



# Übungsblatt 10

## Algorithmen I - Sommersemester 2024

### Abgabe im ILIAS bis 05.07.2024, 18:00 Uhr

Die Abgabe erfolgt alleine oder zu zweit als eine PDF-Datei über das Übungsmodul in der Gruppe eures Tutoriums im ILIAS. Beschriftet die Abgabe deutlich mit Matrikelnummer und Name.

- Achtet bei handschriftlichen Abgaben auf Lesbarkeit.
- Achtet darauf, ob Algorithmen in Worten oder Pseudocode beschrieben werden sollen.
- Es werden immer asymptotisch möglichst effiziente Algorithmen erwartet, wenn nicht anders angegeben.
- Wenn Korrektheits- oder Laufzeitanalysen gefordert sind, behandelt diese separat von der Algorithmenbeschreibung.

**Gesamtpunkte:** 20 (+ 137 Bonus)

### **Aufgabe 1 - Tree-nanigans: Auf der Suche nach dem richtigen Weg mit KI und Tiefensuche - Fehlerfindung à la Forrest Gump** (7 Punkte)

Das Erstellen von Aufgaben und Musterlösungen ist harte Arbeit. Daher wollten wir in dieser Aufgabe etwas Zeit sparen und uns Musterlösungen mit Hilfe von ChatGPT generieren lassen. Ursprünglich sollte die Aufgabe sein die folgende Aussage über semi-zusammenhängende<sup>1</sup> Graphen zu beweisen oder zu widerlegen:

*Jeder gerichtete, azyklische Graph mit eindeutiger Quelle<sup>2</sup> ist semi-zusammenhängend.*

Für diese Aussage ließen wir die KI mehrere Beweise mit verschiedenen Ansätzen generieren. Im folgenden haben wir die Antworten durch eine Nummerierung der Sätze ergänzt.

<sup>1</sup>Wir nennen einen gerichteten Graphen  $G = (V, E)$  *semi-zusammenhängend*, wenn für alle Paare von Knoten  $u, v \in V$  gilt, dass  $u$  von  $v$  aus erreichbar ist oder  $v$  von  $u$  aus (oder beides).

<sup>2</sup>Eine Quelle ist ein Knoten ohne eingehende Kanten.

## Prompt (direkter Beweis)

Beweise die folgende Aussage: jeder gerichtete azyklische Graph mit eindeutiger Quelle ist semi-zusammenhängend.

## Antwort

- 1 Um die Aussage zu beweisen, dass jeder gerichtete azyklische Graph (DAG) mit einer eindeutigen Quelle semi-zusammenhängend ist, müssen wir zuerst die Definitionen klären:
  - 1.1 Ein gerichteter Graph ist azyklisch, wenn es darin keinen Zyklus gibt, das heißt, es gibt keine Möglichkeit, einen Pfad zu folgen und dabei zu einem Knoten zurückzukehren.
  - 1.2 Eine eindeutige Quelle in einem gerichteten Graphen ist ein Knoten, der keine eingehenden Kanten hat.
  - 1.3 Ein Graph ist semi-zusammenhängend, wenn es zwischen jeder möglichen Kombination von Knoten, mit Ausnahme der Quelle, mindestens einen gerichteten Pfad gibt.
- 2 Um zu zeigen, dass ein gerichteter azyklischer Graph mit einer eindeutigen Quelle semi-zusammenhängend ist, betrachten wir:
- 3 *Existenz eines Pfades zwischen jedem Knotenpaar (außer der Quelle):*
  - 3.1 Da der Graph azyklisch ist, gibt es zwischen jedem Knotenpaar einen gerichteten Pfad.
  - 3.2 Wenn wir einen Pfad zwischen zwei Knoten betrachten, die nicht die Quelle sind, können wir diesen Pfad verwenden, um eine Verbindung zwischen diesen Knoten herzustellen.
- 4 *Verbindung zur Quelle:*
  - 4.1 Da die Quelle des Graphen eindeutig ist, kann kein anderer Knoten direkt mit der Quelle verbunden sein.
  - 4.2 Aber da der Graph azyklisch ist, kann jeder Knoten über einen gerichteten Pfad mit der Quelle verbunden werden.
- 5 *Folgerung:*
  - 5.1 Somit gibt es zwischen jedem Knotenpaar im Graphen, mit Ausnahme der Quelle, mindestens einen gerichteten Pfad.
  - 5.2 Daher ist der Graph semi-zusammenhängend.
- 6 Dieser Beweis zeigt, dass ein gerichteter azyklischer Graph mit einer eindeutigen Quelle semi-zusammenhängend ist.

### Prompt (Widerspruchsbeweis)

Bitte zeige die Aussage mit Beweis durch Widerspruch.

### Antwort

- 1 Um die Aussage „Jeder gerichtete azyklische Graph mit eindeutiger Quelle ist semi-zusammenhängend“ durch Widerspruch zu beweisen, nehmen wir an, es gibt einen gerichteten azyklischen Graphen mit einer eindeutigen Quelle, der nicht semi-zusammenhängend ist.
- 2 Angenommen, es gibt einen gerichteten azyklischen Graphen  $G$  mit einer eindeutigen Quelle  $q$ , der nicht semi-zusammenhängend ist.
- 3 Das bedeutet, dass es mindestens ein Paar von Knoten  $u$  und  $v$  gibt, für das es keinen gerichteten Pfad von  $u$  nach  $v$  gibt, außer wenn  $u$  oder  $v$  die Quelle  $q$  ist.
- 4 Da der Graph azyklisch ist, kann es keinen Pfad von  $v$  nach  $u$  geben, da ein solcher Pfad einen Zyklus erzeugen würde.
- 5 Daher müssen wir nur den Fall betrachten, dass es keinen gerichteten Pfad von  $u$  nach  $v$  gibt, außer wenn  $u$  die Quelle  $q$  ist.
- 6 Wenn  $u$  nicht die Quelle  $q$  ist, dann gibt es keinen Pfad von  $u$  nach  $v$ .
- 7 Aber da  $G$  azyklisch ist, muss  $u$  über einen Pfad mit  $q$  verbunden sein.
- 8 Da es nur einen Weg von  $q$  nach  $u$  gibt, muss dieser Pfad direkt sein.
- 9 Nun betrachten wir  $v$ .
- 10 Da  $v$  nicht die Quelle  $q$  ist und es keinen Pfad von  $u$  nach  $v$  gibt (außer wenn  $u$  die Quelle ist), muss es auch einen direkten Pfad von  $q$  nach  $v$  geben.
- 11 Aber das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass es keinen Pfad von  $u$  nach  $v$  gibt, außer wenn  $u$  die Quelle ist.
- 12 Also ist unsere Annahme, dass es einen gerichteten azyklischen Graphen mit einer eindeutigen Quelle gibt, der nicht semi-zusammenhängend ist, falsch.
- 13 Folglich ist jeder gerichtete azyklische Graph mit einer eindeutigen Quelle semi-zusammenhängend.

### Prompt (Induktionsbeweis)

Zeige nun die Aussage mit Induktion.

### Antwort

- 1 Um die Aussage „Jeder gerichtete azyklische Graph mit eindeutiger Quelle ist semi-zusammenhängend“ mit Induktion zu beweisen, gehen wir folgendermaßen

vor:

- 2 *Induktionsanfang*: Betrachten wir den einfachsten Fall, einen gerichteten azyklischen Graphen mit nur zwei Knoten  $u$  und  $v$ , wobei  $u$  die Quelle ist.
- 3 In diesem Fall gibt es einen gerichteten Pfad von  $u$  nach  $v$ , da es keine anderen Knoten gibt, die den Pfad blockieren könnten.
- 4 Daher ist der Graph semi-zusammenhängend.
- 5 *Induktionsannahme*: Angenommen, die Aussage gilt für jeden gerichteten azyklischen Graphen mit einer eindeutigen Quelle und  $n$  Knoten, wobei  $n \geq 2$ .
- 6 *Induktionsschritt*: Wir wollen zeigen, dass die Aussage auch für einen gerichteten azyklischen Graphen mit  $n + 1$  Knoten und einer eindeutigen Quelle gilt.
- 7 Betrachten wir einen solchen Graphen  $G'$  mit  $n + 1$  Knoten und einer eindeutigen Quelle  $q$ .
- 8 Wir entfernen nun einen beliebigen Knoten  $w$  aus  $G'$ , wodurch wir einen Graphen  $G$  mit  $n$  Knoten erhalten.
- 9 Da  $G'$  azyklisch ist, bleibt  $G$  azyklisch.
- 10 Nach der Induktionsannahme ist  $G$  semi-zusammenhängend, da es  $n$  Knoten hat und eine eindeutige Quelle.
- 11 Das bedeutet, dass es zwischen jedem Knotenpaar in  $G$ , außer der Quelle, mindestens einen gerichteten Pfad gibt.
- 12 Jetzt fügen wir den entfernten Knoten  $w$  wieder hinzu, um  $G'$  zu erhalten.
- 13 Da  $w$  kein Zyklus verursacht, kann es keinen gerichteten Pfad zwischen  $w$  und einem anderen Knoten außer  $q$  geben, da sonst ein Zyklus entstehen würde.
- 14 Da  $q$  die einzige Quelle ist, ist der einzige Weg, um  $w$  mit anderen Knoten zu verbinden, über  $q$ .
- 15 Aber da es bereits einen Pfad von  $q$  zu jedem anderen Knoten gibt, bleibt dieser Pfad bestehen, wenn  $w$  hinzugefügt wird.
- 16 Somit gibt es zwischen jedem Knotenpaar in  $G'$ , außer der Quelle, mindestens einen gerichteten Pfad.
- 17 Da der Induktionsanfang gezeigt wurde und der Induktionsschritt korrekt ist, folgt daraus, dass die Aussage für alle gerichteten azyklischen Graphen mit einer eindeutigen Quelle gilt.

Bei der lästigen Qualitätsprüfung wurde allerdings angemerkt, dass die generierten Beweise voller Fehler sind. Wir setzen deshalb nun auf eure Hilfe um Fehler in den Antworten zu identifizieren.

Im folgenden sind *Fehler* für uns falsche Folgerungen, falsche Anwendungen einer Beweistechnik, unvollständige bzw. fehlerhafte Definitionen oder auch falsche Teilaussagen. Explizit nicht zählen wir Rechtschreibfehler, Grammatikfehler, ausgedachte Namen und die vorgegebene Aussage. Ebenso sind eine falsche Folgerung und die gefolgerte falsche Aussage nicht als getrennte Fehler zu betrachten. Der selbe Fehler darf mehrfach auftreten.

- a) Identifiziere zehn Fehler in den Beweisen und Definitionen und gib an, in welcher Zeile du diese findest und warum diese falsch sind. (5 Punkte)
- b) Zeige oder widerlege die ursprüngliche Aussage. (2 Punkte)

Hinweis: Ebenfalls wurde künstliche Intelligenz zur Generierung von Aufgabentiteln eingesetzt.

## **Aufgabe 2 - One cut-vertex is all it takes, falling apart with me** (8 Punkte)

In einem Graph  $G = (V, E)$  bezeichnen wir einen Knoten  $v \in V$  als Cut-Vertex, wenn  $G$  durch Löschen von  $v$  in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt. In dieser Aufgabe wollen wir alle Cut-Vertices eines Graphen mithilfe von DFS finden.

*Hinweis:* Wie immer, wenn dies nicht anders spezifiziert ist, nehmen wir  $G$  als einen ungerichteten Graphen an.

- a) Zeige, dass die Wurzel  $s$  eines DFS-Baums genau dann ein Cut-Vertex von  $G$  ist, wenn sie mehr als ein Kind hat. (2 Punkte)
- b) Zeige, dass ein Knoten  $v$ , der nicht die Wurzel des DFS-Baums ist, genau dann ein Cut-Vertex von  $G$  ist, wenn gilt:  $v$  hat ein Kind  $u$  im DFS-Baum, sodass es keine Rückkante aus dem Teilbaum unter  $u$  zu Vorfahren von  $v$  gibt. (2 Punkte)
- c) Beschreibe, wie mithilfe der low-Werte entschieden werden kann, ob ein (nicht Wurzel-) Knoten ein Cut-Vertex ist. Begründe deine Antwort. (1 Punkt)
- d) Gib einen Algorithmus an, der in  $O(n + m)$  Zeit alle Cut-Vertices in  $G$  bestimmt. Begründe dessen Korrektheit und dass er die geforderte Laufzeit hat. (3 Punkte)

## **Aufgabe 3 - Apes Components together strong!** (5 Punkte)

Diese Aufgabe baute leider auf Übung 6 auf. Es gibt daher 5 Punkte geschenkt.

## **Aufgabe 4 - Grüner Zusammenhang** (0 Punkte + 7 Bonus)

Wir betrachten einen (ungerichteten) Graphen  $G = (V, E)$  mit  $n$  Knoten und  $m$  Kanten, dessen Knoten durch die Zahlen  $0, \dots, n - 1$  repräsentiert sind. Wir gehen im folgenden davon aus, dass jede Kante entweder *schwarz* oder *grün* gefärbt ist. Darauf aufbauend

sagen wir, dass ein Knoten  $v$  einen Knoten  $w$  *grün erreicht*, wenn es einen Pfad von  $v$  nach  $w$  gibt, der nur grüne Kanten benutzt.

- a) Zeige, dass grüne Erreichbarkeit eine Äquivalenzrelation auf den Knoten des Graphen darstellt. (1 Punkt)

Wir bezeichnen die Knotenmengen, die äquivalent bezüglich grüner Erreichbarkeit sind als grüne Zusammenhangskomponenten (GRZ). Wir definieren den GRZ-Graphen  $G_{\text{GRZ}}$  von  $G$  wie folgt: für jede grüne Zusammenhangskomponente  $C$  in  $G$  enthält  $G_{\text{GRZ}}$  einen Knoten  $v_C$  und die Knoten  $v_C$  und  $v_D$  zweier GRZ  $C$  und  $D$  sind genau dann mit einer Kante  $(v_C, v_D)$  verbunden, wenn es Knoten  $c \in C$  und  $d \in D$  gibt, die mit einer Kante  $\{c, d\} \in E$  verbunden sind.

Im folgenden ist ein Algorithmus gesucht, der  $G_{\text{GRZ}}$  berechnet. Hierfür nehmen wir an, dass die Eingabe aus einer Adjazenzliste von  $G$  sowie einer Liste `greenEdges`:  $\langle \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rangle$  aller grüner Kanten besteht.

- b) Gib **Pseudocode** an, der für einen gegebenen Graphen  $G$  einen GRZ-Graphen  $G_{\text{GRZ}}$  in  $\mathcal{O}(n+m)$  Zeit konstruiert. Sowohl der Eingabegraph als auch die Ausgabe sollen als Adjazenzliste (siehe Vorlesung 8, Folie 10) gespeichert sein. Beachte hierbei insbesondere, dass die Adjazenzliste keine Kante mehrfach enthalten soll. Die Zuordnung zwischen GRZ in  $G$  und Knoten von  $G_{\text{GRZ}}$  ist dabei nicht wichtig. Nutze die Signatur `GRZGRAPH(G: Graph, greenEdges:  $\langle \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rangle$ ): [List( $\mathbb{N}_0$ ); k]`. Die Rückgabe ist hierbei die Adjazenzliste des GRZ-Graphen mit  $k$  grünen Zusammenhangskomponenten. (4 Punkte)

Hinweis: *Wie immer darfst du bekannte Algorithmen einfach als Subroutine verwenden. Eventuell erinnerst du dich an Radixsort aus Vorlesung 6?*

- c) Begründe kurz die Korrektheit deines Pseudocodes. (1 Punkt)
- d) Begründe, warum dein Pseudocode die Laufzeitanforderung erfüllt. (1 Punkt)

## Aufgabe 5 - Zum Knobeln (0 Punkte + 130 Bonus)

Um zu verhindern, dass du George Dantzig nachmachst<sup>3</sup>, gleich vorab: Das hier vorgestellte Problem ist bislang noch ungelöst.

Ein Magisches Quadrat der Größe  $3 \times 3$  ist ein Gitter mit drei Zeilen und drei Spalten. In diesem Magischen Quadrat summiert sich jede Zeile, jede Spalte und jede Diagonale auf die selbe Zahl. Wir sind nun an einem Magischen Quadrat interessiert, das nur Quadratzahlen (also Quadrate von natürlichen Zahlen) enthält. Außerdem sollen die verwendeten Quadratzahlen paarweise verschieden sein. Gib ein solches magisches Quadrat an. (130 Punkte)

---

<sup>3</sup>[https://de.wikipedia.org/wiki/George\\_Dantzig#Leistungen](https://de.wikipedia.org/wiki/George_Dantzig#Leistungen)