Übungsblatt 07

Algorithmen I - Sommersemester 2024

Abgabe im ILIAS bis 14.06.2024, 18:00 Uhr

Die Abgabe erfolgt alleine oder zu zweit als *eine* PDF-Datei über das Übungsmodul in der Gruppe eures Tutoriums im ILIAS. Beschriftet die Abgabe deutlich mit Matrikelnummer und Name.

- Achtet bei handschriftlichen Abgaben auf Lesbarkeit.
- Achtet darauf, ob Algorithmen in Worten oder Pseudocode beschrieben werden sollen.
- Es werden immer asymptotisch möglichst effiziente Algorithmen erwartet, wenn nicht anders angegeben.
- Wenn Korrektheits- oder Laufzeitanalysen gefordert sind, behandelt diese separat von der Algorithmenbeschreibung.

Gesamtpunkte: 20 (+ 4.5 Bonus)

Aufgabe 1 - Erd(ős)rutschartiger Erfolg (6 Punkte)

Da Dr. Meta über die Höhe seiner Erdős-Zahl[1] enttäuscht ist, entwirft er seine eigene Variante, die *Dr. Meta-Zahl*. Als stets bescheidener Superbösewicht, wählt er natürlich sich selbst als Ausgangspunkt mit Zahl 0. Die Dr. Meta-Zahl anderer Personen ergibt sich über die Länge des kürzesten Pfads über den sie von Dr. Meta aus im *Ko-Autoren Netzwerk* verbunden sind. In diesem Netzwerk repräsentiert jeder Knoten eine Person und zwei Personen sind mit einer Kante verbunden, wenn sie zusammen eine wissenschaftliche Publikation verfasst haben. Dr. Meta möchte außerdem, dass für die kürzesten Pfade nur Kollaborationen berücksichtigt werden, die chronologisch aufeinander folgen. Da Dr. Meta lange Paper langweilig findet, soll die Dr. Meta-Zahl kurze Paper bevorzugen und daher die Länge des Pfades entsprechend der Seitenzahlen gewichtet werden.

Formal sagen wir eine *Kollaboration* k ist ein 5-Tupel (w, w', t, j, s) aus den beiden kollaborierenden Wissenschaftlern w und w', dem Titel des Papers t, dem Erscheinungsjahr j und der Seitenzahl des Papers s. Wir nennen eine Reihe von Tupeln $(w_1, w'_1, t_1, j_1, s_1), \ldots, (w_n, w'_n, t_n, j_n, s_n)$, die bei Dr. Meta als w_1 beginnt und bei einem

[1]siehe auch https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Erdoes

Wissenschaftler $f = w'_n$ endet eine *Sequenz von Kollaborationen*, falls für alle aufeinander folgenden Kollaborationen gilt, dass $w'_i = w_{i+1}$ und $j_i \leq j_{i+1}$. Die *Tiefe* der Sequenz ist $\sum_{j=1}^{n} s_j$, die Summe der Seitenzahlen. Die Dr. Meta-Zahl eines Wissenschaftlers ist die minimale Tiefe aller Sequenzen, die bei ihm enden. Existiert für einen Wissenschaftler keine Sequenz erhält er die Dr.-Meta-Zahl ∞.

Ziel dieser Aufgabe ist es die Dr.-Meta-Zahl aller Wissenschaftler zu bestimmen. Eine Instanz $\mathcal{I}$ des Problemes besteht aus einer Menge von Wissenschaftlern $\mathcal{W}$ (inklusive Dr. Meta) und einer Menge von Kollaborationen $\mathcal{K}$. Die Lösung einer Instanz ist eine Zuweisung der Wissenschaftler aus $\mathcal{W}$ zu ihrer Dr.-Meta-Zahl, wie oben definiert.

Dr. Meta hat einige seiner Biber ausgewählt, um vor Veröffentlichung der Dr.-Meta-Zahl einige Tests durchzuführen. Gegeben sei die folgende Beispielinstanz $\mathcal{I}_0$ des Problemes.

$$\mathcal{I}_0 = (\mathcal{W}_0, \mathcal{K}_0)$$

$$\mathcal{W}_0 = \{\text{Andy, Carl, Hailey, Justin, Michael, Dr. Meta}\}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_0 = \{&(\text{Dr. Meta, Hailey, In Kanada wurde ein Biber verhaftet (Obwohl es der Ottawa), } 2015, 1),\\
&(\text{Justin, Hailey, Fishy Business, } 2025, 1),\\
&(\text{Dr. Meta, Justin, Oh dam! Fluchen für Biber, } 2023, 3),\\
&(\text{Michael, Justin, Was ist das Lieblingsessen von Bibern? Steg!, } 1974, 10),\\
&(\text{Andy, Justin, To Biber or not to Biber, } 2024, 7),\\
&(\text{Carl, Justin, Dammbruch in Biberach, } 1749, 4),\\
&(\text{Andy, Carl, Bib(er)lische Theologie, } 2100, 5)\}
\end{aligned}$$

Hinweis: Aufgrund von Symmetrie enthält jede Instanz, die eine Kollaboration (w, w', t, j, s) enthält auch die Kollaboration (w', w, t, j, s). Wir verzichten aus Gründen der Übersicht darauf diese jedes Mal explizit aufzuführen.

a) Gib die Lösung der Beispielinstanz $\mathcal{I}_0$ an, das heißt gib die Dr. Meta-Zahl jeder Person aus $\mathcal{W}_0$ an. (1 Punkt)

b) Du sollst nun für Dr. Meta das Problem als Graph modellieren. Konkret bedeutet dies, dass du angeben sollst, wie du aus einer beliebigen Instanz $\mathcal{I}$ einen Graphen $G_{\mathcal{I}}$ konstruieren kannst, in dem für jeden Wissenschaftler w aus $\mathcal{I}$ einen korrespondierenden Knoten $v_w \in V(G_{\mathcal{I}})$ gibt. In $G_{\mathcal{I}}$ soll dann eine einfache Anwendung von Dijkstras Algorithmus (ohne diesen anzupassen) die Dr. Meta-Zahl der als Knoten repräsentierten Wissenschaftler korrekt bestimmen. Für eventuelle weitere Knoten, darf der Algorithmus beliebige Werte ausgeben. (3 Punkte)

   Hinweis: Zum Modellieren als Graph gehört es dazu sich Gedanken zu machen, was die Knoten und was die Kanten des Graphen bedeuten sollen. Außerdem sollte man sich Fragen, ob der Graph gerichtet und/oder gewichtet ist. Dies ist allerdings nur ein erster Ansatz, eine vollständige Modellierung kann weitere Aspekte beinhalten.

c) Für diese Teilaufgabe schränken wir die Instanz $\mathcal{I}_0$ auf die Biber Andy, Carl, Justin so wie Dr. Meta und ihre Kollaborationen ein. Zeichne nun den Graphen $G_{\mathcal{I}_0}$ zur eingeschränkten Beispielinstanz. (2 Punkte)

Aufgabe 2 - Adapt to survive (9 Punkte)

Normale kürzeste Wege finden ist dir zu langweilig? Kein Problem, dann ist diese Aufgabe etwas für dich. Wir wollen in dieser Aufgabe Dijkstras Algorithmus nutzen, um einige verwandte Probleme zu lösen. Wenn nicht anders angegeben sind unsere Graphen in dieser Aufgabe ungerichtet und haben ganzzahlige, nicht negative Gewichte.

a) Wir wollen in dem Graphen den Engpasspfad zwischen zwei Knoten s und t finden. Dies ist ein Pfad zwischen s und t im Graphen, dessen längste Kante so kurz wie möglich ist. Gib einen Algorithmus an, der für einen gegebenen Startknoten s den Engpasspfad zu allen anderen Knoten bestimmt. Begründe die Korrektheit und die Laufzeit des Algorithmus. (3 Punkte)

b) In diesem Aufgabenteil betrachten wir Kantengewichte aus dem Intervall $[0, 1]$. Wir interpretieren das Gewicht einer Kante nun als die Wahrscheinlichkeit, dass diese *stabil* ist. Die *Stabilität* eines Pfades ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Kanten auf diesem stabil sind, also das Produkt aller Kantengewichte auf dem Pfad. Gib einen Algorithmus an, der für einen gegebenen Startknoten s den jeweils stabilsten Pfad zu allen anderen Knoten bestimmt. Begründe die Korrektheit und die Laufzeit des Algorithmus. (3 Punkte)

c) Unser Graph $G = (V, E)$ nutzt nun Knotengewichte anstelle von Kantengewichten. Das heißt wir nutzen nun eine Kostenfunktion $c : V \to \mathbb{N}_0$ und die Kosten eines Pfades entsprechen der Summe der Gewichte aller Knoten, die auf dem Pfad liegen. Gib einen Algorithmus an, der für einen gegebenen Startknoten s den jeweils kürzesten Pfad zu allen anderen Knoten bestimmt. Begründe die Korrektheit und die Laufzeit des Algorithmus. (3 Punkte)

Aufgabe 3 - Do discrepancies damage Dijkstras distinguished deeds? (5 Punkte)

Gegeben sei ein ungerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit ganzzahligen Kantengewichten $c : E \to \mathbb{N}_+$. Wir betrachten nun die folgenden Modifikationen auf G. Entscheide für jede Modifikation, ob die kürzesten Pfade zwischen zwei Knoten erhalten bleiben, also weiterhin über die selben Kanten und Zwischenknoten verlaufen. Begründe deine Entscheidung.

a) Sei $k = \min_{e \in E}(c(e))$ das minimale Kantengewicht. Wir senken nun alle Kantengewichte um k, wir nutzen also die Gewichtsfunktion $c'(e) = c(e) - k$. (1 Punkt)

b) Sei nun $k = ggt\{c(e) | e \in E\}$ der größte gemeinsame Teiler aller Kantengewichte. Wir teilen nun alle Kantengewichte durch k, wir nutzen also die Gewichtsfunktion $c'(e) = \frac{c(e)}{k}$. (1 Punkt)

c) Sei nun $k \in \mathbb{N}_+$. Wir teilen nun alle Kantengewichte durch k und runden auf, wir nutzen also die Gewichtsfunktion $c'(e) = \lceil \frac{c(e)}{k} \rceil$. (1 Punkt)

d) Sein nun $k = \max_{e \in E}(c(e))$ das maximale Kantengewicht und $s \in V$ ein Startknoten. Füge nun für jeden Knoten v eine Kante $\{s, v\}$ mit Gewicht $2 \cdot k$ ein. (1 Punkt)

e) Sein nun $k = \left(\sum_{e \in E} c(e) \right) + 1$ die Summe aller Kantengewichte plus eins und $s \in V$ ein Startknoten. Füge nun für jeden Knoten v eine Kante $\{s, v\}$ mit Gewicht k ein. (1 Punkt)

Aufgabe 4 - Zum Knobeln (0 Punkte + 4.5 Bonus)

Die algorithmisch-logische Geheimorganisation (alGo) versucht nun seit Jahren Dr. Metas Agentennetz zu zerschlagen. Doch jedes mal, wenn sie einen Agenten enttarnen, rekrutiert Dr. Meta $n \in \mathbb{N}_+$ neue Agenten. Dabei kann n nach jeder Enttarnung anders gewählt sein.

Folgendes konnte die alGo über das Agentennetz in Erfahrung bringen. Im Agentennetzwerk gibt es eine klare Hierarchie. Diese Hierarchie ist in einer festen Zeichnung, dem Organigramm, festgehalten. Jeder Agent hat genau einen direkten Vorgesetzten und von jedem Agenten lässt sich eine Folge von Vorgesetzten bis zu Dr. Meta finden. Wird nun ein Agent enttarnt, rekrutiert der Vorgesetzte des Vorgesetzten des enttarnten Agenten, sofern dieser existiert, n neue Agenten. Diese neuen Agenten sind dann dem Vorgesetzten des Vorgesetzten unterstellt und werden im Organigramm neben den anderen Untergebenen des Vorgesetzten möglichst weit rechts angesiedelt. Alle Agenten, die aktuell einen Untergebenen haben, arbeiten an einem sicheren Ort und können daher nicht enttarnt werden. Dr. Meta hat, wie könnte es auch anders sein, keinen Vorgesetzten[2] und beteiligt sich auch nicht an der Rekrutierung neuer Agenten. Da er ein bekannter und global operierender Superbösewicht ist, kann er auch nicht enttarnt werden.

a*) Zeige durch ein Beispiel, dass das Vorgehen der alGo sehr lange dauern kann. Wir nehmen an, dass Dr. Meta n jeweils als die Anzahl der bisher enttarnten Agenten plus 1 wählt. Außerdem betrachten wir die feste Zeichnung des Agentennetzwerks und nehmen an, das alGo stets den Agenten enttarnt, der unter den Agenten ohne Untergebene am wenigsten lang für alGo arbeitet (in Dr. Metas Organigramm steht dieser am weitesten rechts).

Zeichne dafür den Zustand des Agentennetzes zu Beginn und nach jeder Enttarnung für das folgende Netz: Agentin Allen hat keine Untergebenen, Agentin Liskov

[2] Die Behauptung, dass es einen Super-Superbösewicht namens Dr. Meta-Meta gibt, hat sich als eine Erfindung einiger Studenten heraus gestellt.

ist ihre Vorgesetzte. Die Vorgesetzte von Agentin Liskov ist Agentin Hopper. Agentin Lovelace ist die Vorgesetzte von Agentin Hopper und die direkte Untergebene von Dr. Meta. (2 Punkte)

b*) Schätze wie viele Agenten die alGo enttarnen muss, falls die Regeln aus a*) gelten und im obigen Netz zusätzlich die Agentin Goldwasser der Agentin Allen unterstellt ist, aber keine Untergebenen hat. (0.5 Punkte)

Hinweis: Ist deine Zahl mindestens halb und maximal doppelt so groß, wie das korrekte Ergebnis, erhältst du den Punkt

c*) Nachdem die alGo Semester nach Semester Agenten enttarnt und Dr. Metas Agentennetz immer weiter wächst, sind die Mitglieder der alGo kurz davor aufzugeben. Zeige, dass die Bemühungen der alGo nicht umsonst sind. Das heißt unabhängig, von der initialen Anzahl an Agenten, deren konkreter Hierarchie im Agentennetz zu Beginn, und wie n nach jeder Enttarnung gewählt wird, führt das Vorgehen der alGo irgendwann zur Zerschlagung des gesamten Netzwerkes. (2 Punkte)