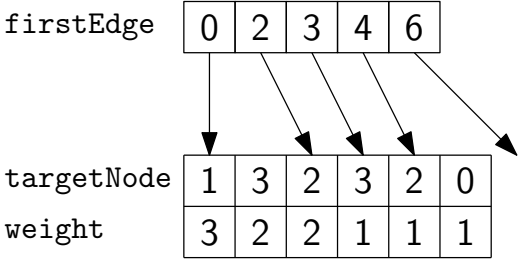


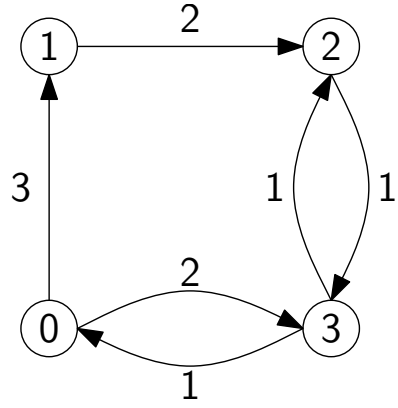



# Graph-Repräsentationen

**Drei klassische Ansätze:**

- Adjazenzmatrix
- Adjazenzlisten
- Adjazenzarray



# Was brauchen wir?

| **Eigenschaften:** | Matrix | Liste | Array |
|---|---|---|---|
| Speicher | $\mathcal{O}(n^2)$ | $\mathcal{O}(n+m)$ | $\mathcal{O}(n+m)$ |
| Ausgehende Kanten iterieren | $\mathcal{O}(n)$ | $\mathcal{O}(\deg u)$ | $\mathcal{O}(\deg u)$ |
| Kantenzugriff $(u, v)$ | $\mathcal{O}(1)$ | $\mathcal{O}(\deg u)$ | $\mathcal{O}(\deg u)$ |
| Effizienz (Speicherlayout) | $+$ | $-$ | $+$ |
| Updates (neue Kante) | $+$ | $+$ | $-$ |
| Updates (Gewicht) | $+$ | $+$ | $+$ |

# Was brauchen wir?

| **Eigenschaften:** | Matrix | Liste | Array |
|---|---|---|---|
| Speicher | $\mathcal{O}(n^2)$ | $\mathcal{O}(n+m)$ | $\mathcal{O}(n+m)$ |
| Ausgehende Kanten iterieren | $\mathcal{O}(n)$ | $\mathcal{O}(\deg u)$ | $\mathcal{O}(\deg u)$ |
| Kantenzugriff $(u, v)$ | $\mathcal{O}(1)$ | $\mathcal{O}(\deg u)$ | $\mathcal{O}(\deg u)$ |
| Effizienz (Speicherlayout) | $+$ | $-$ | $+$ |
| Updates (neue Kante) | $+$ | $+$ | $-$ |
| Updates (Gewicht) | $+$ | $+$ | $+$ |

**Fragen:**

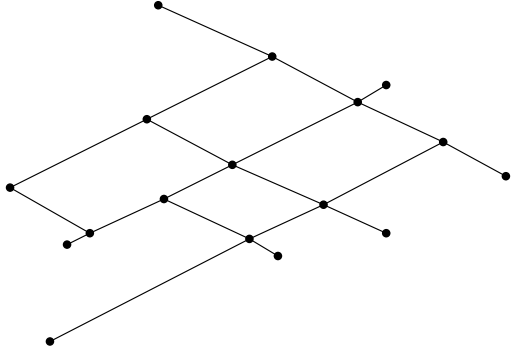
- Was brauchen wir?
- Was muss nicht super effizient sein?
- erstmal Modelle anschauen!

# Modellierung (Straßengraphen)

# Modellierung (Straßengraphen)

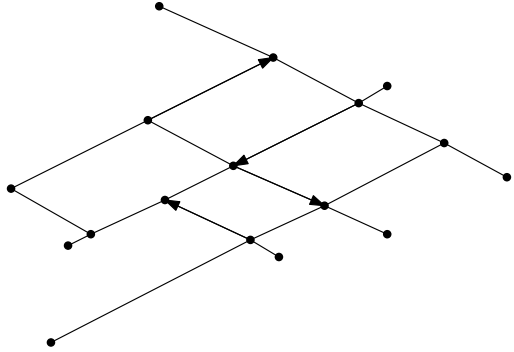
# Modellierung (Straßengraphen)

- Knoten sind Kreuzungen
- Kanten sind Straßen



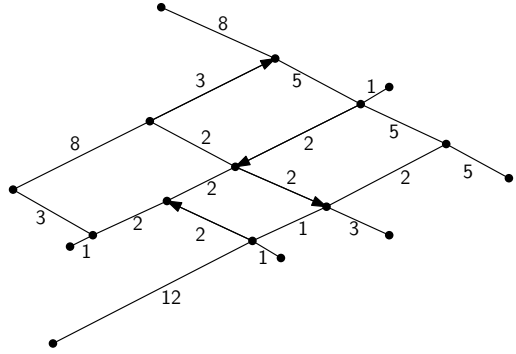
# Modellierung (Straßengraphen)

- Knoten sind Kreuzungen
- Kanten sind Straßen
- Einbahnstraßen



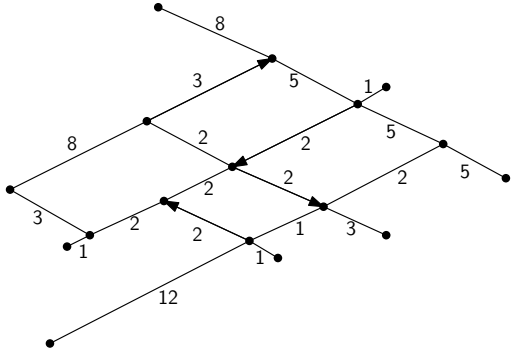
# Modellierung (Straßengraphen)

- Knoten sind Kreuzungen
- Kanten sind Straßen
- Einbahnstraßen
- Metrik ist Reisezeit



# Modellierung (Straßengraphen)

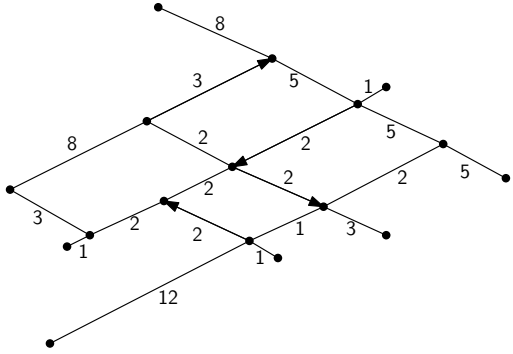
**Eigenschaften (sammeln):**



# Modellierung (Straßengraphen)

**Eigenschaften:**

- dünn
- (fast) ungerichtet
- geringer Knotengrad
- Kantenzüge
- Hierarchie (Autobahnen!)



# Modellierung (Eisenbahngraphen)

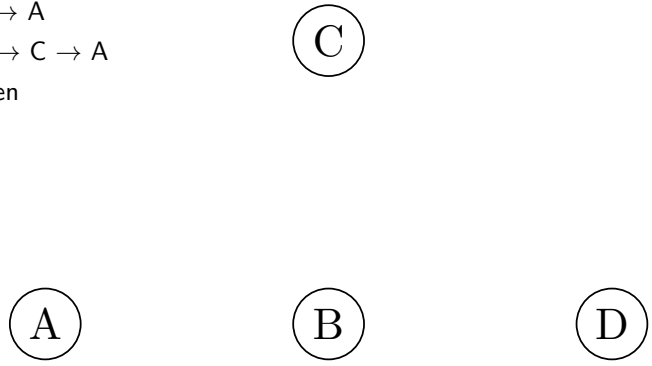
**Beispiel:**

- 4 Stationen (A,B,C,D)
- Zug 1: Station A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A
- Zug 2: Station A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ D $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A
- Züge operieren alle 10 Minuten

# Modellierung (Eisenbahngraphen)

**Beispiel:**

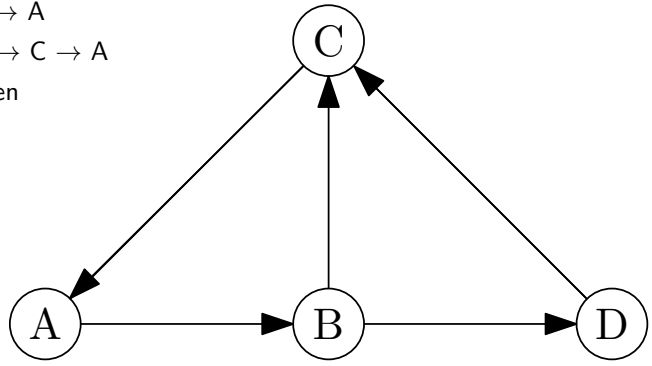
- 4 Stationen (A,B,C,D)
- Zug 1: Station A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A
- Zug 2: Station A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ D $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A
- Züge operieren alle 10 Minuten



# Modellierung (Eisenbahngraphen)

**Beispiel:**

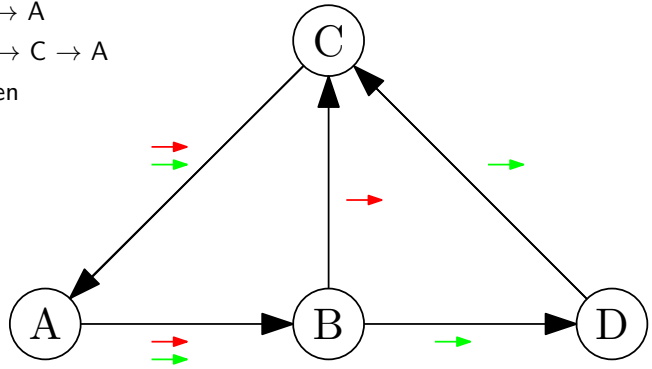
- 4 Stationen (A,B,C,D)
- Zug 1: Station A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A
- Zug 2: Station A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ D $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A
- Züge operieren alle 10 Minuten



# Modellierung (Eisenbahngraphen)

**Beispiel:**

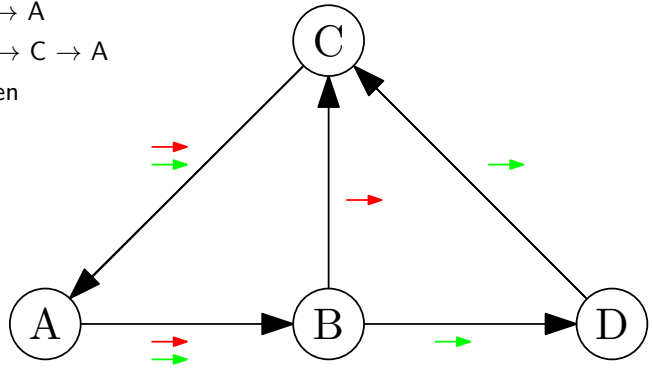
- 4 Stationen (A,B,C,D)
- Zug 1: Station A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A
- Zug 2: Station A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ D $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A
- Züge operieren alle 10 Minuten



# Modellierung (Eisenbahngraphen)

**Beispiel:**

- 4 Stationen (A,B,C,D)
- Zug 1: Station A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A
- Zug 2: Station A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ D $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A
- Züge operieren alle 10 Minuten

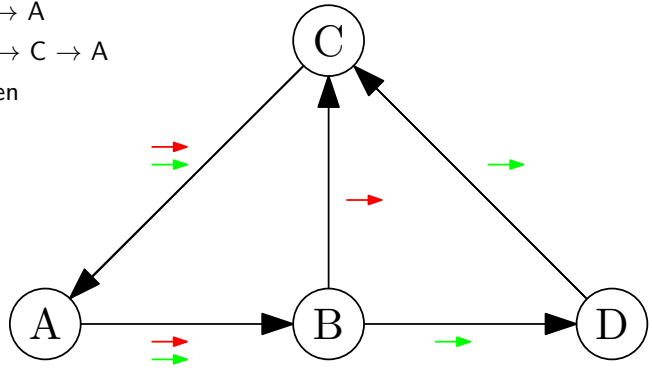



Kanten sind zeitabhängig!
(wann fährt ein Zug wie lange?)

# Modellierung (Eisenbahngraphen)

**Beispiel:**

- 4 Stationen (A,B,C,D)
- Zug 1: Station A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A
- Zug 2: Station A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ D $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A
- Züge operieren alle 10 Minuten




Kanten sind zeitabhängig!
(wann fährt ein Zug wie lange?)

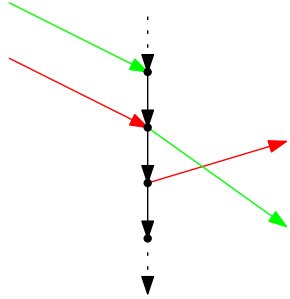
oder roll die Zeit aus

# Zeitexpandiertes Modell

**Vorgehen:**

- Knoten sind Abfahrts-/ Ankunftsereignisse
- Kanten für die Fahrt von Station zu Station
- Wartekanten an den Stationen für Umstiege

**Station B:**

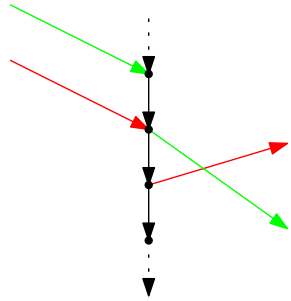


# Zeitexpandiertes Modell

**Vorgehen:**

- Knoten sind Abfahrts-/ Ankunftsereignisse
- Kanten für die Fahrt von Station zu Station
- Wartekanten an den Stationen für Umstiege

**Station B:**



**Diskussion:**

+ keine zeitabhängigen Kanten
− Graph größer

# Eigenschaften von Transportnetzwerken

# Eigenschaften von Transportnetzwerken

- zusammenhängend
- dünn
- gerichtet
- geringer Knotengrad
- meist verborgene Hierarchie (Autobahnen, ICE)
- Einbettung vorhanden (fast planar?)
- Kantengewichte nicht-negativ
- teilweise zeitabhängig
- dünne Separatoren?

# Eigenschaften von Transportnetzwerken

- zusammenhängend
- dünn
- gerichtet
- geringer Knotengrad
- meist verborgene Hierarchie (Autobahnen, ICE)
- Einbettung vorhanden (fast planar?)
- Kantengewichte nicht-negativ
- teilweise zeitabhängig
- dünne Separatoren?

**Diskussion:**

- berechne beste Verbindungen in solchen Netzwerken
- Adjazenzarray als Graphdatenstruktur

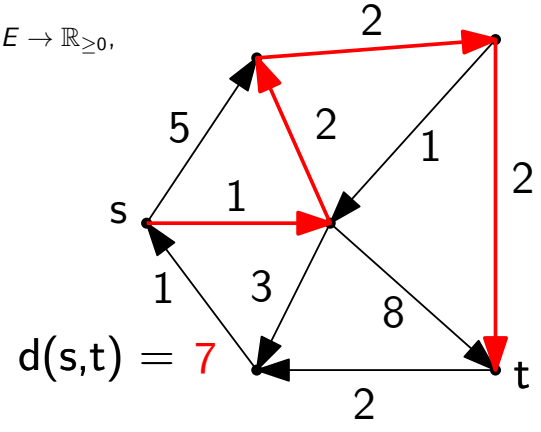
# 2. Kürzeste Wege

# Problemstellung

**Gegeben:**
Graph $G = (V, E, \text{len})$ mit positiver Kantenfunktion $\text{len}\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
Knoten $s, t \in V$

**Mögliche Aufgaben**

- Berechne Distanz $d(s, t)$
- Finde kürzesten $s$-$t$-Pfad $P := (s, \ldots, t)$



# Eigenschaften von kürzesten Wegen

**Azyklität:**

- Kürzeste Wege sind zyklenfrei

**Aufspannungseigenschaft:**

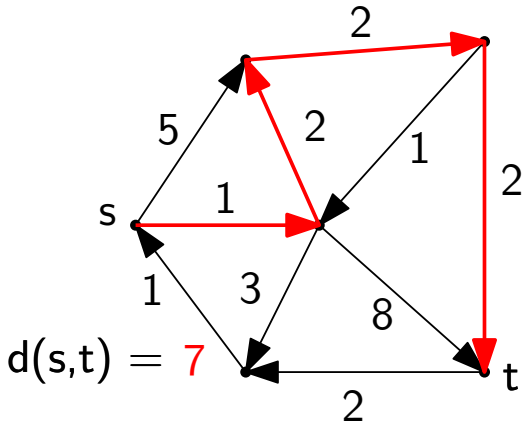
- Alle kürzesten Wege von $s$ aus bilden DAG bzw. Baum

**Vererbungseigenschaft:**

- Teilwege von kürzesten Wegen sind kürzeste Wege

**Abstand:**

- Steigender Abstand von Wurzel zu Blättern



# Berechnung kürzester Wege

Komplexität von **Single-Source Shortest Paths** abhängig vom Eingabegraphen.

- In dieser Vorlesung: Kantengewichte (fast) immer nicht-negativ.
- Ein *negativer Zyklus* ist ein Kreis mit negativem Gesamtgewicht.
- Ein *einfacher Pfad* ist ein Pfad bei dem sich kein Knoten wiederholt.

**Problemvarianten**

- Kantengewichte alle positiv:
  Dijkstra's Algorithmus anwendbar (Laufzeit $|V| \log |V| + |E|$)
- Kantengewichte auch negativ, aber kein negativer Zyklus:
  Algorithmus von Bellmann-Ford anwendbar (Laufzeit $|V| \cdot |E|$)
- Kantengewichte beliebig, suche kürzesten einfachen Pfad:
  $\mathcal{NP}$-schwer, Reduktion von „Problem Longest Path“

# Problem Longest Path

## Problem Longest Path

**Gegeben:**

- Gerichteter, gewichteter Graph $G = (V, E)$ mit gewicht len: $E \to \mathbb{N}$
- Zahl $K \in \mathbb{N}$
- Knoten $s, t \in V$

**Frage:**

- Gibt es einen einfachen $s$-$t$-Pfad der Länge mindestens $K$?

Problem Longest Path ist $\mathcal{NP}$-schwer (siehe [Garey & Johnson 79])

# Der Bellman-Ford Algorithmus

Bellman-Ford($G$, $s$)

```
1 for v ∈ V do d[v] ← ∞
2 d[s] ← 0
3 for i = 1 to |V| − 1 do
4 |   forall edges (u, v) ∈ E do
5 |   |   if d[u] + len(u, v) < d[v] then
6 |   |   |   d[v] ← d[u] + len(u, v)
```

# Der Bellman-Ford Algorithmus

Bellman-Ford($G$, $s$)

```
1 for v ∈ V do d[v] ← ∞
2 d[s] ← 0
3 for i = 1 to |V| − 1 do
4 |   forall edges (u, v) ∈ E do
5 |   |   if d[u] + len(u, v) < d[v] then
6 |   |   |   d[v] ← d[u] + len(u, v)
7 forall edges (u, v) ∈ E do
8 |   if d[v] > d[u] + len(u, v) then
9 |   |   negative cycle found
```

# Dijkstras Algorithmus

Dijkstra($G = (V, E)$, $s$)

```
1  forall nodes v ∈ V do
2      d[v] = ∞, p[v] = NULL                    // distances, parents
3  d[s] = 0
4  Q.clear(), Q.insert(s, 0)                    // container
5  while !Q.empty() do
6      u ← Q.deleteMin()                        // settling node u
7      forall edges e = (u, v) ∈ E do
           // relaxing edges
8          if d[u] + len(e) < d[v] then
9              d[v] ← d[u] + len(e)
10             p[v] ← u
11             if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
12             else Q.insert(v, d[v])
```

# Dijkstras Algorithmus

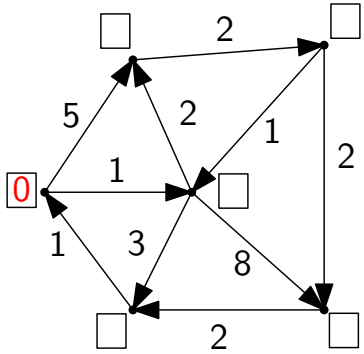
**Gegeben:** Graph $G$, Startknoten.

**Idee:** Suche in $G$ mit zunehmender *Distanz* von $s$.

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph $G$, Startknoten.

**Idee:** Suche in $G$ mit zunehmender *Distanz* von $s$.

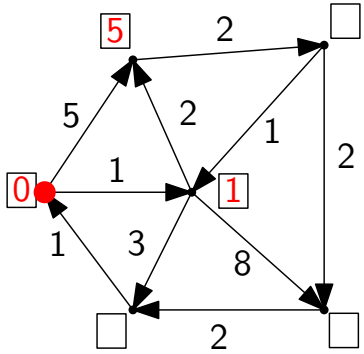



**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind optimal.

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph $G$, Startknoten.

**Idee:** Suche in $G$ mit zunehmender *Distanz* von $s$.

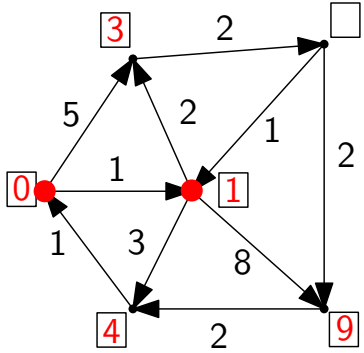



**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind optimal.

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph $G$, Startknoten.

**Idee:** Suche in $G$ mit zunehmender *Distanz* von $s$.

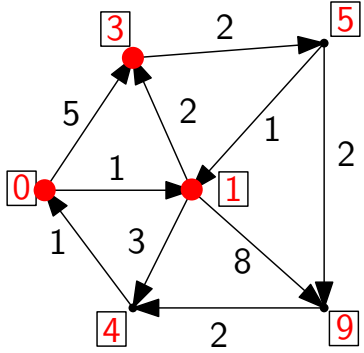



**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind optimal.

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph $G$, Startknoten.

**Idee:** Suche in $G$ mit zunehmender *Distanz* von $s$.

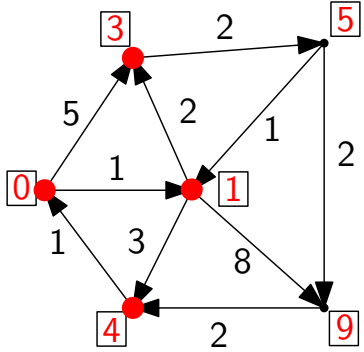



**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind optimal.

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph $G$, Startknoten.

**Idee:** Suche in $G$ mit zunehmender *Distanz* von $s$.

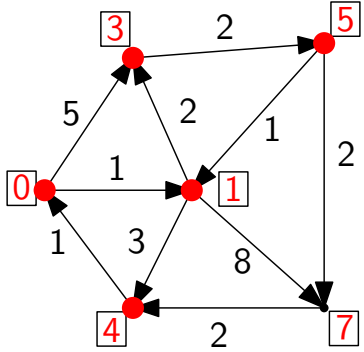



**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind optimal.

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph $G$, Startknoten.

**Idee:** Suche in $G$ mit zunehmender *Distanz* von $s$.

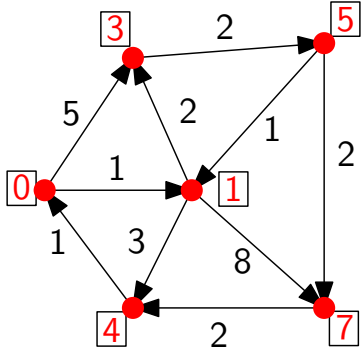



**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind optimal.

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph $G$, Startknoten.

**Idee:** Suche in $G$ mit zunehmender *Distanz* von $s$.

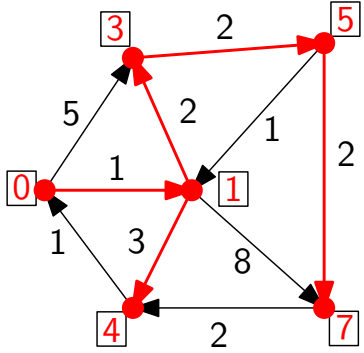



**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind optimal.

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph $G$, Startknoten.

**Idee:** Suche in $G$ mit zunehmender *Distanz* von $s$.




**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind optimal.

# Kantenrelaxierung

Dijkstra($G = (V, E)$, $s$)

```
1  forall nodes v ∈ V do
2      d[v] = ∞, p[v] = NULL                    // distances, parents
3  d[s] = 0
4  Q.clear(), Q.insert(s, 0)                    // container
5  while !Q.empty() do
6      u ← Q.deleteMin()                        // settling node u
7      forall edges e = (u, v) ∈ E do
           // relaxing edges
8          if d[u] + len(e) < d[v] then
9              d[v] ← d[u] + len(e)
10             p[v] ← u
11             if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
12             else Q.insert(v, d[v])
```

# Definitionen

**Kantenrelaxierung:** Der Vorgang

1 **if** $d[u] + \text{len}(u, v) < d[v]$ **then** $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(u, v)$

heißt *Kantenrelaxierung*.

# Definitionen

**Kantenrelaxierung:** Der Vorgang

1 **if** $d[u] + \text{len}(u, v) < d[v]$ **then** $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(u, v)$

heißt *Kantenrelaxierung*.

**Besuchte Knoten:** Ein Knoten heißt (zu einem Zeitpunkt) *besucht (visited)* wenn er (zu diesem Zeitpunkt) schon in die Queue eingefügt wurde (unabhängig davon, ob er noch in der Queue ist).

# Definitionen

**Kantenrelaxierung:** Der Vorgang

1 **if** $d[u] + \text{len}(u, v) < d[v]$ **then** $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(u, v)$

heißt *Kantenrelaxierung*.

**Besuchte Knoten:** Ein Knoten heißt (zu einem Zeitpunkt) *besucht (visited)* wenn er (zu diesem Zeitpunkt) schon in die Queue eingefügt wurde (unabhängig davon, ob er noch in der Queue ist).

**Abgearbeitete Knoten:** Ein Knoten heißt (zu einem Zeitpunkt) *abgearbeitet (settled)* wenn er (zu diesem Zeitpunkt) schon in die Queue eingefügt und wieder extrahiert wurde.

# Komplexität von Dijkstra

Dijkstra($G = (V, E)$, $s$)

```
1  forall nodes v ∈ V do
2      d[v] = ∞, p[v] = NULL
3  d[s] = 0, Q.clear(), Q.insert(s, 0)
4  while !Q.empty() do
5      u ← Q.deleteMin()
6      forall edges e = (u, v) ∈ E do
7          if d[u] + len(e) < d[v] then
8              d[v] ← d[u] + len(e)
9              p[v] ← u
10             if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
11             else Q.insert(v, d[v])
```

# Komplexität von Dijkstra

Dijkstra($G = (V, E)$, $s$)

```
1  forall nodes v ∈ V do
2      d[v] = ∞, p[v] = NULL                          // n Mal
3  d[s] = 0, Q.clear(), Q.insert(s, 0)
4  while !Q.empty() do
5      u ← Q.deleteMin()
6      forall edges e = (u, v) ∈ E do
7          if d[u] + len(e) < d[v] then
8              d[v] ← d[u] + len(e)
9              p[v] ← u
10             if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
11             else Q.insert(v, d[v])
```

# Komplexität von Dijkstra

Dijkstra($G = (V, E)$, $s$)

```
1  forall nodes v ∈ V do
2      d[v] = ∞, p[v] = NULL                          // n Mal
3  d[s] = 0, Q.clear(), Q.insert(s, 0)                // 1 Mal
4  while !Q.empty() do
5      u ← Q.deleteMin()
6      forall edges e = (u, v) ∈ E do
7          if d[u] + len(e) < d[v] then
8              d[v] ← d[u] + len(e)
9              p[v] ← u
10             if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
11             else Q.insert(v, d[v])
```

# Komplexität von Dijkstra

Dijkstra($G = (V, E)$, $s$)

```
1  forall nodes v ∈ V do
2      d[v] = ∞, p[v] = NULL                          // n Mal
3  d[s] = 0, Q.clear(), Q.insert(s, 0)                // 1 Mal
4  while !Q.empty() do
5      u ← Q.deleteMin()                              // n Mal
6      forall edges e = (u, v) ∈ E do
7          if d[u] + len(e) < d[v] then
8              d[v] ← d[u] + len(e)
9              p[v] ← u
10             if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
11             else Q.insert(v, d[v])
```

# Komplexität von Dijkstra

Dijkstra($G = (V, E)$, $s$)

```
1  forall nodes v ∈ V do
2      d[v] = ∞, p[v] = NULL                          // n Mal
3  d[s] = 0, Q.clear(), Q.insert(s, 0)                // 1 Mal
4  while !Q.empty() do
5      u ← Q.deleteMin()                              // n Mal
6      forall edges e = (u, v) ∈ E do
7          if d[u] + len(e) < d[v] then
8              d[v] ← d[u] + len(e)
9              p[v] ← u
10             if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])   // m Mal
11             else Q.insert(v, d[v])
```

# Komplexität von Dijkstra

Dijkstra($G = (V, E)$, $s$)

```
1  forall nodes v ∈ V do
2      d[v] = ∞, p[v] = NULL                          // n Mal
3  d[s] = 0, Q.clear(), Q.insert(s, 0)                // 1 Mal
4  while !Q.empty() do
5      u ← Q.deleteMin()                              // n Mal
6      forall edges e = (u, v) ∈ E do
7          if d[u] + len(e) < d[v] then
8              d[v] ← d[u] + len(e)
9              p[v] ← u
10             if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])   // m Mal
11             else Q.insert(v, d[v])                 // n Mal
```

# Komplexität von Dijkstra

Dijkstra($G = (V, E)$, $s$)

```
1  forall nodes v ∈ V do
2      d[v] = ∞, p[v] = NULL                                   // n Mal
3  d[s] = 0, Q.clear(), Q.insert(s, 0)                         // 1 Mal
4  while !Q.empty() do
5      u ← Q.deleteMin()                                       // n Mal
6      forall edges e = (u, v) ∈ E do
7          if d[u] + len(e) < d[v] then
8              d[v] ← d[u] + len(e)
9              p[v] ← u
10             if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])            // m Mal
11             else Q.insert(v, d[v])                          // n Mal
```

$$T_{\text{Dijkstra}} = T_{init} + n \cdot T_{deleteMin} + m \cdot T_{decreaseKey} + n \cdot T_{insert}$$

# Laufzeit Dijkstra

$T_{\text{Dijkstra}} = T_{init} + n \cdot T_{deleteMin} + m \cdot T_{decreaseKey} + n \cdot T_{insert}$

| Operation | Liste (worst-case) | Binary Heap (worst-case) | Binomial heap (worst-case) | Fibonacci heap (amortized) |
|---|---|---|---|---|
| Init | $\Theta(1)$ | $\Theta(1)$ | $\Theta(1)$ | $\Theta(1)$ |
| Insert | $\Theta(1)$ | $\Theta(\log k)$ | $\mathcal{O}(\log k)$ | $\Theta(1)$ |
| Minimum | $\Theta(n)$ | $\Theta(1)$ | $\mathcal{O}(\log k)$ | $\Theta(1)$ |
| DeleteMin | $\Theta(n)$ | $\Theta(\log k)$ | $\Theta(\log k)$ | $\mathcal{O}(\log k)$ |
| Union | $\Theta(1)$ | $\Theta(k)$ | $\mathcal{O}(\log k)$ | $\Theta(1)$ |
| DecreaseKey | $\Theta(1)$ | $\Theta(\log k)$ | $\Theta(\log k)$ | $\Theta(1)$ |
| Delete | $\Theta(1)$ | $\Theta(\log k)$ | $\Theta(\log k)$ | $\mathcal{O}(\log k)$ |
| **Dijkstra** | $\mathcal{O}(n^2 + m)$ | $\mathcal{O}((n+m)\log n)$ | $\mathcal{O}((n+m)\log n)$ | $\mathcal{O}(m + n\log n)$ |

# Laufzeit Dijkstra

$T_{\text{Dijkstra}} = T_{init} + n \cdot T_{deleteMin} + m \cdot T_{decreaseKey} + n \cdot T_{insert}$

| Operation | Liste (worst-case) | Binary Heap (worst-case) | Binomial heap (worst-case) | Fibonacci heap (amortized) |
|---|---|---|---|---|
| Init | $\Theta(1)$ | $\Theta(1)$ | $\Theta(1)$ | $\Theta(1)$ |
| Insert | $\Theta(1)$ | $\Theta(\log k)$ | $\mathcal{O}(\log k)$ | $\Theta(1)$ |
| Minimum | $\Theta(n)$ | $\Theta(1)$ | $\mathcal{O}(\log k)$ | $\Theta(1)$ |
| DeleteMin | $\Theta(n)$ | $\Theta(\log k)$ | $\Theta(\log k)$ | $\mathcal{O}(\log k)$ |
| Union | $\Theta(1)$ | $\Theta(k)$ | $\mathcal{O}(\log k)$ | $\Theta(1)$ |
| DecreaseKey | $\Theta(1)$ | $\Theta(\log k)$ | $\Theta(\log k)$ | $\Theta(1)$ |
| Delete | $\Theta(1)$ | $\Theta(\log k)$ | $\Theta(\log k)$ | $\mathcal{O}(\log k)$ |
| **Dijkstra** | $\mathcal{O}(n^2 + m)$ | $\mathcal{O}((n+m)\log n)$ | $\mathcal{O}((n+m)\log n)$ | $\mathcal{O}(m + n\log n)$ |
| $m \in \mathcal{O}(n)$ | $\mathcal{O}(n^2)$ | $\mathcal{O}(n \log n)$ | $\mathcal{O}(n \log n)$ | $\mathcal{O}(n \log n)$ |

Transportnetzwerke sind dünn $\Rightarrow$ Binary Heaps

# Laufzeit Dijkstra Experimente

k-ary Heap: Baum mit (max.) k Kindern je Vorgängerknoten

| k | Query [sec] |
|---|---|
| 2 | 1.834 |
| 3 | 1.595 |
| 4 | 1.507 |
| 5 | 1.525 |
| 8 | 1.561 |

Graph: 18M Knoten, 42M Kanten

# Laufzeit Dijkstra Experimente

k-ary Heap: Baum mit (max.) k Kindern je Vorgängerknoten

| k | Query [sec] |
|---|---|
| 2 | 1.834 |
| 3 | 1.595 |
| 4 | 1.507 |
| 5 | 1.525 |
| 8 | 1.561 |

Graph: 18M Knoten, 42M Kanten

Dijkstra: $\approx 1.5\,\text{s}$ $\Rightarrow$ nicht interaktiv

# Laufzeit Dijkstra Experimente

k-ary Heap: Baum mit (max.) k Kindern je Vorgängerknoten

| k | Query [sec] |
|---|---|
| 2 | 1.834 |
| 3 | 1.595 |
| 4 | 1.507 |
| 5 | 1.525 |
| 8 | 1.561 |

Graph: 18M Knoten, 42M Kanten

Dijkstra: $\approx 1.5\,\text{s}$ $\Rightarrow$ nicht interaktiv
$n + m$ CPU clock cycles: $\approx 20\,\text{ms}$ $\Rightarrow$ viel schneller

# Laufzeit Dijkstra Experimente

k-ary Heap: Baum mit (max.) k Kindern je Vorgängerknoten

| k | Query [sec] |
|---|---|
| 2 | 1.834 |
| 3 | 1.595 |
| 4 | 1.507 |
| 5 | 1.525 |
| 8 | 1.561 |

Graph: 18M Knoten, 42M Kanten

| | | |
|---|---|---|
| Dijkstra: | $\approx 1.5\,\text{s}$ | $\Rightarrow$ nicht interaktiv |
| $n + m$ CPU clock cycles: | $\approx 20\,\text{ms}$ | $\Rightarrow$ viel schneller |
| BFS: | $\approx 1.2\,\text{s}$ | $\Rightarrow$ an der Queue liegt's nicht |

# Laufzeit Dijkstra Experimente

k-ary Heap: Baum mit (max.) k Kindern je Vorgängerknoten

| k | Query [sec] |
|---|---|
| 2 | 1.834 |
| 3 | 1.595 |
| 4 | 1.507 |
| 5 | 1.525 |
| 8 | 1.561 |

Graph: 18M Knoten, 42M Kanten

| | | |
|---|---|---|
| Dijkstra: | $\approx 1.5\,\text{s}$ | $\Rightarrow$ nicht interaktiv |
| $n + m$ CPU clock cycles: | $\approx 20\,\text{ms}$ | $\Rightarrow$ viel schneller |
| BFS: | $\approx 1.2\,\text{s}$ | $\Rightarrow$ an der Queue liegt's nicht |

Performanz von Graphsuchen ist speicher-begrenzt

# Nächster Termin

Karlsruher Institut für Technologie

## Montag, 22. April 2024

# Bibliographie I


Ittai Abraham, Daniel Delling, Andrew V. Goldberg, and Renato F. Werneck.

Hierarchical Hub Labelings for Shortest Paths.

In Leah Epstein and Paolo Ferragina, editors, *Proceedings of the 20th Annual European Symposium on Algorithms (ESA'12)*, volume 7501 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 24–35. Springer, 2012.

Julian Arz, Dennis Luxen, and Peter Sanders.

Transit Node Routing Reconsidered.

In *Proceedings of the 12th International Symposium on Experimental Algorithms (SEA'13)*, volume 7933 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 55–66. Springer, 2013.

Daniel Delling, Andrew V. Goldberg, Thomas Pajor, and Renato F. Werneck.

Customizable Route Planning.

In Panos M. Pardalos and Steffen Rebennack, editors, *Proceedings of the 10th International Symposium on Experimental Algorithms (SEA'11)*, volume 6630 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 376–387. Springer, 2011.

Edsger W. Dijkstra.

A Note on Two Problems in Connexion with Graphs.

*Numerische Mathematik*, 1(1):269–271, 1959.

Andrew V. Goldberg and Chris Harrelson.

Computing the Shortest Path: A* Search Meets Graph Theory.

In *Proceedings of the 16th Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'05)*, pages 156–165. SIAM, 2005.

Robert Geisberger, Peter Sanders, Dominik Schultes, and Daniel Delling.

Contraction Hierarchies: Faster and Simpler Hierarchical Routing in Road Networks.

In Catherine C. McGeoch, editor, *Proceedings of the 7th Workshop on Experimental Algorithms (WEA'08)*, volume 5038 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 319–333. Springer, June 2008.

# Bibliographie II


Andrew V. Goldberg and Renato F. Werneck.
Computing Point-to-Point Shortest Paths from External Memory.
In *Proceedings of the 7th Workshop on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX'05)*, pages 26–40. SIAM, 2005.

Ulrich Lauther.
An Extremely Fast, Exact Algorithm for Finding Shortest Paths in Static Networks with Geographical Background.
In *Geoinformation und Mobilität - von der Forschung zur praktischen Anwendung*, volume 22, pages 219–230. IfGI prints, 2004.