Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen 1

Dynamische Programmierung

Fibonacci-Zahlen

Definition: $F(1) = F(2) = 1,\ F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n \geq 3$ $\quad (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$

Fibonacci-Zahlen

Definition: $F(1) = F(2) = 1,\ F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n \geq 3$ $\quad (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$

Fib(*Number* n)

```
F := Array of size n + 1
F[1] := 1
F[2] := 1
for i ∈ {3, ..., n} do
    F[i] := F[i − 1] + F[i − 2]
return F[n]
```

F(*Number* n)

```
if n = 1 or n = 2 then
    return 1
return F(n − 1) + F(n − 2)
```

Fibonacci-Zahlen

Definition: $F(1) = F(2) = 1,\ F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n \geq 3$ $\quad (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$

Fib(*Number* n)

```
F := Array of size n + 1
F[1] := 1
F[2] := 1
for i ∈ {3, ..., n} do
    F[i] := F[i − 1] + F[i − 2]
return F[n]
```

F(*Number* n)

```
if n = 1 or n = 2 then
    return 1
return F(n − 1) + F(n − 2)
```

Laufzeit

- iterativ: $\Theta(n)$

Fibonacci-Zahlen

Definition: $F(1) = F(2) = 1,\ F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n \geq 3$ $\quad (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$

Fib(*Number* n)

```
F := Array of size n + 1
F[1] := 1
F[2] := 1
for i ∈ {3, ..., n} do
    F[i] := F[i − 1] + F[i − 2]
return F[n]
```

F(*Number* n)

```
if n = 1 or n = 2 then
    return 1
return F(n − 1) + F(n − 2)
```

Rekursionsbaum: $\boxed{\mathbf{F}(6)}$

Laufzeit

- iterativ: $\Theta(n)$

Fibonacci-Zahlen

Definition: $F(1) = F(2) = 1,\ F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n \geq 3$ $\quad (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$

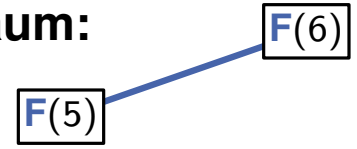
Fib(*Number* n)

```
F := Array of size n + 1
F[1] := 1
F[2] := 1
for i ∈ {3, ..., n} do
    F[i] := F[i − 1] + F[i − 2]
return F[n]
```

F(*Number* n)

```
if n = 1 or n = 2 then
    return 1
return F(n − 1) + F(n − 2)
```

Rekursionsbaum:



Laufzeit

- iterativ: $\Theta(n)$

Fibonacci-Zahlen

Definition: $F(1) = F(2) = 1,\ F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n \geq 3$ $\quad (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$

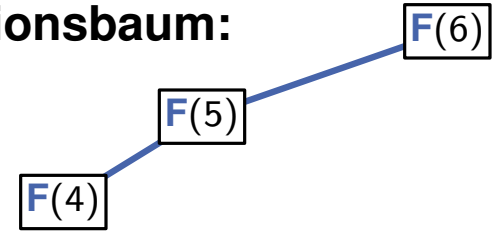
Fib(*Number* n)

```
F := Array of size n + 1
F[1] := 1
F[2] := 1
for i ∈ {3, ..., n} do
    F[i] := F[i − 1] + F[i − 2]
return F[n]
```

F(*Number* n)

```
if n = 1 or n = 2 then
    return 1
return F(n − 1) + F(n − 2)
```

Rekursionsbaum:



Laufzeit

- iterativ: $\Theta(n)$

Fibonacci-Zahlen

Definition: $F(1) = F(2) = 1,\ F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n \geq 3$ $\quad (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$

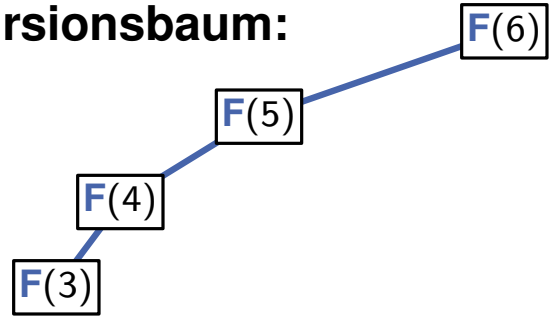
Fib(*Number* n)

```
F := Array of size n + 1
F[1] := 1
F[2] := 1
for i ∈ {3, ..., n} do
    F[i] := F[i − 1] + F[i − 2]
return F[n]
```

F(*Number* n)

```
if n = 1 or n = 2 then
    return 1
return F(n − 1) + F(n − 2)
```

Rekursionsbaum:



Laufzeit

- iterativ: $\Theta(n)$

Fibonacci-Zahlen

Definition: $F(1) = F(2) = 1,\ F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n \geq 3$ $\quad (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$

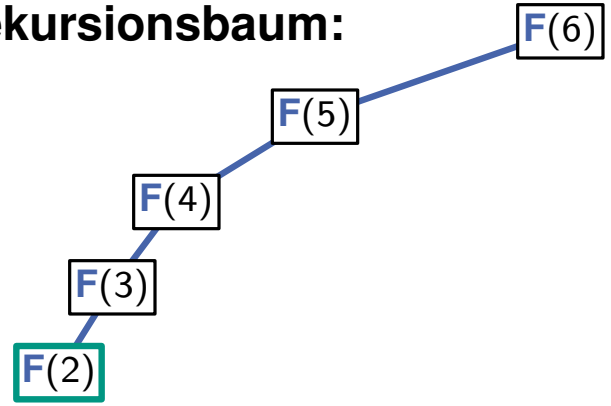
Fib(*Number* n)

```
F := Array of size n + 1
F[1] := 1
F[2] := 1
for i ∈ {3, ..., n} do
    F[i] := F[i − 1] + F[i − 2]
return F[n]
```

F(*Number* n)

```
if n = 1 or n = 2 then
    return 1
return F(n − 1) + F(n − 2)
```

Rekursionsbaum:



Laufzeit

- iterativ: $\Theta(n)$

Fibonacci-Zahlen

Definition: $F(1) = F(2) = 1,\ F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n \geq 3$ $\quad (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$

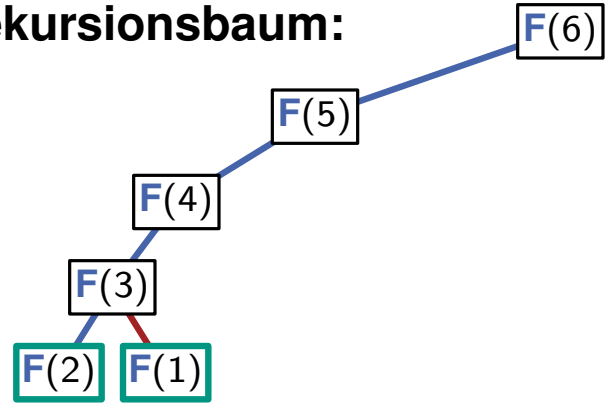
Fib(*Number* n)

```
F := Array of size n + 1
F[1] := 1
F[2] := 1
for i ∈ {3, ..., n} do
    F[i] := F[i − 1] + F[i − 2]
return F[n]
```

F(*Number* n)

```
if n = 1 or n = 2 then
    return 1
return F(n − 1) + F(n − 2)
```

Rekursionsbaum:



Laufzeit

- iterativ: $\Theta(n)$

Fibonacci-Zahlen

Definition: $F(1) = F(2) = 1,\ F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n \geq 3$ $\quad (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$

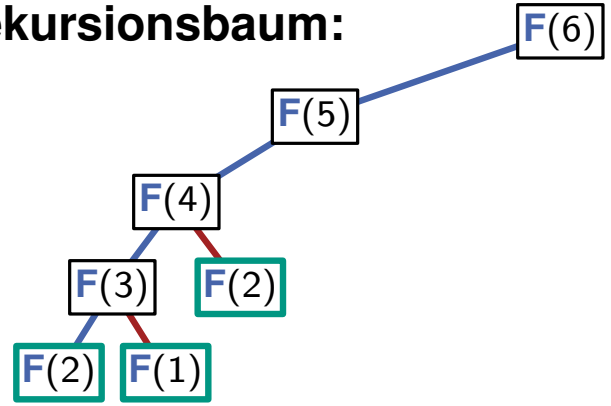
Fib(*Number* n)

```
F := Array of size n + 1
F[1] := 1
F[2] := 1
for i ∈ {3, ..., n} do
    F[i] := F[i − 1] + F[i − 2]
return F[n]
```

F(*Number* n)

```
if n = 1 or n = 2 then
    return 1
return F(n − 1) + F(n − 2)
```

Rekursionsbaum:



Laufzeit

- iterativ: $\Theta(n)$

Fibonacci-Zahlen

Definition: $F(1) = F(2) = 1,\ F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n \geq 3$ $\quad (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$

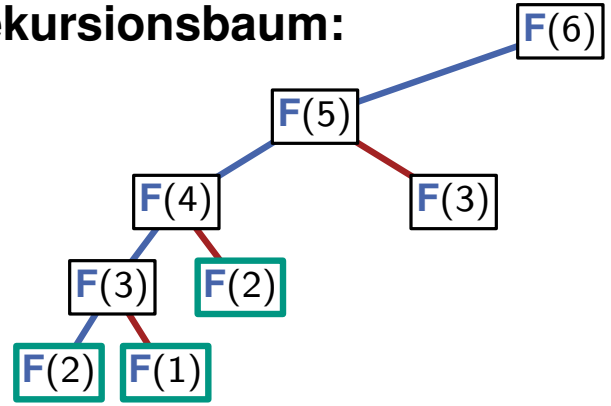
Fib(*Number* n)

```
F := Array of size n + 1
F[1] := 1
F[2] := 1
for i ∈ {3, ..., n} do
    F[i] := F[i − 1] + F[i − 2]
return F[n]
```

F(*Number* n)

```
if n = 1 or n = 2 then
    return 1
return F(n − 1) + F(n − 2)
```

Rekursionsbaum:



Laufzeit

- iterativ: $\Theta(n)$

Fibonacci-Zahlen

Definition: $F(1) = F(2) = 1,\ F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n \geq 3$ $\quad (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$

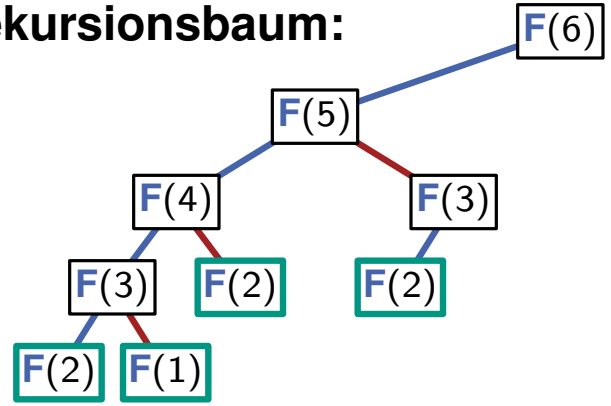
Fib(*Number* n)

```
F := Array of size n + 1
F[1] := 1
F[2] := 1
for i ∈ {3, ..., n} do
    F[i] := F[i − 1] + F[i − 2]
return F[n]
```

F(*Number* n)

```
if n = 1 or n = 2 then
    return 1
return F(n − 1) + F(n − 2)
```

Rekursionsbaum:



Laufzeit

- iterativ: $\Theta(n)$

Fibonacci-Zahlen

Definition: $F(1) = F(2) = 1,\ F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n \geq 3$ $\quad (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$

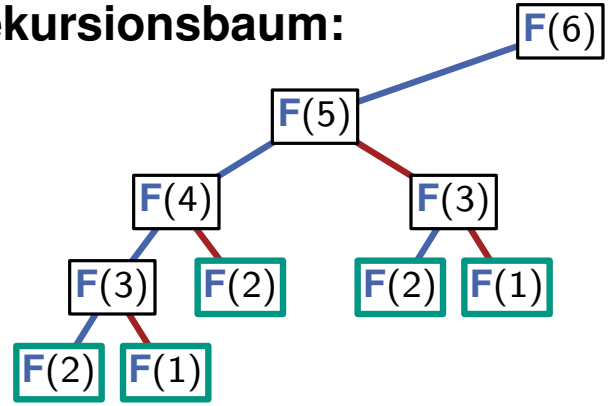
Fib(*Number* n)

```
F := Array of size n + 1
F[1] := 1
F[2] := 1
for i ∈ {3, ..., n} do
    F[i] := F[i − 1] + F[i − 2]
return F[n]
```

F(*Number* n)

```
if n = 1 or n = 2 then
    return 1
return F(n − 1) + F(n − 2)
```

Rekursionsbaum:



Laufzeit

- iterativ: $\Theta(n)$

Fibonacci-Zahlen

Definition: $F(1) = F(2) = 1,\ F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n \geq 3$ $\quad (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$

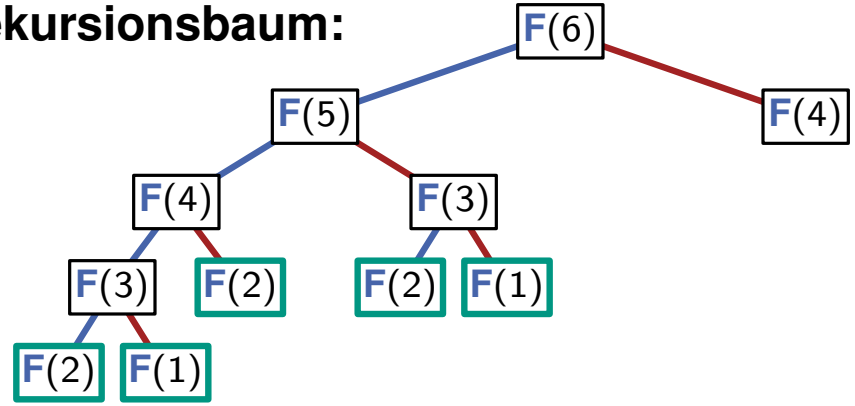
Fib(*Number* n)

```
F := Array of size n + 1
F[1] := 1
F[2] := 1
for i ∈ {3, ..., n} do
    F[i] := F[i − 1] + F[i − 2]
return F[n]
```

F(*Number* n)

```
if n = 1 or n = 2 then
    return 1
return F(n − 1) + F(n − 2)
```

Rekursionsbaum:



Laufzeit

- iterativ: $\Theta(n)$

Fibonacci-Zahlen

Definition: $F(1) = F(2) = 1,\ F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n \geq 3$ $\quad (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$

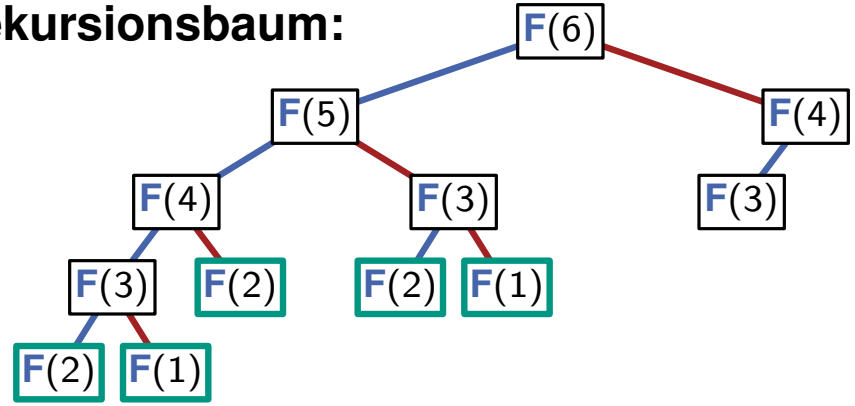
Fib(*Number* n)

```
F := Array of size n + 1
F[1] := 1
F[2] := 1
for i ∈ {3, ..., n} do
    F[i] := F[i − 1] + F[i − 2]
return F[n]
```

F(*Number* n)

```
if n = 1 or n = 2 then
    return 1
return F(n − 1) + F(n − 2)
```

Rekursionsbaum:



Laufzeit

- iterativ: $\Theta(n)$

Fibonacci-Zahlen

Definition: $F(1) = F(2) = 1,\ F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n \geq 3$ $\quad (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$

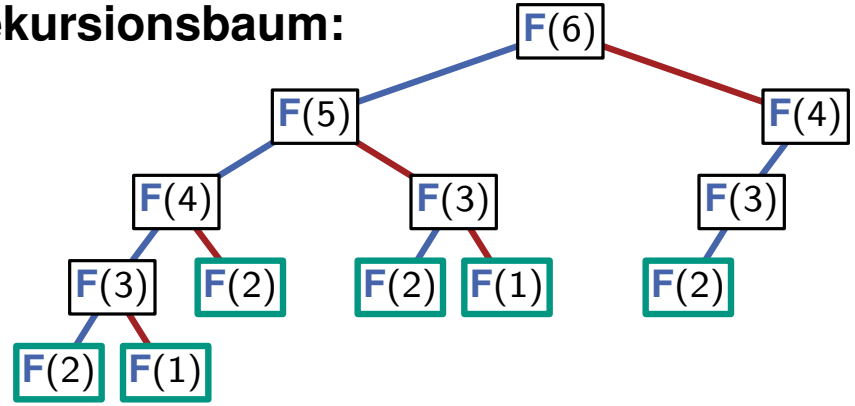
Fib(*Number* n)

```
F := Array of size n + 1
F[1] := 1
F[2] := 1
for i ∈ {3, ..., n} do
    F[i] := F[i − 1] + F[i − 2]
return F[n]
```

F(*Number* n)

```
if n = 1 or n = 2 then
    return 1
return F(n − 1) + F(n − 2)
```

Rekursionsbaum:



Laufzeit

- iterativ: $\Theta(n)$

Fibonacci-Zahlen

Definition: $F(1) = F(2) = 1,\ F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n \geq 3$ $\quad (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$

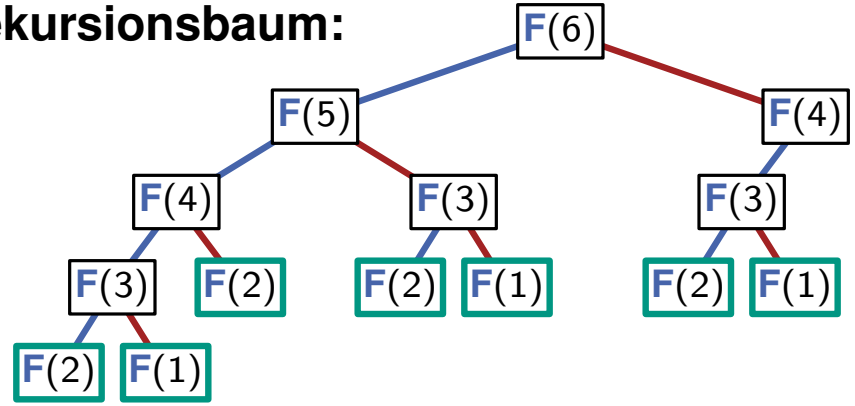
Fib(*Number* n)

```
F := Array of size n + 1
F[1] := 1
F[2] := 1
for i ∈ {3, ..., n} do
    F[i] := F[i − 1] + F[i − 2]
return F[n]
```

F(*Number* n)

```
if n = 1 or n = 2 then
    return 1
return F(n − 1) + F(n − 2)
```

Rekursionsbaum:



Laufzeit

- iterativ: $\Theta(n)$

Fibonacci-Zahlen

Definition: $F(1) = F(2) = 1,\ F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n \geq 3$ $\quad (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$

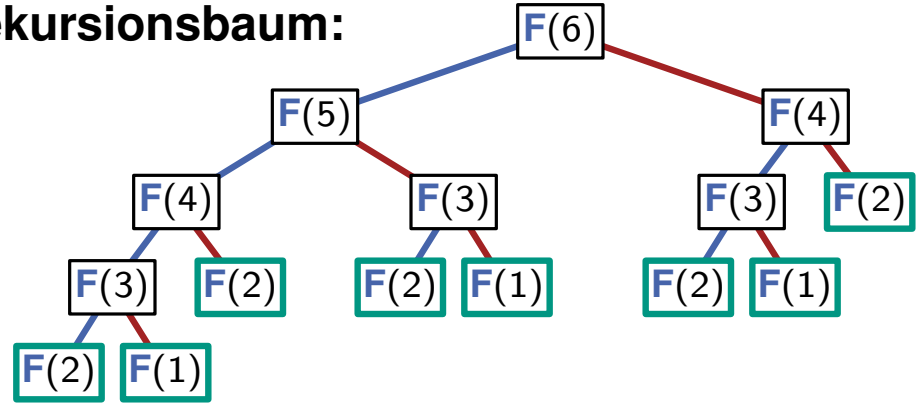
Fib(*Number* n)

```
F := Array of size n + 1
F[1] := 1
F[2] := 1
for i ∈ {3, ..., n} do
    F[i] := F[i − 1] + F[i − 2]
return F[n]
```

F(*Number* n)

```
if n = 1 or n = 2 then
    return 1
return F(n − 1) + F(n − 2)
```

Rekursionsbaum:



Laufzeit

- iterativ: $\Theta(n)$

Fibonacci-Zahlen

Definition: $F(1) = F(2) = 1,\ F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n \geq 3$ $\quad (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$

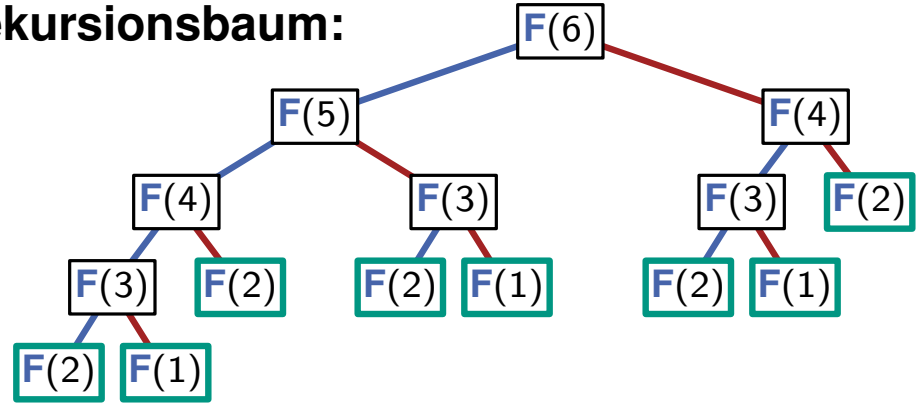
Fib(*Number* n)

```
F := Array of size n + 1
F[1] := 1
F[2] := 1
for i ∈ {3, ..., n} do
    F[i] := F[i − 1] + F[i − 2]
return F[n]
```

F(*Number* n)

```
if n = 1 or n = 2 then
    return 1
return F(n − 1) + F(n − 2)
```

Rekursionsbaum:



Laufzeit

- iterativ: $\Theta(n)$
- rekursiv: $\Theta(\varphi^n)$ mit $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6181$

(Rekurrenz lösen (nicht hier): $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \Theta(1)$)

Was ist hier passiert?

Rekursiv definiertes Problem

- reduziert Gesamtproblem auf kleinere Teilprobleme
  - Gesamtproblem: berechne $F(n)$; Teilprobleme: berechne $F(n-1)$ und $F(n-2)$
- Teilprobleme überlappen sich
  - für $F(n-1)$ muss man nochmal $F(n-2)$ berechnen
- rekursive Lösung: betrachtet selbes Teilproblem mehrfach

Was ist hier passiert?

Karlsruher Institut für Technologie

Rekursiv definiertes Problem

- reduziert Gesamtproblem auf kleinere Teilprobleme
  - Gesamtproblem: berechne $F(n)$; Teilprobleme: berechne $F(n-1)$ und $F(n-2)$
- Teilprobleme überlappen sich
  - für $F(n-1)$ muss man nochmal $F(n-2)$ berechnen
- rekursive Lösung: betrachtet selbes Teilproblem mehrfach

Iterative Lösung

- baue schrittweise größere Teillösungen auf
- Teillösungen speichern $\rightarrow$ keine mehrfache Berechnung

Was ist hier passiert?

Rekursiv definiertes Problem

- reduziert Gesamtproblem auf kleinere Teilprobleme
  - Gesamtproblem: berechne $F(n)$; Teilprobleme: berechne $F(n-1)$ und $F(n-2)$
- Teilprobleme überlappen sich
  - für $F(n-1)$ muss man nochmal $F(n-2)$ berechnen
- rekursive Lösung: betrachtet selbes Teilproblem mehrfach

Iterative Lösung

- baue schrittweise größere Teillösungen auf
- Teillösungen speichern $\rightarrow$ keine mehrfache Berechnung

Und wenn das Problem gar nicht rekursiv definiert ist?

- finde eine äquivalente rekursive Definition

Was ist hier passiert?

Rekursiv definiertes Problem

- reduziert Gesamtproblem auf kleinere Teilprobleme
  - Gesamtproblem: berechne $F(n)$; Teilprobleme: berechne $F(n-1)$ und $F(n-2)$
- Teilprobleme überlappen sich
  - für $F(n-1)$ muss man nochmal $F(n-2)$ berechnen
- rekursive Lösung: betrachtet selbes Teilproblem mehrfach

Iterative Lösung

- baue schrittweise größere Teillösungen auf
- Teillösungen speichern $\rightarrow$ keine mehrfache Berechnung

} meist recht einfach

Und wenn das Problem gar nicht rekursiv definiert ist?

- finde eine äquivalente rekursive Definition

} das ist der schwierige Teil

Problemstellung: Splittability

Definition
Ein **String** S der Länge n ist eine Folge von Buchstaben $\langle S[0], \ldots, S[n-1] \rangle$. Die Teilfolge $\langle S[a], \ldots, S[b] \rangle$ bezeichnen wir auch mit $S[a, b] = S[a, b+1) = S(a-1, b] = S(a-1, b+1)$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
E	i	n	B	e	i	s	p	i	e	l	S	t	r	i	n	g

$S[3, 11)$

Problemstellung: Splittability

Definition
Ein **String** S der Länge n ist eine Folge von Buchstaben $\langle S[0], \ldots, S[n-1] \rangle$. Die Teilfolge $\langle S[a], \ldots, S[b] \rangle$ bezeichnen wir auch mit $S[a, b] = S[a, b+1) = S(a-1, b] = S(a-1, b+1)$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
E	i	n	B	e	i	s	p	i	e	l	S	t	r	i	n	g

$S[3, 11)$

Problem: Splittability
Gegeben ein String S, gibt es Trennstellen $0 = s_0 < \cdots < s_k = n$, sodass $S[s_{i-1}, s_i)$ für alle $i \in [1, k]$ ein gültiges Wort ist? Wir sagen dann, dass S **splittable** ist.

m	o	n	k	e	y	e	a	r	t	h	a	i	r

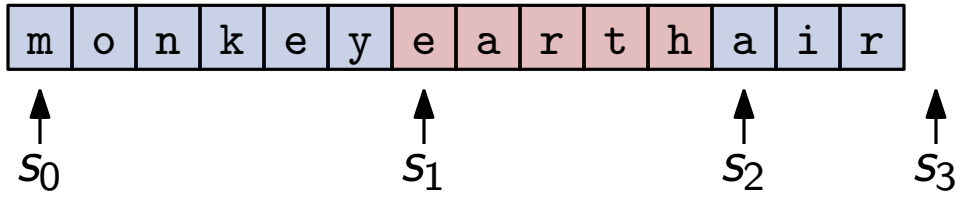
Problemstellung: Splittability

Definition
Ein **String** S der Länge n ist eine Folge von Buchstaben $\langle S[0], \ldots, S[n-1] \rangle$. Die Teilfolge $\langle S[a], \ldots, S[b] \rangle$ bezeichnen wir auch mit $S[a, b] = S[a, b+1) = S(a-1, b] = S(a-1, b+1)$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
E	i	n	B	e	i	s	p	i	e	l	S	t	r	i	n	g

$S[3, 11)$

Problem: Splittability
Gegeben ein String S, gibt es Trennstellen $0 = s_0 < \cdots < s_k = n$, sodass $S[s_{i-1}, s_i)$ für alle $i \in [1, k]$ ein gültiges Wort ist? Wir sagen dann, dass S **splittable** ist.



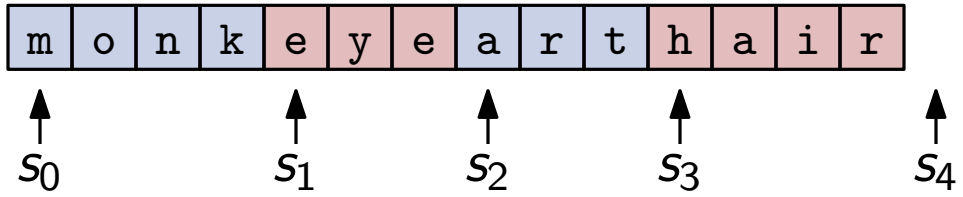
Problemstellung: Splittability

Definition
Ein **String** S der Länge n ist eine Folge von Buchstaben $\langle S[0], \ldots, S[n-1] \rangle$. Die Teilfolge $\langle S[a], \ldots, S[b] \rangle$ bezeichnen wir auch mit $S[a, b] = S[a, b+1) = S(a-1, b] = S(a-1, b+1)$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
E	i	n	B	e	i	s	p	i	e	l	S	t	r	i	n	g

$S[3, 11)$

Problem: Splittability
Gegeben ein String S, gibt es Trennstellen $0 = s_0 < \cdots < s_k = n$, sodass $S[s_{i-1}, s_i)$ für alle $i \in [1, k]$ ein gültiges Wort ist? Wir sagen dann, dass S **splittable** ist.



Teilprobleme und rekursive Definition

Problem: Splittability
Gegeben ein String S, gibt es Trennstellen $0 = s_0 < \cdots < s_k = n$, sodass $S[s_{i-1}, s_i)$ für alle $i \in [1, k]$ ein gültiges Wort ist? Wir sagen dann, dass S **splittable** ist.

Teilprobleme und rekursive Definition

Problem: Splittability
Gegeben ein String S, gibt es Trennstellen $0 = s_0 < \cdots < s_k = n$, sodass $S[s_{i-1}, s_i)$ für alle $i \in [1, k]$ ein gültiges Wort ist? Wir sagen dann, dass S **splittable** ist.

Teilprobleme

- für $i \in [0, n]$: Ist $S[0, i)$ splittable?

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
m	o	n	k	e	y	e	a	r	t	h	a	i	r

Beispiel: $S[0, 9)$ ist splittable

Teilprobleme und rekursive Definition

Problem: Splittability
Gegeben ein String S, gibt es Trennstellen $0 = s_0 < \cdots < s_k = n$, sodass $S[s_{i-1}, s_i)$ für alle $i \in [1, k]$ ein gültiges Wort ist? Wir sagen dann, dass S **splittable** ist.

Teilprobleme

- für $i \in [0, n]$: Ist $S[0, i)$ splittable?
- beachte: Gesamtproblem fragt ob $S[0, n)$ splittable ist

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
m	o	n	k	e	y	e	a	r	t	h	a	i	r

Beispiel: $S[0, 9)$ ist splittable

Teilprobleme und rekursive Definition

Problem: Splittability
Gegeben ein String S, gibt es Trennstellen $0 = s_0 < \cdots < s_k = n$, sodass $S[s_{i-1}, s_i)$ für alle $i \in [1, k]$ ein gültiges Wort ist? Wir sagen dann, dass S **splittable** ist.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
m	o	n	k	e	y	e	a	r	t	h	a	i	r

Beispiel: $S[0, 9)$ ist splittable

Teilprobleme

- für $i \in [0, n]$: Ist $S[0, i)$ splittable?
- beachte: Gesamtproblem fragt ob $S[0, n)$ splittable ist

Rekursive Definition auf Basis der Teilprobleme

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$

Teilprobleme und rekursive Definition

Problem: Splittability
Gegeben ein String S, gibt es Trennstellen $0 = s_0 < \cdots < s_k = n$, sodass $S[s_{i-1}, s_i)$ für alle $i \in [1, k]$ ein gültiges Wort ist? Wir sagen dann, dass S **splittable** ist.

Teilprobleme

- für $i \in [0, n]$: Ist $S[0, i)$ splittable?
- beachte: Gesamtproblem fragt ob $S[0, n)$ splittable ist

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
m	o	n	k	e	y	e	a	r	t	h	a	i	r

Beispiel: $S[0, 9)$ ist splittable

Rekursive Definition auf Basis der Teilprobleme

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
m	o	n	k	e	y	e	a	r	t	h	a	i	r

Beispiel:
splittable$(7) \wedge$ **isWord**$(S[7, 10)) = \texttt{true}$
$\Rightarrow$ **splittable**$(10) = \texttt{true}$

pwa.klicker.uzh.ch/join/algo1

Teilprobleme und rekursive Definition

Problem: Splittability
Gegeben ein String S, gibt es Trennstellen $0 = s_0 < \cdots < s_k = n$, sodass $S[s_{i-1}, s_i)$ für alle $i \in [1, k]$ ein gültiges Wort ist? Wir sagen dann, dass S **splittable** ist.

Teilprobleme

- für $i \in [0, n]$: Ist $S[0, i)$ splittable?
- beachte: Gesamtproblem fragt ob $S[0, n)$ splittable ist

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
m	o	n	k	e	y	e	a	r	t	h	a	i	r

Beispiel: $S[0, 9)$ ist splittable

Rekursive Definition auf Basis der Teilprobleme

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$

Wie geht die rekursive Definition weiter?

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
m	o	n	k	e	y	e	a	r	t	h	a	i	r

Beispiel:
splittable$(7) \wedge$ **isWord**$(S[7, 10)) = \texttt{true}$
$\Rightarrow$ **splittable**$(10) = \texttt{true}$

Teilprobleme und rekursive Definition

Problem: Splittability
Gegeben ein String S, gibt es Trennstellen $0 = s_0 < \cdots < s_k = n$, sodass $S[s_{i-1}, s_i)$ für alle $i \in [1, k]$ ein gültiges Wort ist? Wir sagen dann, dass S **splittable** ist.

Teilprobleme

- für $i \in [0, n]$: Ist $S[0, i)$ splittable?
- beachte: Gesamtproblem fragt ob $S[0, n)$ splittable ist

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
m	o	n	k	e	y	e	a	r	t	h	a	i	r

Beispiel: $S[0, 9)$ ist splittable

Rekursive Definition auf Basis der Teilprobleme

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
m	o	n	k	e	y	e	a	r	t	h	a	i	r

Beispiel:
splittable$(7) \wedge$ **isWord**$(S[7, 10)) = \texttt{true}$
$\Rightarrow$ **splittable**$(10) = \texttt{true}$

Korrektheit

Theorem
Der Teilstring $S[0, i)$ ist genau dann splittable, wenn **splitable**$(i) = \texttt{true}$.

Beweis: Induktion über i

- Induktionsanfang: der leere String ist splittable und **splitable**$(0) = \texttt{true}$

Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Korrektheit

Theorem
Der Teilstring $S[0, i)$ ist genau dann splittable, wenn **splitable**$(i) = \texttt{true}$.

Beweis: Induktion über i

- Induktionsanfang: der leere String ist splittable und **splitable**$(0) = \texttt{true}$
- Hinrichtung: $S[0, i)$ splittable $\Rightarrow$ **splittable**$(i) = \texttt{true}$

Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

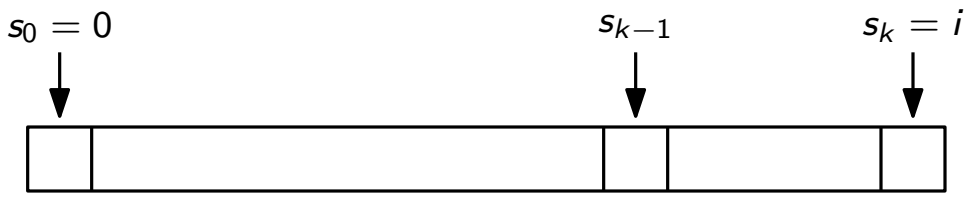
- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Korrektheit

Theorem
Der Teilstring $S[0, i)$ ist genau dann splittable, wenn **splitable**$(i) = \texttt{true}$.

Beweis: Induktion über i

- Induktionsanfang: der leere String ist splittable und **splitable**$(0) = \texttt{true}$
- Hinrichtung: $S[0, i)$ splittable $\Rightarrow$ **splittable**$(i) = \texttt{true}$
  - betrachte Lösung $0 = s_0 < \cdots < s_k = i$



Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

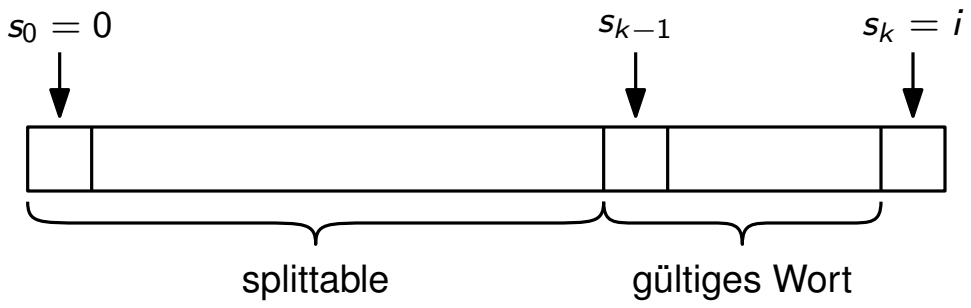
- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Korrektheit

Theorem
Der Teilstring $S[0, i)$ ist genau dann splittable, wenn **splitable**$(i) = \texttt{true}$.

Beweis: Induktion über i

- Induktionsanfang: der leere String ist splittable und **splitable**$(0) = \texttt{true}$
- Hinrichtung: $S[0, i)$ splittable $\Rightarrow$ **splittable**$(i) = \texttt{true}$
  - betrachte Lösung $0 = s_0 < \cdots < s_k = i$
  - dann ist $S[0, s_{k-1})$ splittable und $S[s_{k-1}, i)$ ein Wort



Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

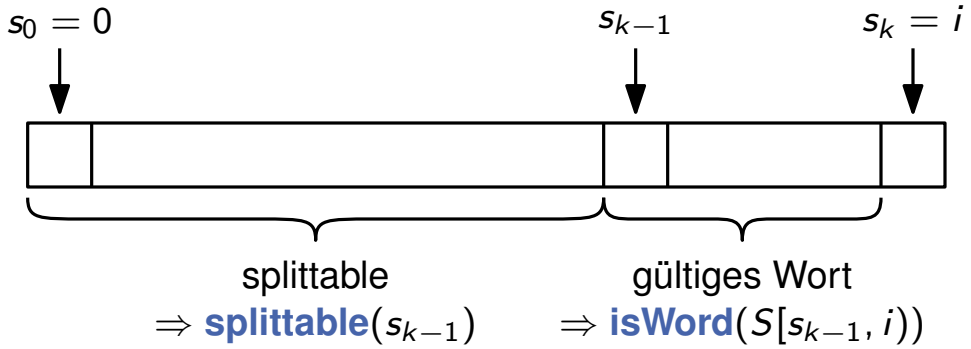
- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Korrektheit

Theorem
Der Teilstring $S[0, i)$ ist genau dann splittable, wenn **splitable**$(i) = \texttt{true}$.

Beweis: Induktion über i

- Induktionsanfang: der leere String ist splittable und **splitable**$(0) = \texttt{true}$
- Hinrichtung: $S[0, i)$ splittable $\Rightarrow$ **splittable**$(i) = \texttt{true}$
  - betrachte Lösung $0 = s_0 < \cdots < s_k = i$
  - dann ist $S[0, s_{k-1})$ splittable und $S[s_{k-1}, i)$ ein Wort
  - nach I.V. gilt dann **splittable**$(s_{k-1}) = \texttt{true}$ (und es gilt **isWord**$(s_{k-1}, i) = \texttt{true}$)



Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Korrektheit

Theorem
Der Teilstring $S[0, i)$ ist genau dann splittable, wenn **splitable**$(i) = \texttt{true}$.

Beweis: Induktion über i

- Induktionsanfang: der leere String ist splittable und **splitable**$(0) = \texttt{true}$
- Rückrichtung: $S[0, i)$ splittable $\Leftarrow$ **splittable**$(i) = \texttt{true}$

Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

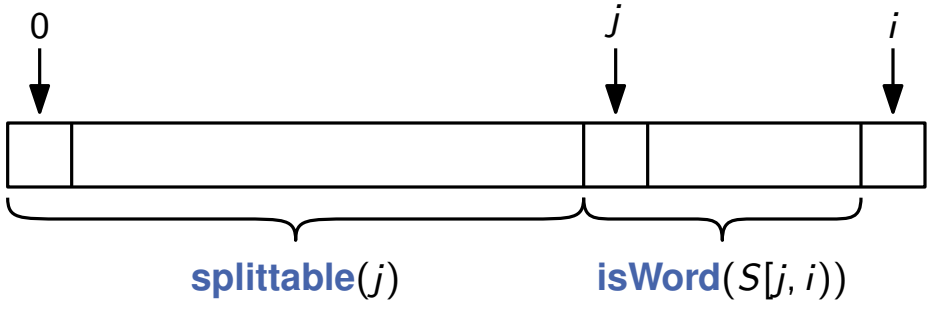
- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Korrektheit

Theorem
Der Teilstring $S[0, i)$ ist genau dann splittable, wenn **splitable**$(i) = \texttt{true}$.

Beweis: Induktion über i

- Induktionsanfang: der leere String ist splittable und **splitable**$(0) = \texttt{true}$
- Rückrichtung: $S[0, i)$ splittable $\Leftarrow$ **splittable**$(i) = \texttt{true}$
  - es gibt j, sodass **splittable**(j) und **isWord**$(S[j, i)$



Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

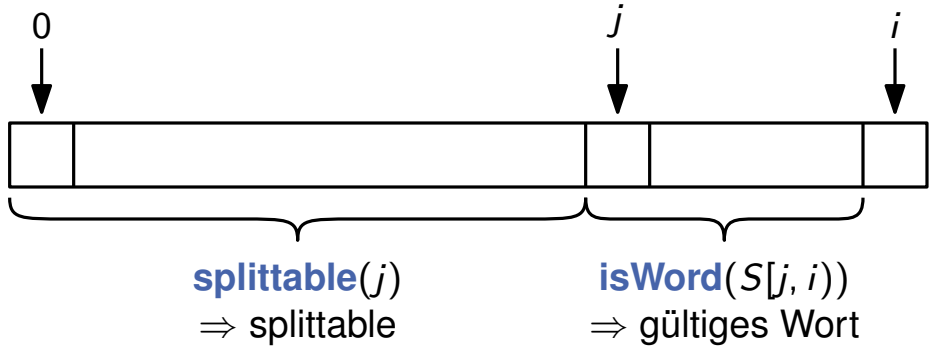
- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Korrektheit

Theorem
Der Teilstring $S[0, i)$ ist genau dann splittable, wenn **splitable**$(i) = \texttt{true}$.

Beweis: Induktion über i

- Induktionsanfang: der leere String ist splittable und **splitable**$(0) = \texttt{true}$
- Rückrichtung: $S[0, i)$ splittable $\Leftarrow$ **splittable**$(i) = \texttt{true}$
  - es gibt j, sodass **splittable**(j) und **isWord**$(S[j, i)$
  - nach I.V.: $S[0, j)$ ist splittable (außerdem ist $S[j, i)$ ein Wort)



Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

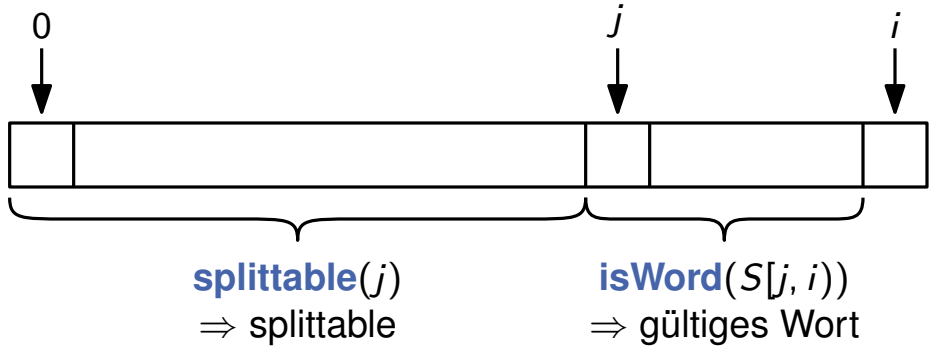
- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Korrektheit

Theorem
Der Teilstring $S[0, i)$ ist genau dann splittable, wenn **splitable**$(i) = \texttt{true}$.

Beweis: Induktion über i

- Induktionsanfang: der leere String ist splittable und **splitable**$(0) = \texttt{true}$
- Rückrichtung: $S[0, i)$ splittable $\Leftarrow$ **splittable**$(i) = \texttt{true}$
  - es gibt j, sodass **splittable**(j) und **isWord**$(S[j, i)$
  - nach I.V.: $S[0, j)$ ist splittable (außerdem ist $S[j, i)$ ein Wort)
  - damit ist auch $S[0, i)$ splittable



Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

```
isSplittable(String S)
  s := Array of size n + 1
  s[0] := true
  for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
      if s[j] and isWord(S[j, i)) then
        s[i] := true
  return s[n]
```

Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```

m	o	n	k	e	y	e	a	r	t	h	a	i	r

Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```

	m	o	n	k	e	y	e	a	r	t	h	a	i	r	
s:	t														

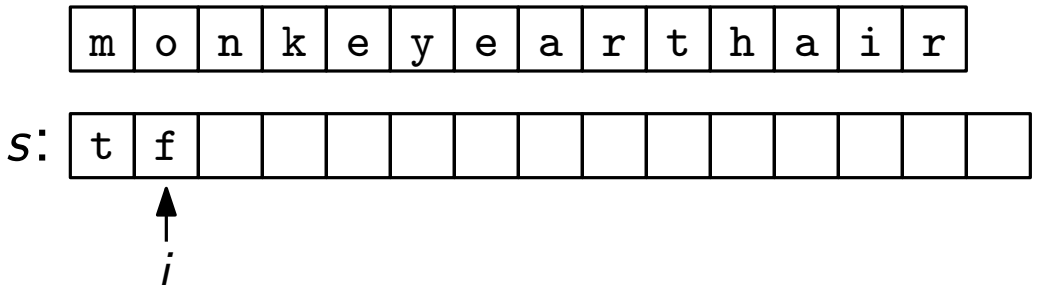
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] :=$ `true`
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] =$ `false`
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] :=$ `true`
return $s[n]$



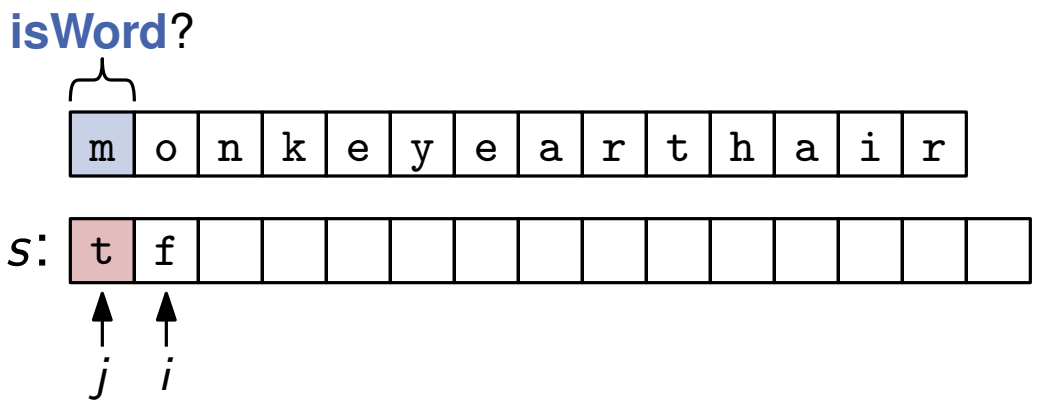
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] :=$ `true`
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] =$ `false`
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] :=$ `true`
return $s[n]$



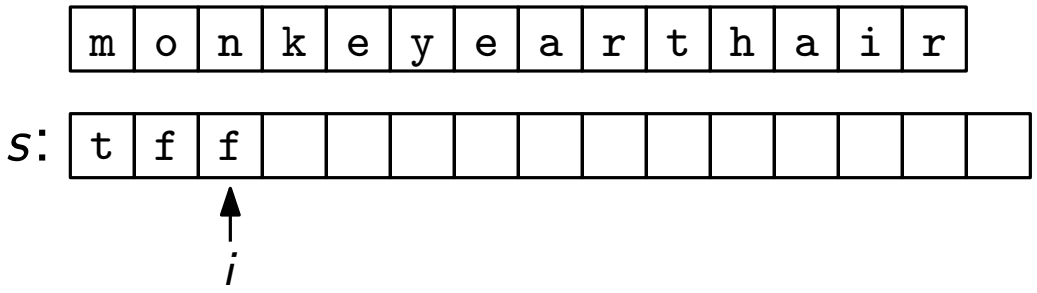
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] :=$ `true`
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] =$ `false`
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] :=$ `true`
return $s[n]$



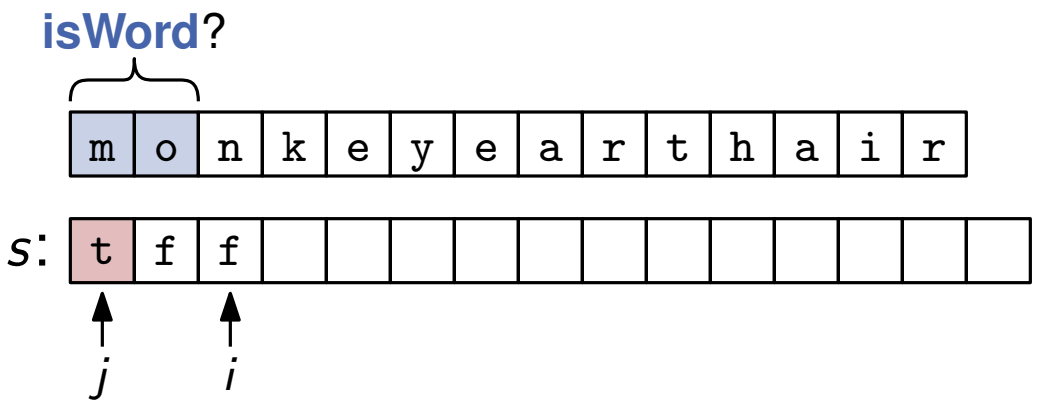
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] := \texttt{true}$
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] = \texttt{false}$
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] := \texttt{true}$
return $s[n]$



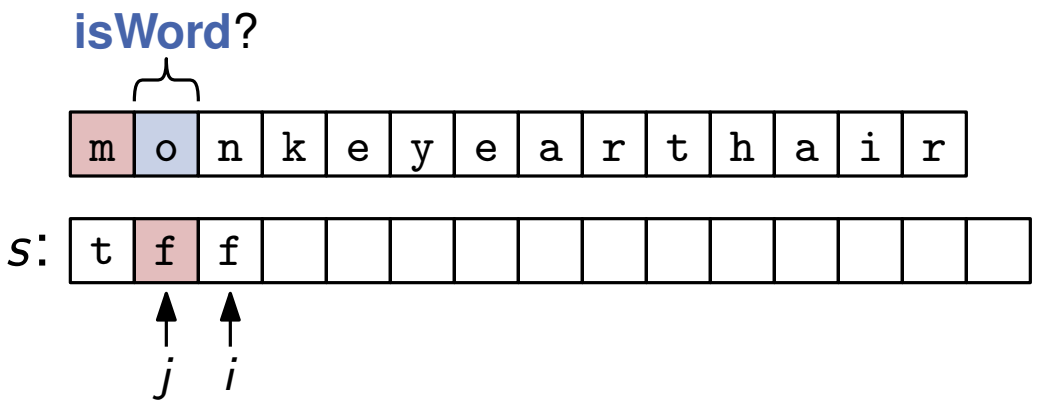
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```



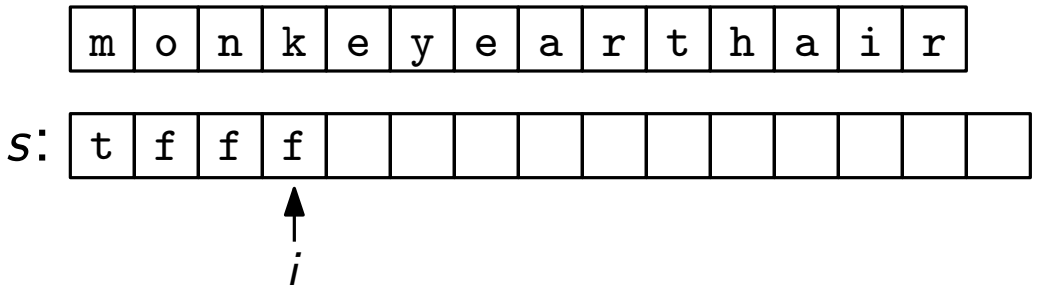
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] :=$ `true`
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] =$ `false`
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] :=$ `true`
return $s[n]$



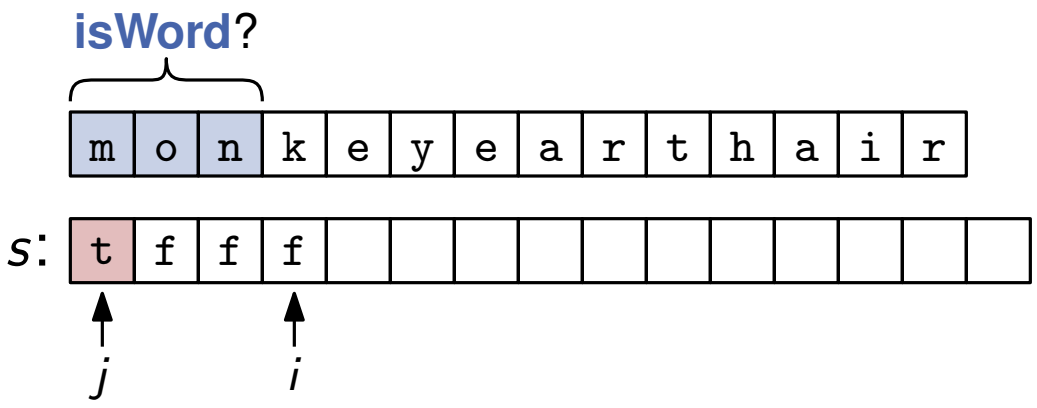
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] :=$ `true`
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] =$ `false`
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] :=$ `true`
return $s[n]$



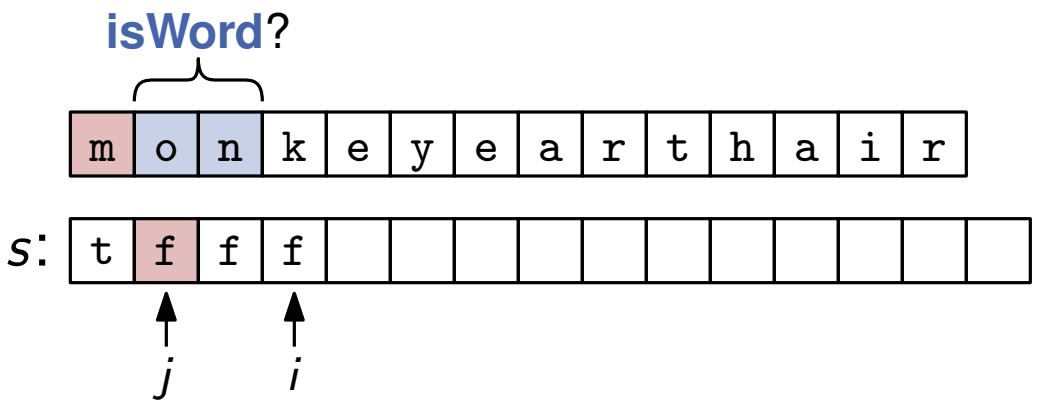
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] :=$ `true`
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] =$ `false`
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] :=$ `true`
return $s[n]$



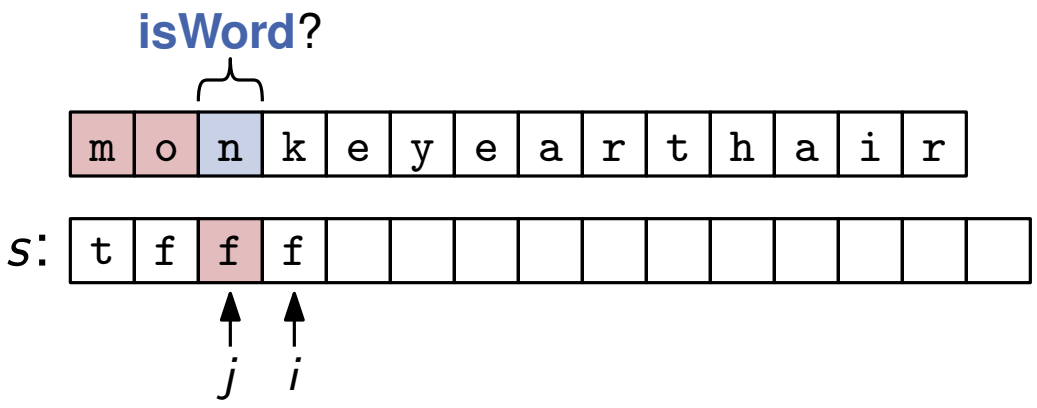
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```



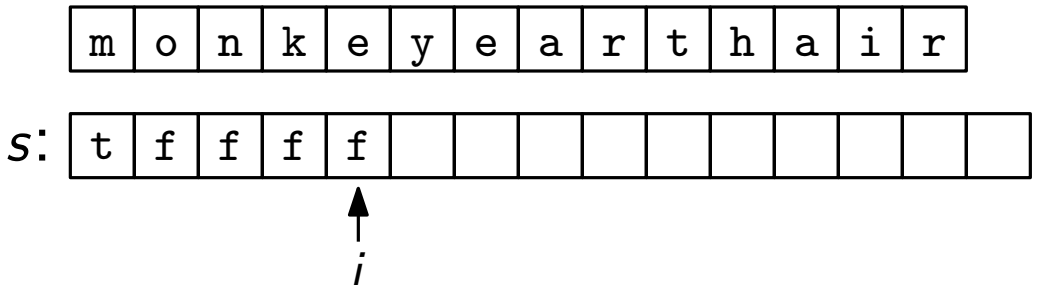
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] :=$ `true`
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] =$ `false`
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] :=$ `true`
return $s[n]$



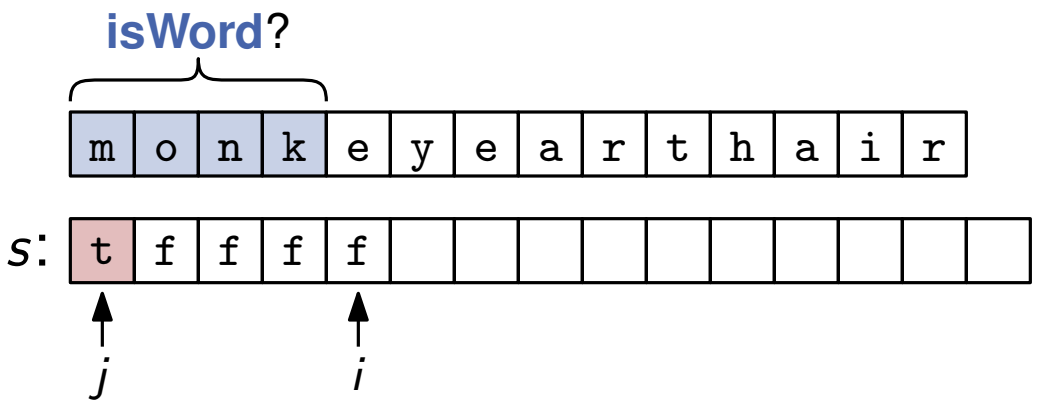
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] :=$ `true`
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] =$ `false`
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] :=$ `true`
return $s[n]$



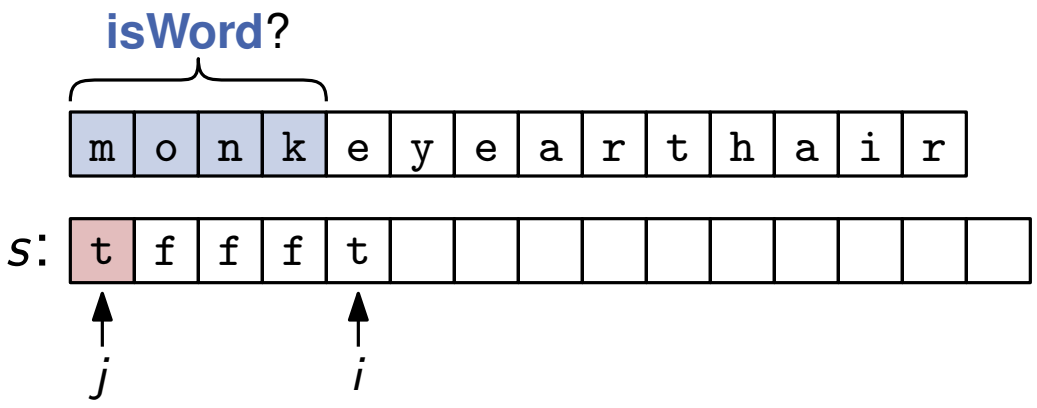
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```



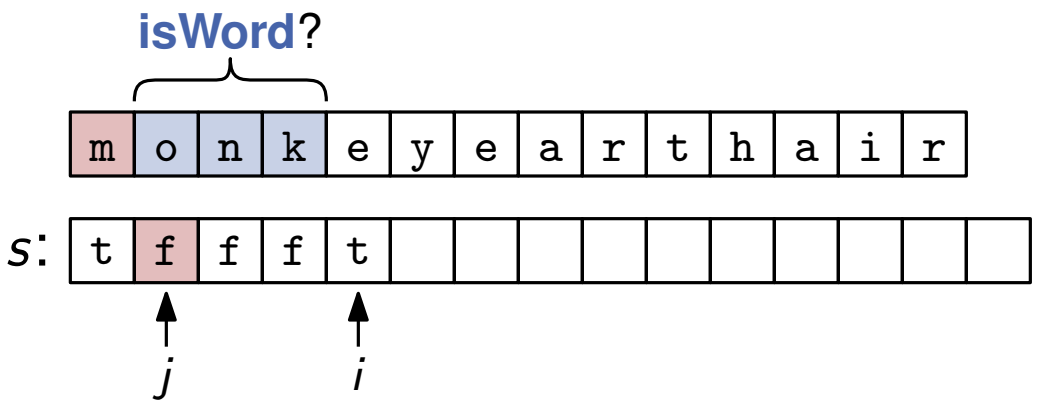
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String S*)

```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```



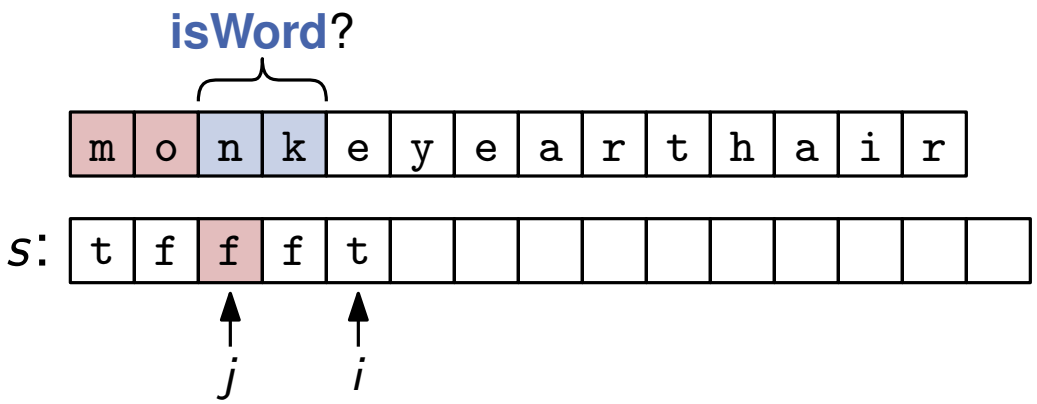
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] :=$ `true`
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] =$ `false`
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] :=$ `true`
return $s[n]$



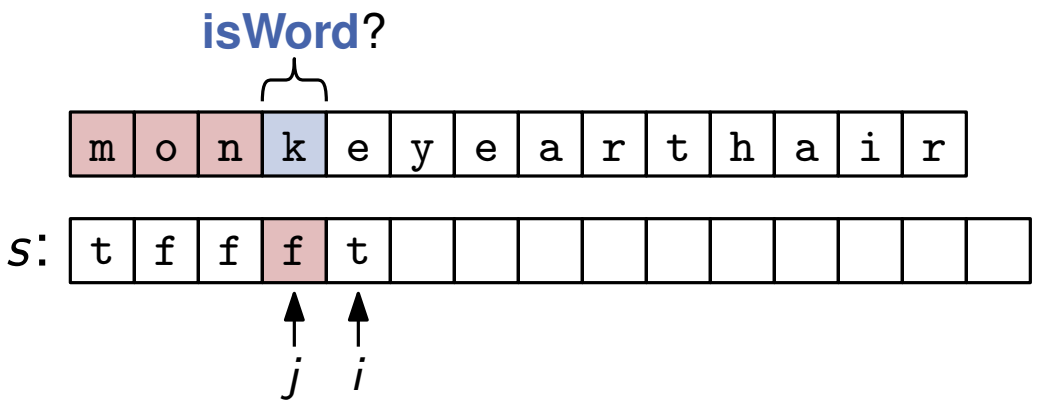
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```



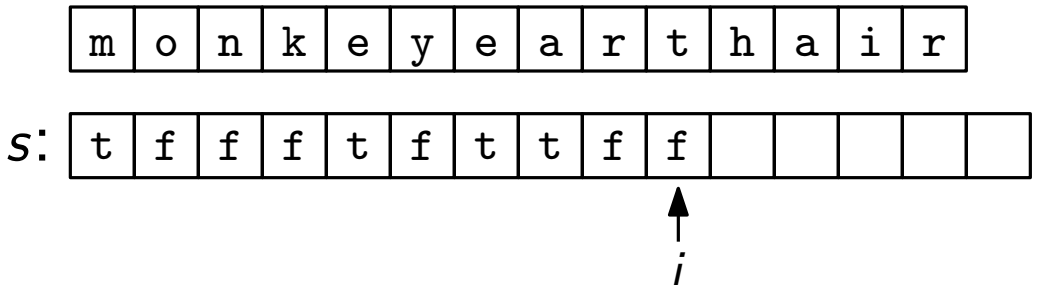
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] :=$ `true`
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] =$ `false`
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] :=$ `true`
return $s[n]$



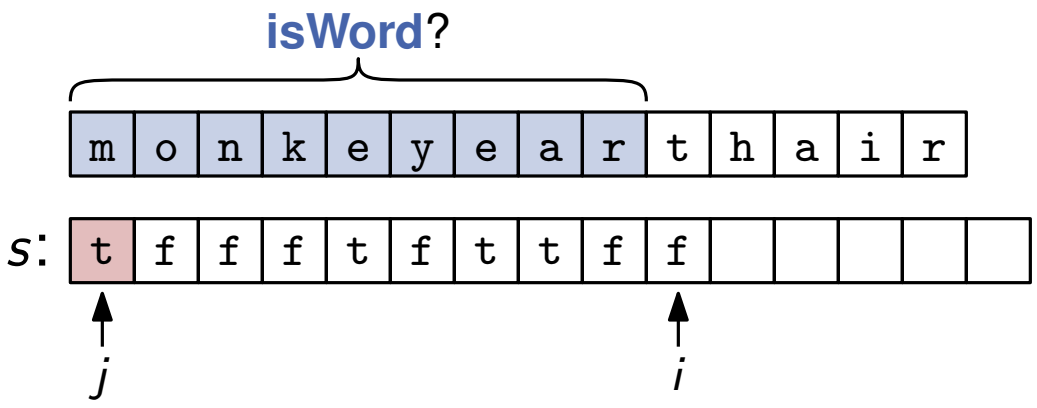
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] :=$ `true`
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] =$ `false`
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] :=$ `true`
return $s[n]$



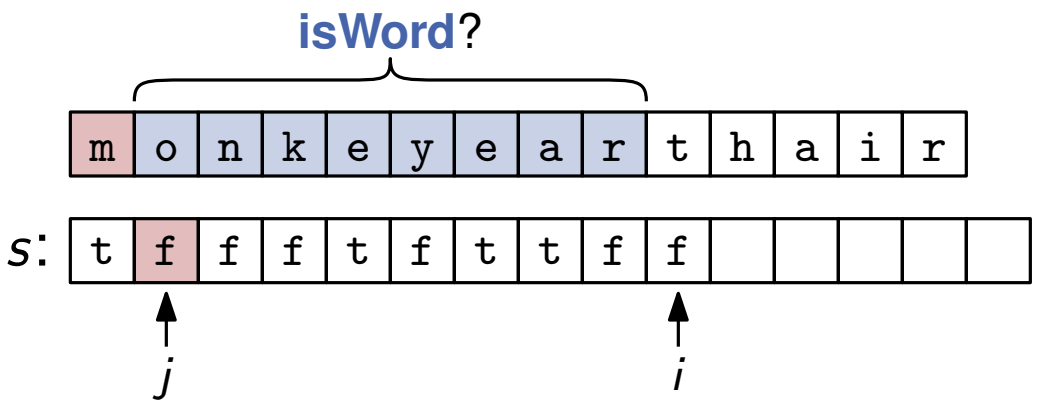
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String S*)

- $s :=$ *Array* of size $n+1$
- $s[0] :=$ `true`
- **for** $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  - $s[i] =$ `false`
  - **for** $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    - **if** $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      - $s[i] :=$ `true`
- **return** $s[n]$



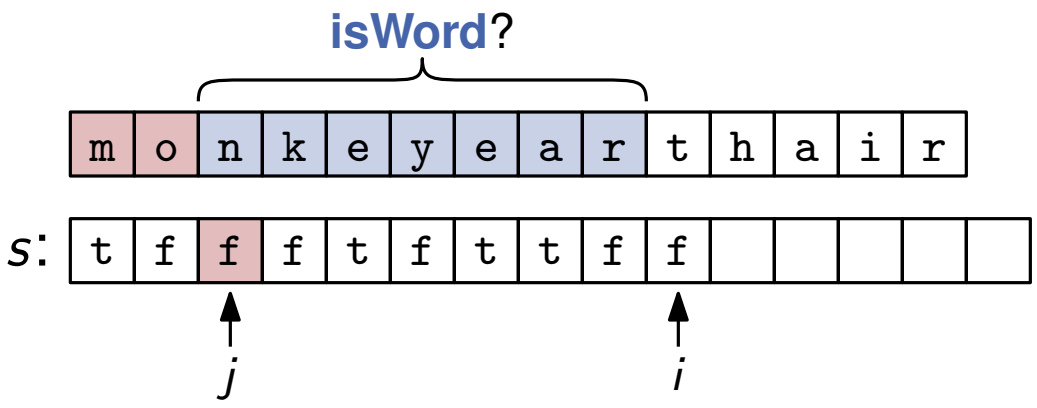
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] := \texttt{true}$
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] = \texttt{false}$
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] := \texttt{true}$
return $s[n]$



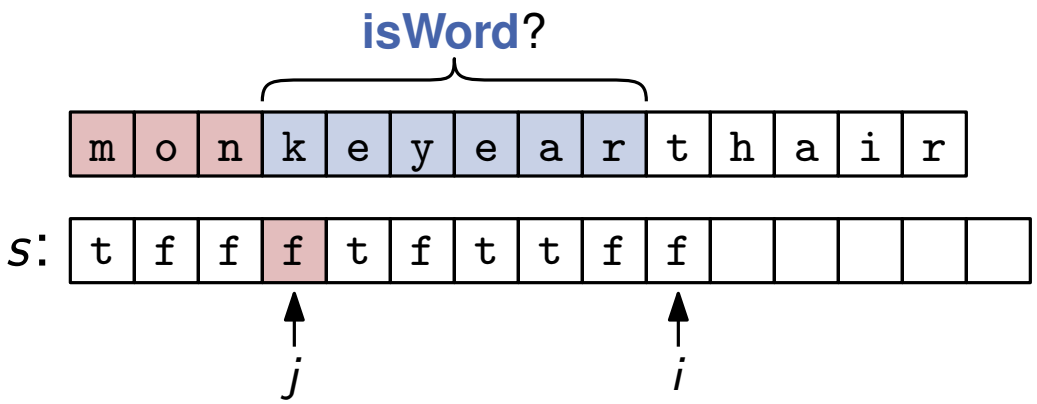
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] := \texttt{true}$
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] = \texttt{false}$
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] := \texttt{true}$
return $s[n]$



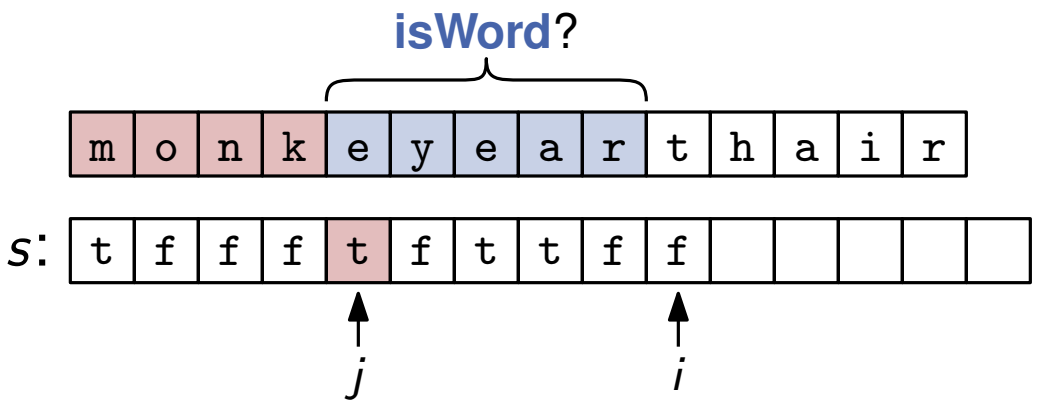
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```



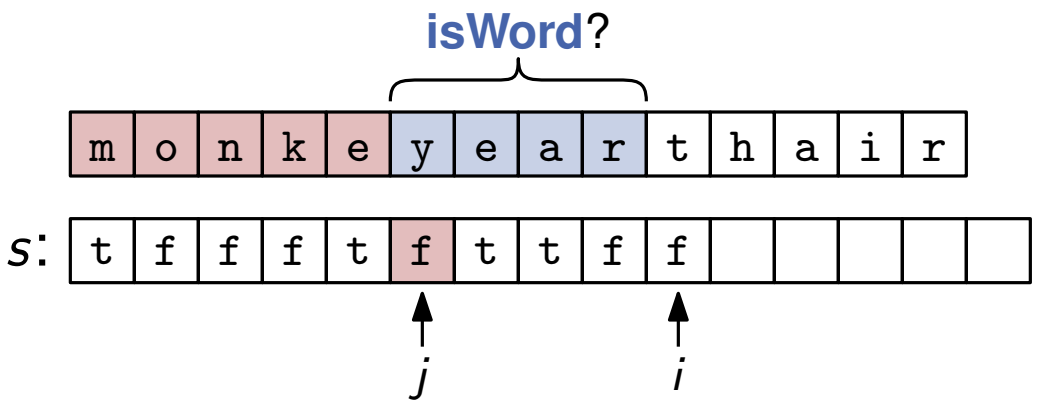
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```



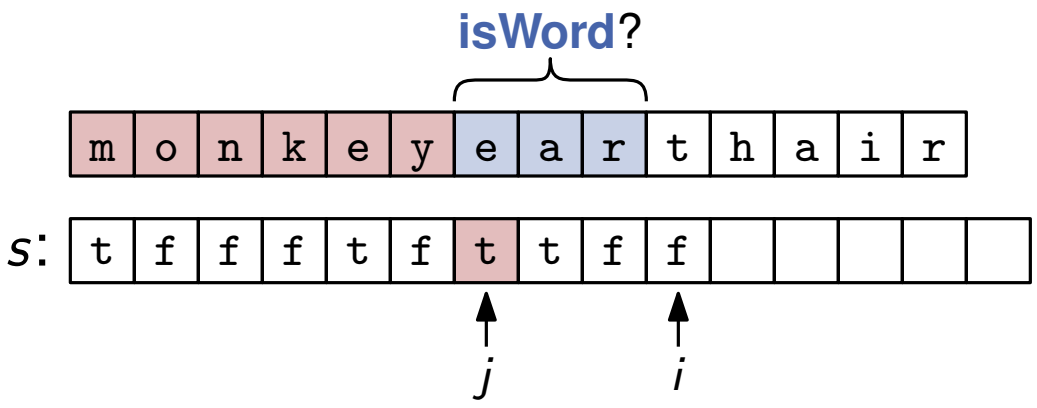
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] := \texttt{true}$
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] = \texttt{false}$
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] := \texttt{true}$
return $s[n]$



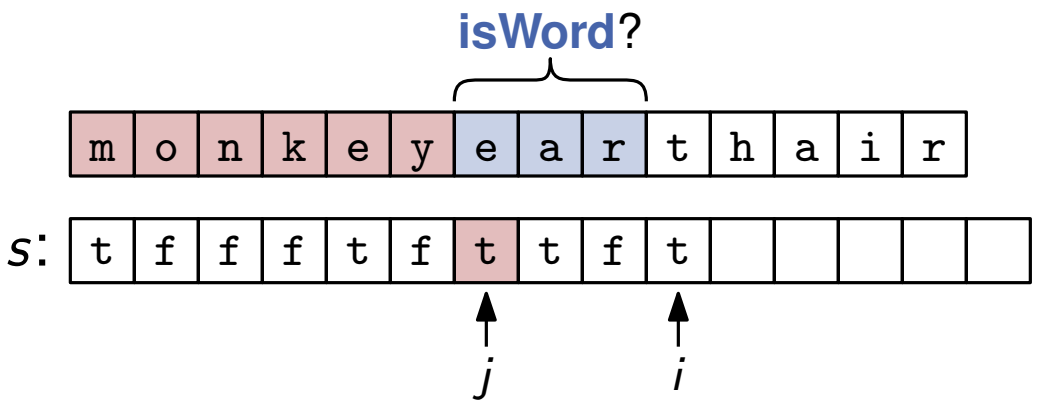
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] :=$ `true`
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] =$ `false`
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] :=$ `true`
return $s[n]$



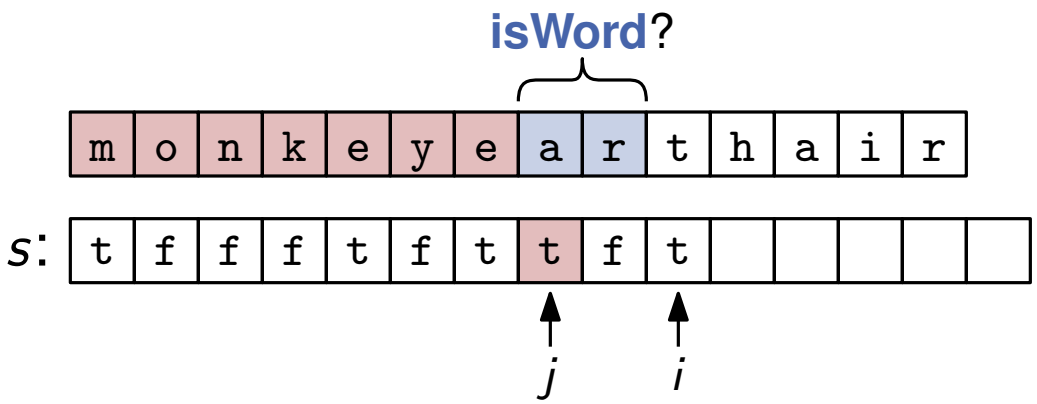
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```



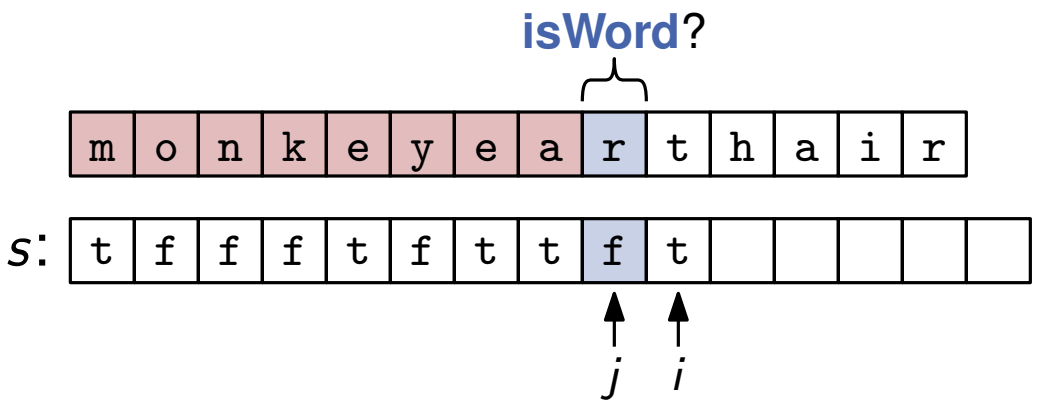
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```



Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```

	m	o	n	k	e	y	e	a	r	t	h	a	i	r	
s:	t	f	f	f	t	f	t	t	f	t	t	t	f	f	f

i

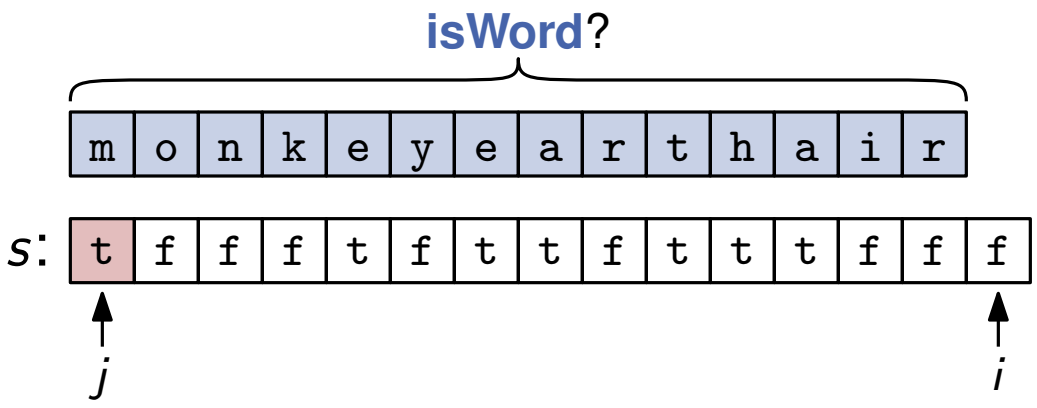
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```



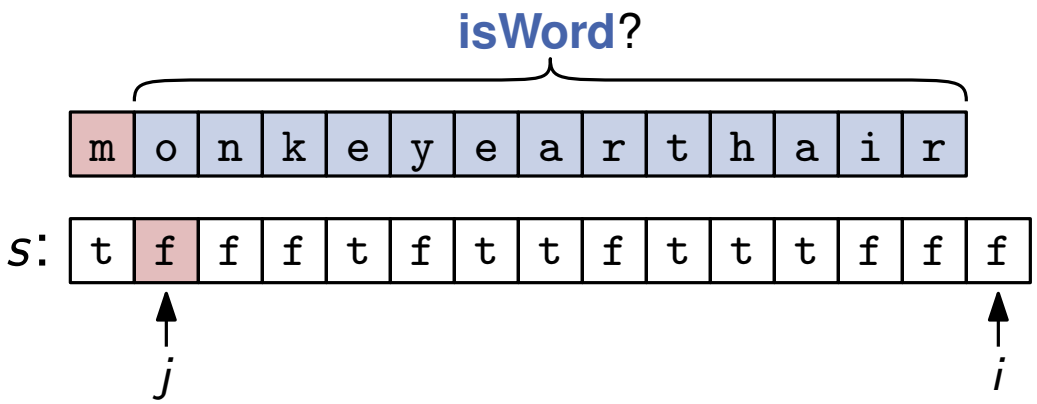
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

- $s :=$ *Array* of size $n+1$
- $s[0] :=$ `true`
- **for** $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  - $s[i] =$ `false`
  - **for** $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    - **if** $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      - $s[i] :=$ `true`
- **return** $s[n]$



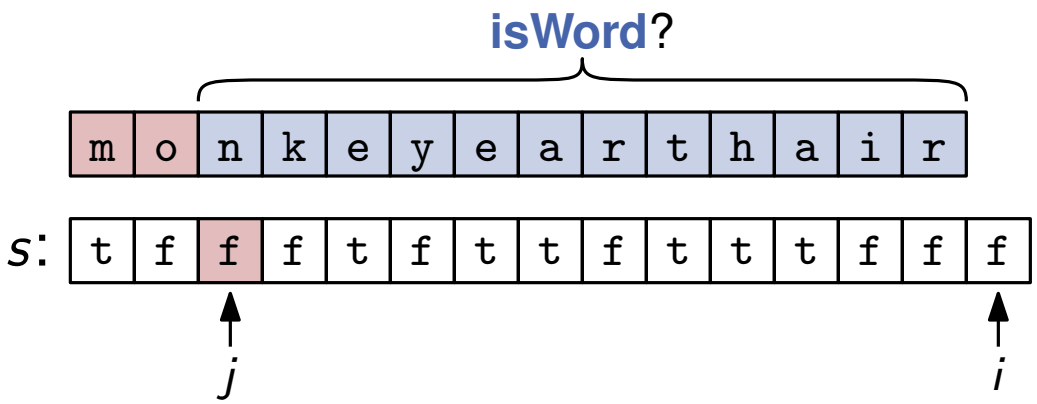
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

- $s :=$ *Array* of size $n+1$
- $s[0] :=$ `true`
- **for** $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  - $s[i] =$ `false`
  - **for** $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    - **if** $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      - $s[i] :=$ `true`
- **return** $s[n]$



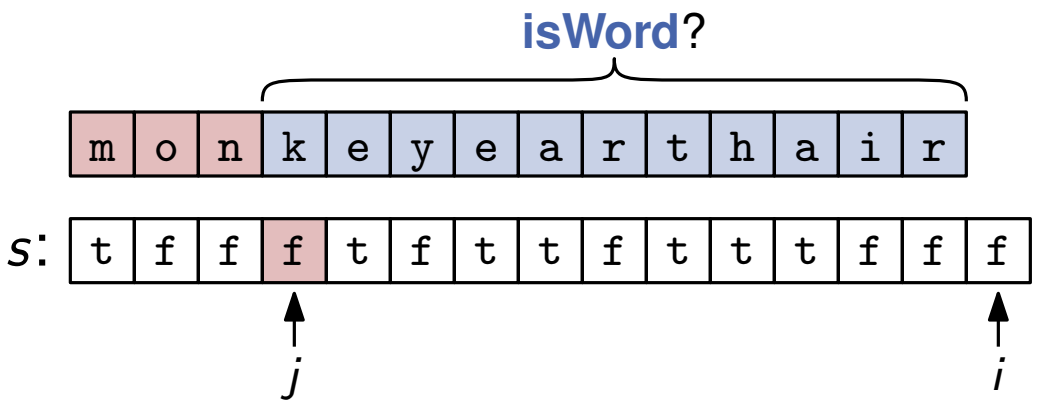
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] := \texttt{true}$
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] = \texttt{false}$
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] := \texttt{true}$
return $s[n]$



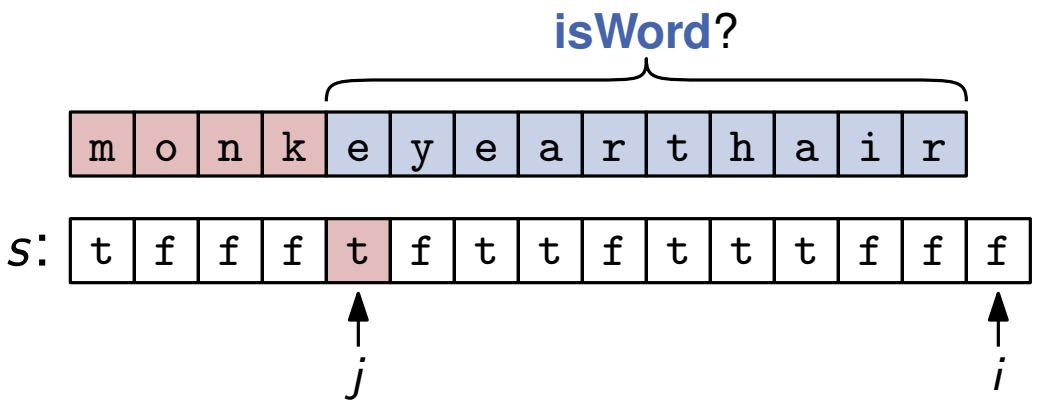
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] :=$ `true`
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] =$ `false`
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] :=$ `true`
return $s[n]$



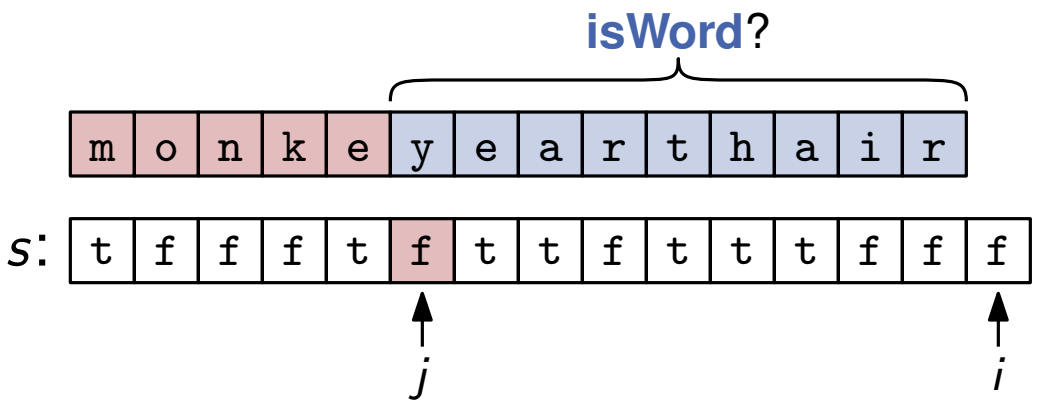
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] := \texttt{true}$
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] = \texttt{false}$
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] := \texttt{true}$
return $s[n]$



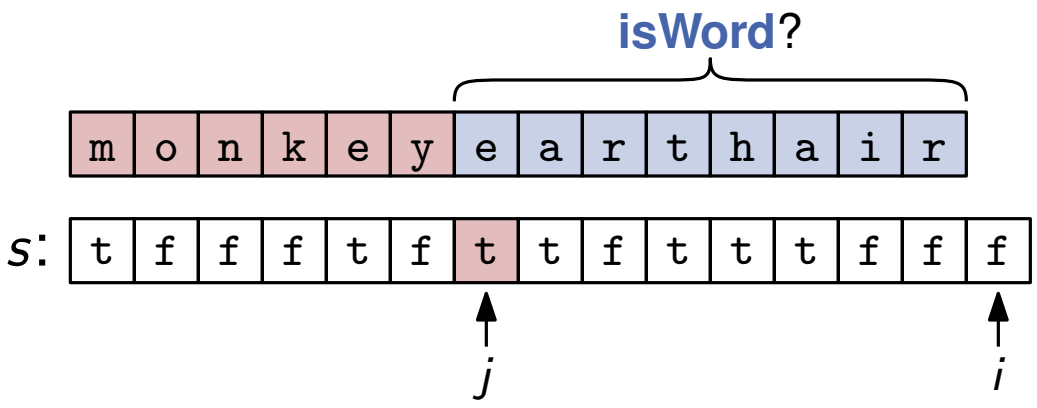
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] :=$ `true`
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] =$ `false`
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] :=$ `true`
return $s[n]$



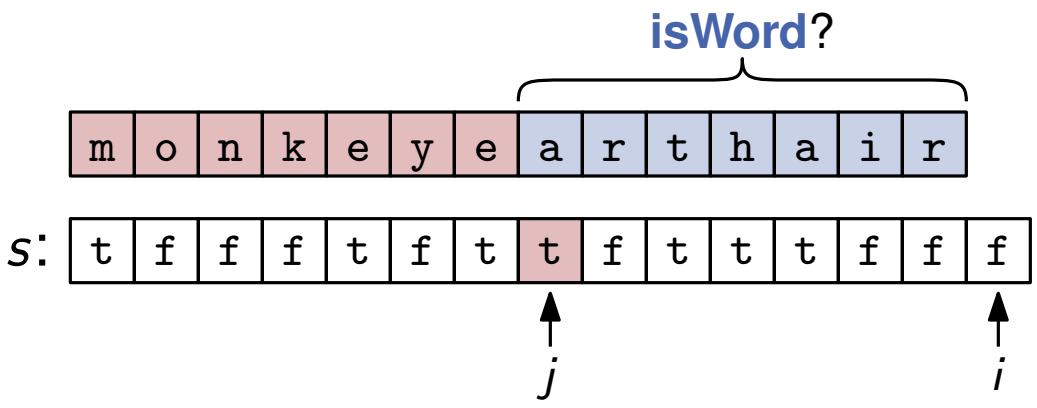
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] :=$ `true`
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] =$ `false`
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] :=$ `true`
return $s[n]$



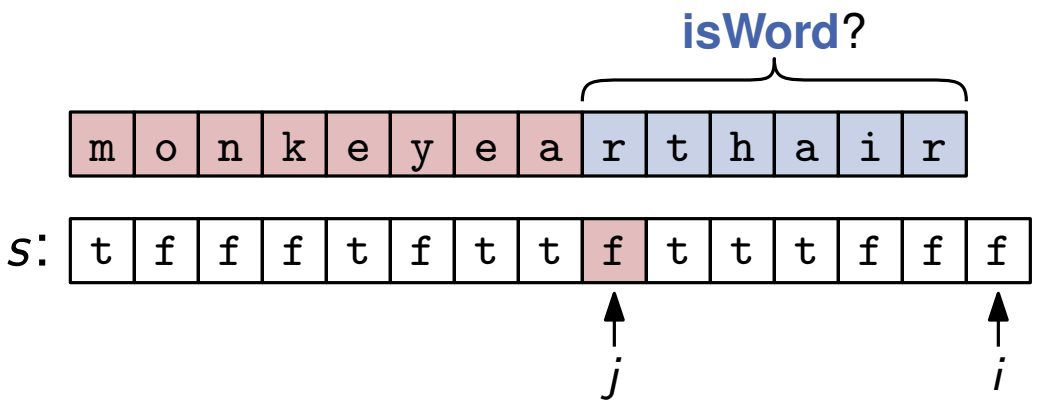
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```



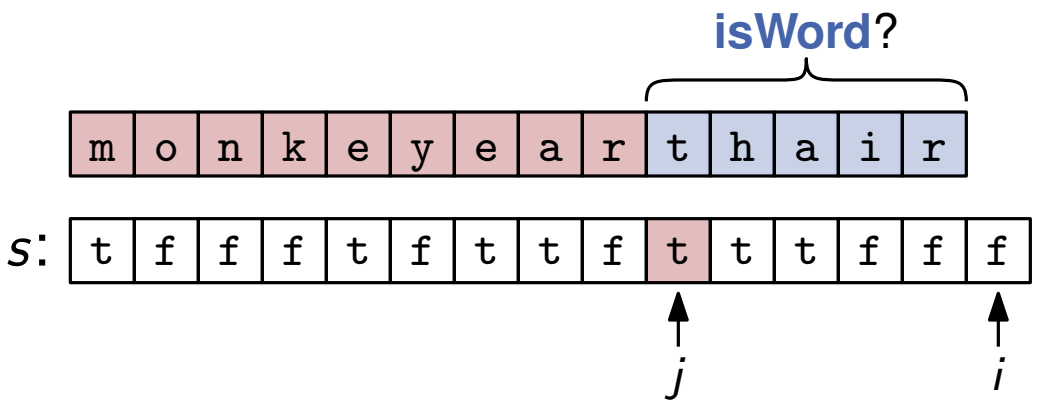
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] :=$ `true`
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] =$ `false`
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] :=$ `true`
return $s[n]$



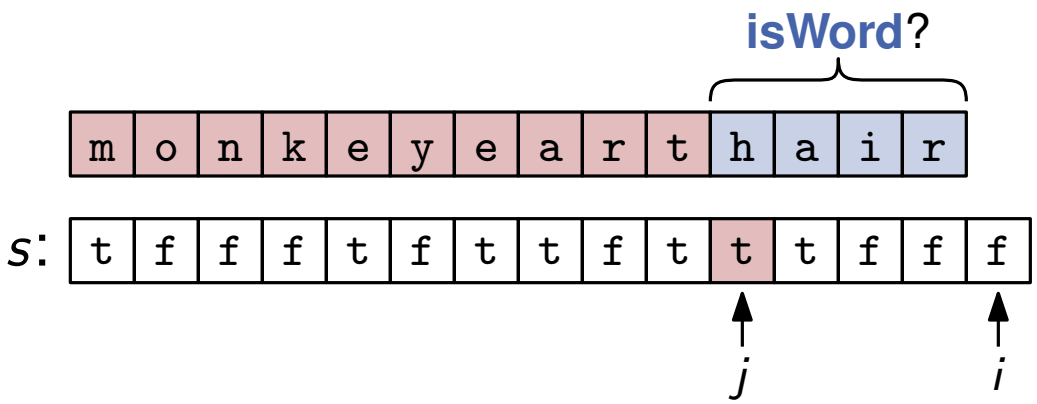
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] :=$ `true`
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] =$ `false`
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] :=$ `true`
return $s[n]$



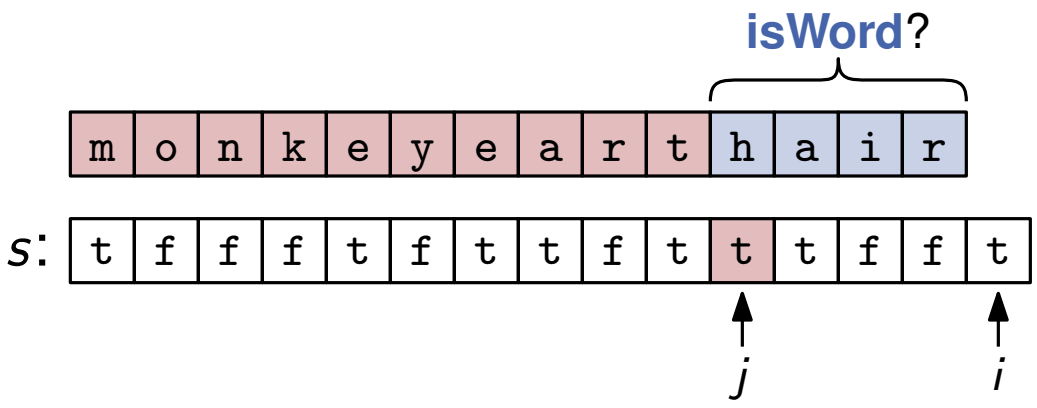
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] :=$ `true`
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] =$ `false`
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] :=$ `true`
return $s[n]$



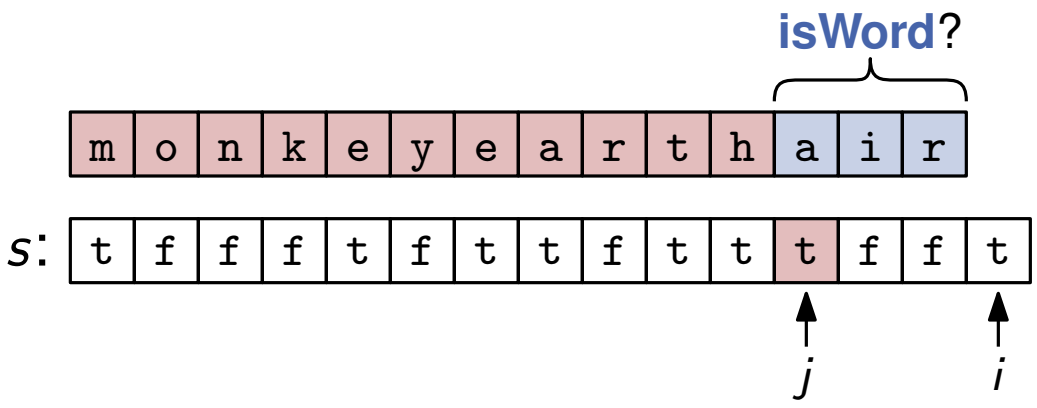
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String S*)

- $s :=$ *Array* of size $n+1$
- $s[0] :=$ `true`
- **for** $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  - $s[i] =$ `false`
  - **for** $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    - **if** $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      - $s[i] :=$ `true`
- **return** $s[n]$



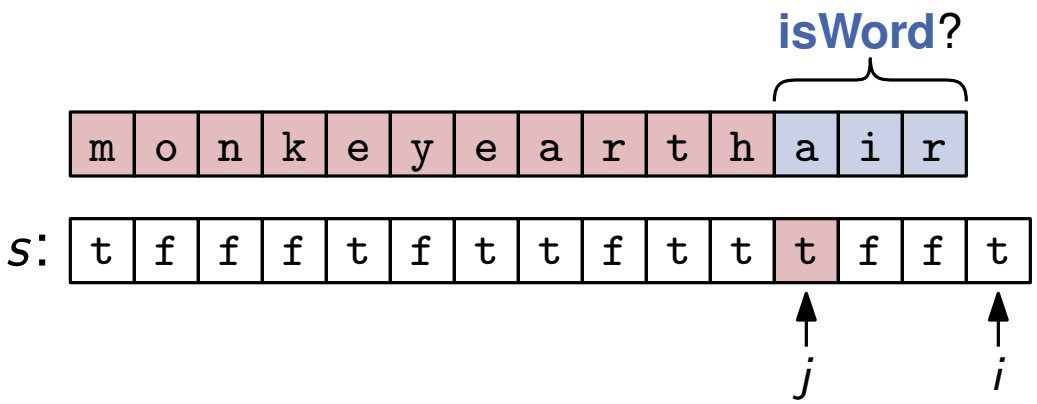
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```



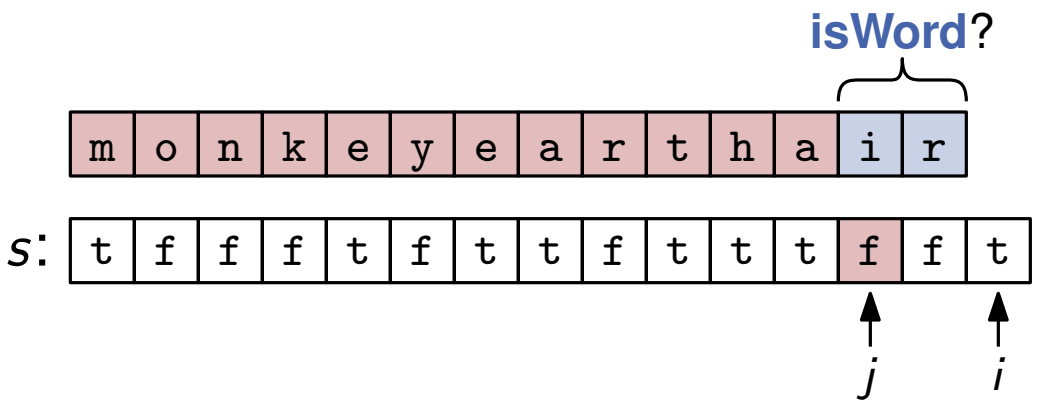
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

$s :=$ *Array* of size $n+1$
$s[0] :=$ `true`
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  $s[i] =$ `false`
  for $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ **do**
    if $s[j]$ **and isWord**$(S[j, i))$ **then**
      $s[i] :=$ `true`
return $s[n]$



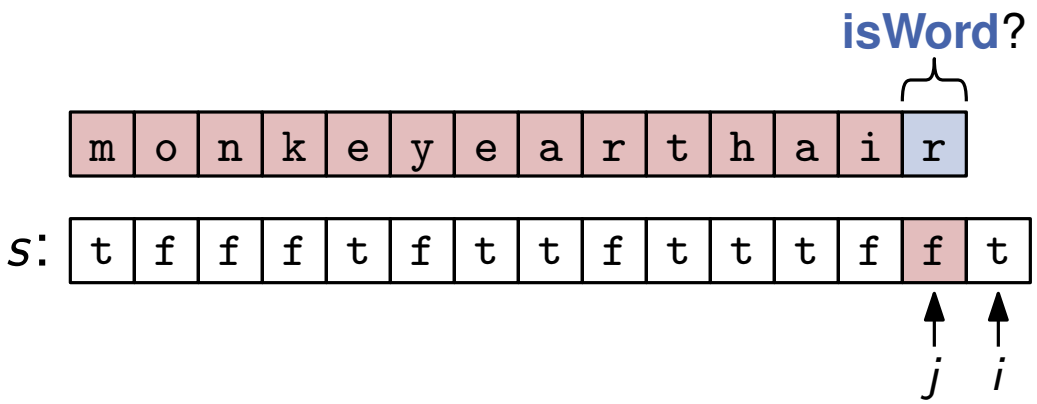
Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) =$ `true`
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```



Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

```
isSplittable(String S)
  s := Array of size n + 1
  s[0] := true
  for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
      if s[j] and isWord(S[j, i)) then
        s[i] := true
  return s[n]
```

	m	o	n	k	e	y	e	a	r	t	h	a	i	r	
s:	t	f	f	f	t	f	t	t	f	t	t	t	f	f	t

Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

```
isSplittable(String S)
  s := Array of size n + 1
  s[0] := true
  for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
      if s[j] and isWord(S[j, i)) then
        s[i] := true
  return s[n]
```

Laufzeit

- $\Theta(n^2)$ Aufrufe von **isWord** (also: polynomiell)

Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String S*)

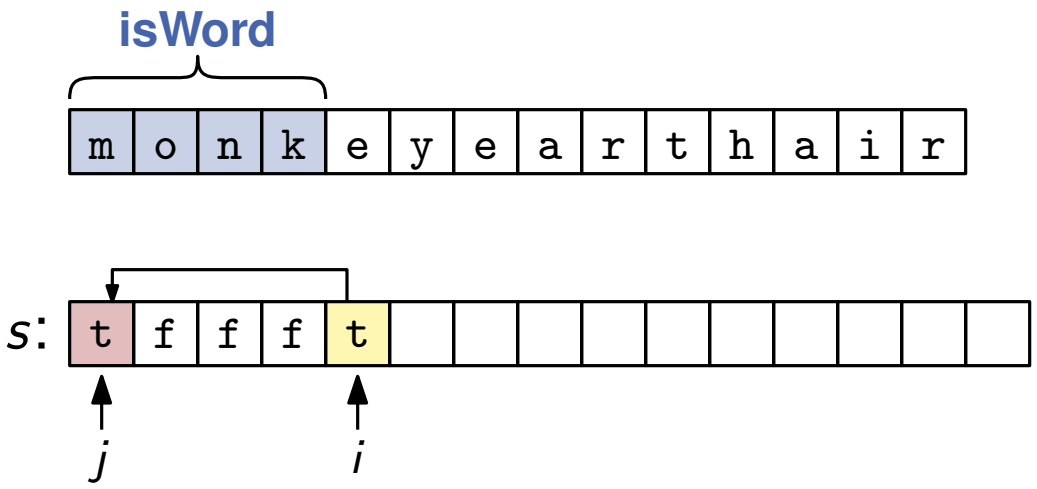
```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```

Laufzeit

- $\Theta(n^2)$ Aufrufe von **isWord** (also: polynomiell)

Bekommen wir auch eine Lösung?

- speichere für jedes i wegen welchem j wir $s[i] := \texttt{true}$ gesetzt haben



Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String S*)

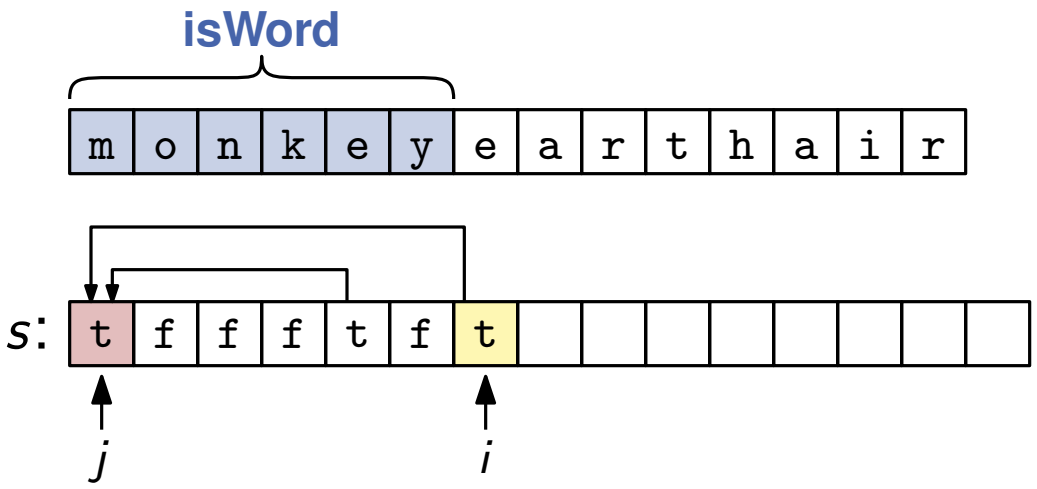
```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```

Laufzeit

- $\Theta(n^2)$ Aufrufe von **isWord** (also: polynomiell)

Bekommen wir auch eine Lösung?

- speichere für jedes i wegen welchem j wir $s[i] := \texttt{true}$ gesetzt haben



Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String S*)

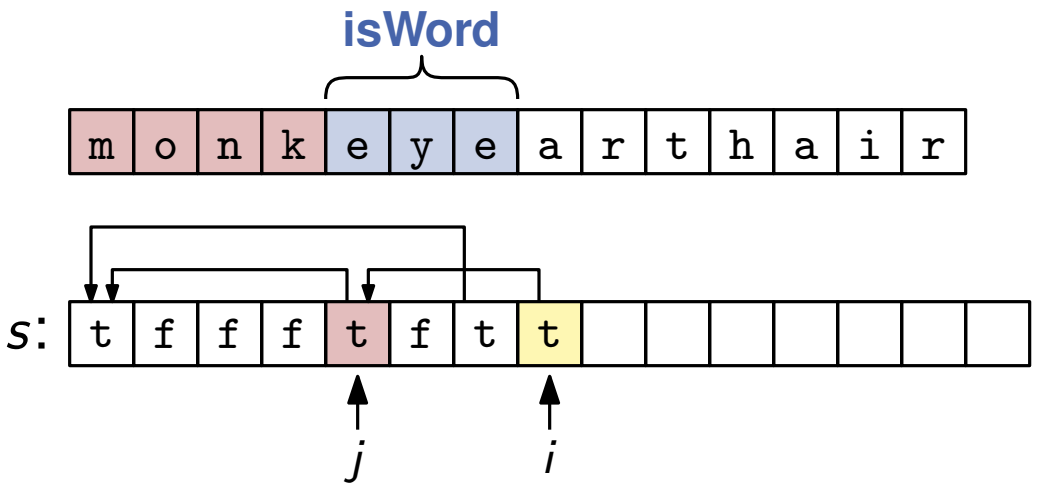
```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```

Laufzeit

- $\Theta(n^2)$ Aufrufe von **isWord** (also: polynomiell)

Bekommen wir auch eine Lösung?

- speichere für jedes i wegen welchem j wir $s[i] := \texttt{true}$ gesetzt haben



Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

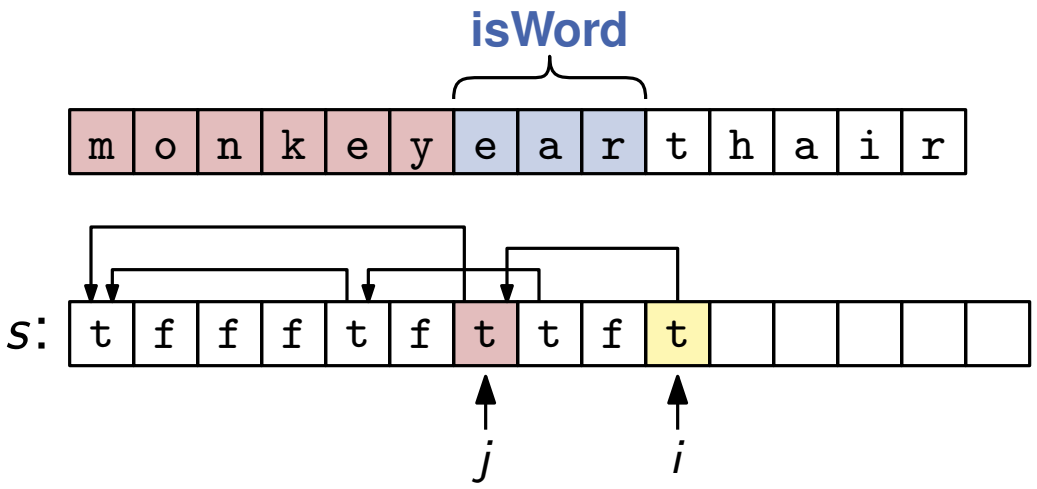
```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```

Laufzeit

- $\Theta(n^2)$ Aufrufe von **isWord** (also: polynomiell)

Bekommen wir auch eine Lösung?

- speichere für jedes i wegen welchem j wir $s[i] := \texttt{true}$ gesetzt haben



Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String S*)

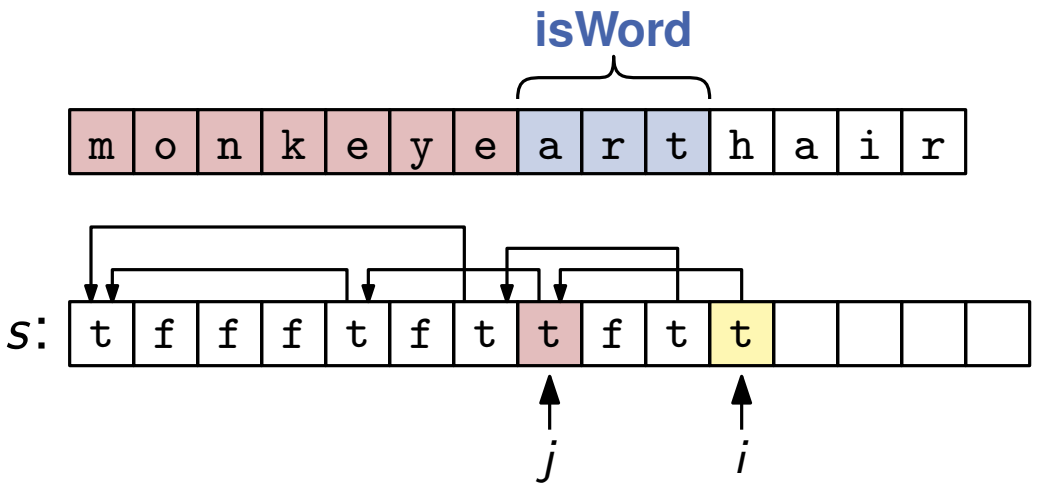
```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```

Laufzeit

- $\Theta(n^2)$ Aufrufe von **isWord** (also: polynomiell)

Bekommen wir auch eine Lösung?

- speichere für jedes i wegen welchem j wir $s[i] := \texttt{true}$ gesetzt haben



Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String* S)

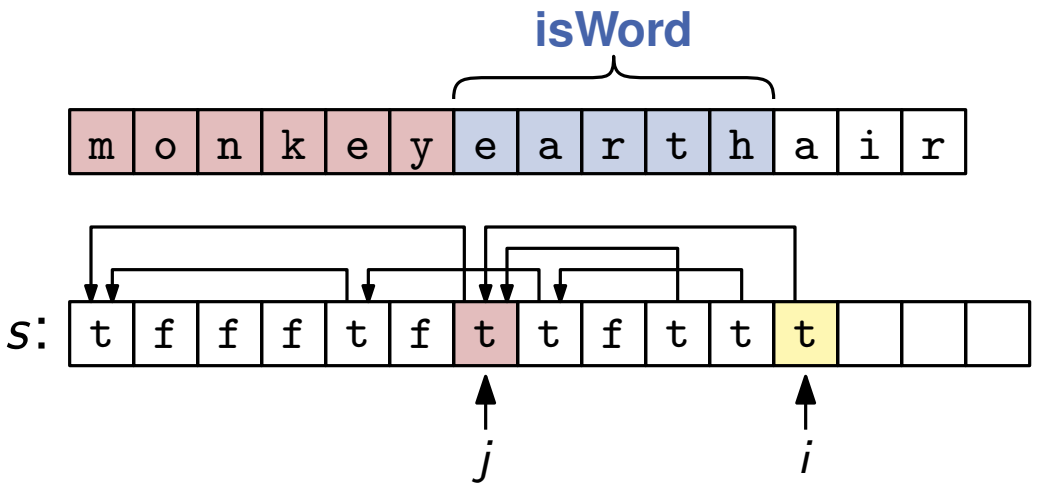
```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```

Laufzeit

- $\Theta(n^2)$ Aufrufe von **isWord** (also: polynomiell)

Bekommen wir auch eine Lösung?

- speichere für jedes i wegen welchem j wir $s[i] := \texttt{true}$ gesetzt haben



Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String S*)

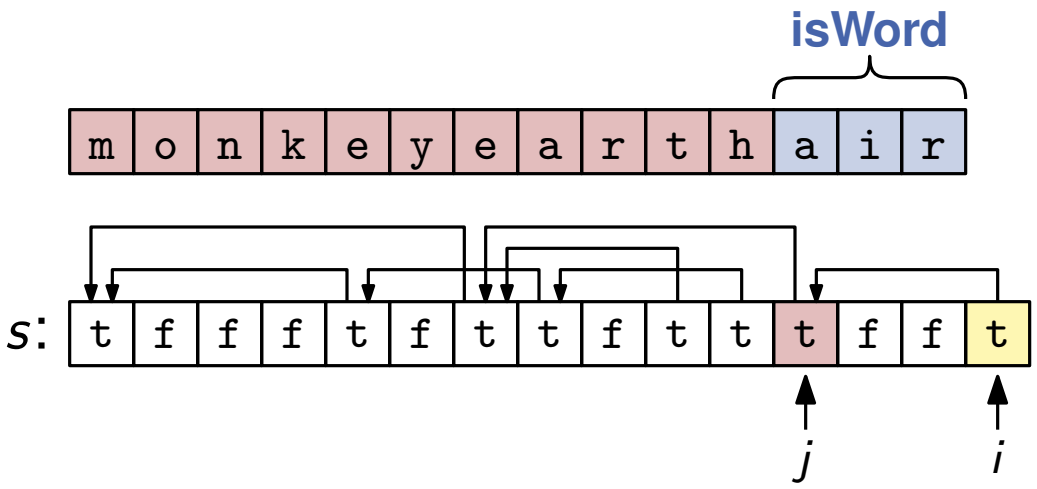
```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```

Laufzeit

- $\Theta(n^2)$ Aufrufe von **isWord** (also: polynomiell)

Bekommen wir auch eine Lösung?

- speichere für jedes i wegen welchem j wir $s[i] := \texttt{true}$ gesetzt haben



Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

Iterative Implementierung

isSplittable(*String S*)

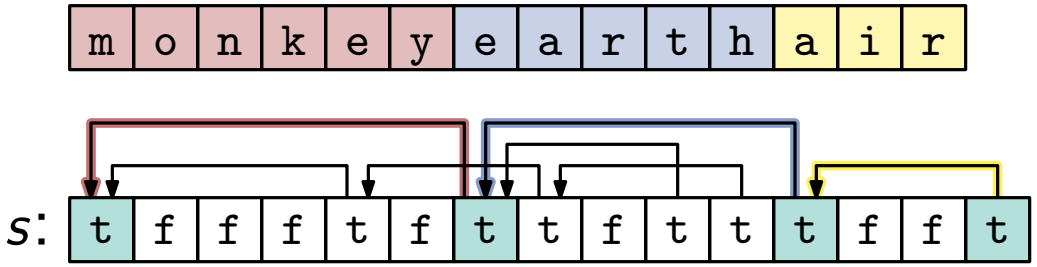
```
s := Array of size n + 1
s[0] := true
for i ∈ {1, ..., n} do
    s[i] = false
    for j ∈ {0, ..., i − 1} do
        if s[j] and isWord(S[j, i)) then
            s[i] := true
return s[n]
```

Laufzeit

- $\Theta(n^2)$ Aufrufe von **isWord** (also: polynomiell)

Bekommen wir auch eine Lösung?

- speichere für jedes i wegen welchem j wir $s[i] := \texttt{true}$ gesetzt haben
- verfolge diese Pointer rückwärts von n aus



Erinnerung: Rekursive Definition von splittable

- **splittable**$(0) = \texttt{true}$
- **splittable**$(i) = \exists j \in [0, i)$ **splittable**$(j) \wedge$ **isWord**$(S[j, i))$

In drei Schritten zum dynamischen Programm

Karlsruher Institut für Technologie

Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme

- Welche Zwischenergebnisse wollen wir berechnen?
- Worüber geht die Induktion?
- Beispiel: Ist $S[0, i)$ splittable?

Schritt 2: Aufstellung der Rekurrenz für Teillösungen

- Wie berechnen wir neue aus alten Zwischenergebnissen?
- Korrektheit: Induktion
- Beispiel: Lösung für i dank Lösungen für $0, \ldots, i-1$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

In drei Schritten zum dynamischen Programm

Karlsruher Institut für Technologie

Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme

- Welche Zwischenergebnisse wollen wir berechnen?
- Worüber geht die Induktion?
- Beispiel: Ist $S[0, i)$ splittable?

schwer
erfordert Kreativität
ggf. richtige Idee nötig
interagiert mit Schritt 2

Schritt 2: Aufstellung der Rekurrenz für Teillösungen

- Wie berechnen wir neue aus alten Zwischenergebnissen?
- Korrektheit: Induktion
- Beispiel: Lösung für i dank Lösungen für $0, \ldots, i-1$

nicht superschwer

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

leicht
(mit etwas Übung)

Longest Common Subsequence

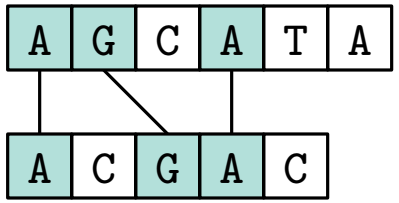
Problem: LCS
Gegeben Folgen $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ und $\langle b_1, \ldots, b_m \rangle$, was ist die längste gemeinsame Teilfolge?

A	G	C	A	T	A

A	C	G	A	C

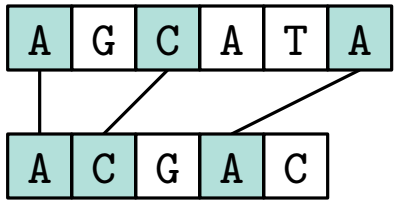
Longest Common Subsequence

Problem: LCS
Gegeben Folgen $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ und $\langle b_1, \ldots, b_m \rangle$, was ist die längste gemeinsame Teilfolge?



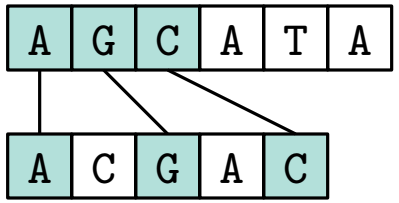
Longest Common Subsequence

Problem: LCS
Gegeben Folgen $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ und $\langle b_1, \ldots, b_m \rangle$, was ist die längste gemeinsame Teilfolge?



Longest Common Subsequence

Problem: LCS
Gegeben Folgen $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ und $\langle b_1, \ldots, b_m \rangle$, was ist die längste gemeinsame Teilfolge?

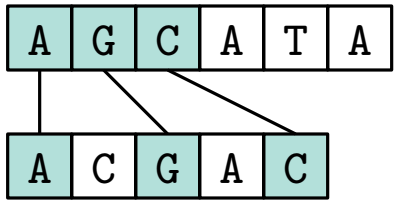


Longest Common Subsequence

Problem: LCS
Gegeben Folgen $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ und $\langle b_1, \ldots, b_m \rangle$, was ist die längste gemeinsame Teilfolge?

Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme

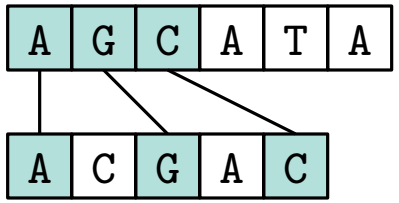
- Wie lang ist die LCS von $\langle a_1, \ldots, a_i \rangle$ und $\langle b_1, \ldots, b_j \rangle$?



Longest Common Subsequence

Problem: LCS
Gegeben Folgen $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ und $\langle b_1, \ldots, b_m \rangle$, was ist die längste gemeinsame Teilfolge?

Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme

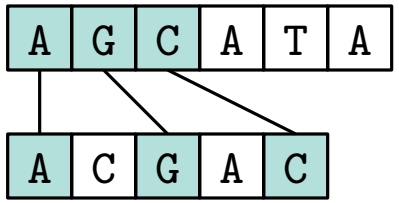


- Wie lang ist die LCS von $\langle a_1, \ldots, a_i \rangle$ und $\langle b_1, \ldots, b_j \rangle$?
- $i = n$ und $j = m$ liefert Gesamtlösung
- vereinfachte Sichtweise: nur Größe der Lösung (Berechnung der Lösung selbst heben wir uns für Schritt 3 auf)

Longest Common Subsequence

Problem: LCS
Gegeben Folgen $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ und $\langle b_1, \ldots, b_m \rangle$, was ist die längste gemeinsame Teilfolge?

Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme



- Wie lang ist die LCS von $\langle a_1, \ldots, a_i \rangle$ und $\langle b_1, \ldots, b_j \rangle$?
- $i = n$ und $j = m$ liefert Gesamtlösung
- vereinfachte Sichtweise: nur Größe der Lösung (Berechnung der Lösung selbst heben wir uns für Schritt 3 auf)

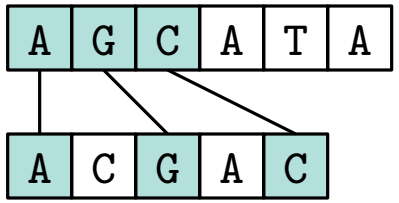
Schritt 2: Aufstellung der Rekurrenz

- Ziel: **LCS**(i, j) bezeichnet Länge der LCS von $\langle a_1, \ldots, a_i \rangle$ und $\langle b_1, \ldots, b_j \rangle$
- **LCS**$(i, 0) =$ **LCS**$(0, j) = 0$

Longest Common Subsequence

Problem: LCS
Gegeben Folgen $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ und $\langle b_1, \ldots, b_m \rangle$, was ist die längste gemeinsame Teilfolge?

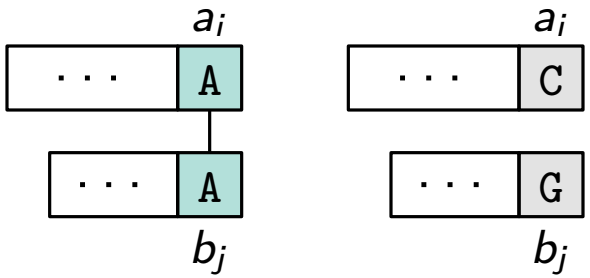
Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme



- Wie lang ist die LCS von $\langle a_1, \ldots, a_i \rangle$ und $\langle b_1, \ldots, b_j \rangle$?
- $i = n$ und $j = m$ liefert Gesamtlösung
- vereinfachte Sichtweise: nur Größe der Lösung (Berechnung der Lösung selbst heben wir uns für Schritt 3 auf)

Schritt 2: Aufstellung der Rekurrenz

- Ziel: $\mathbf{LCS}(i, j)$ bezeichnet Länge der LCS von $\langle a_1, \ldots, a_i \rangle$ und $\langle b_1, \ldots, b_j \rangle$
- $\mathbf{LCS}(i, 0) = \mathbf{LCS}(0, j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i, j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1, j-1) + 1 & \text{wenn } a_i = b_j \\ \max\{\mathbf{LCS}(i, j-1), \mathbf{LCS}(i-1, j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_j \end{cases}$
- Korrektheit: folgt induktiv



Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

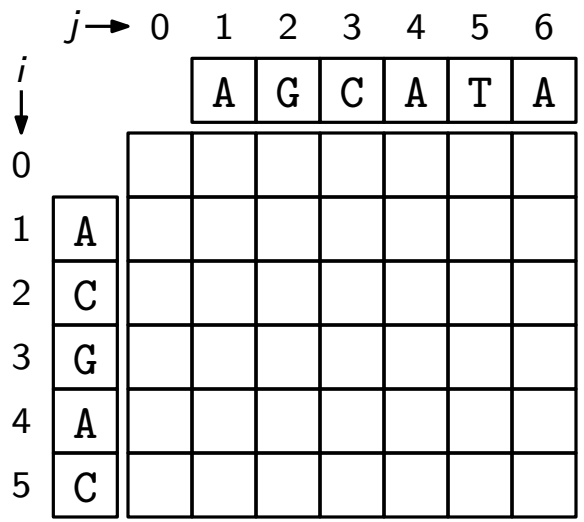
- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays



Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

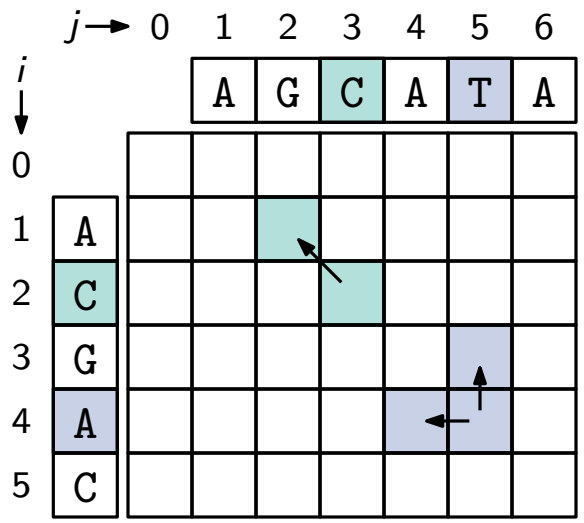
- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$



Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

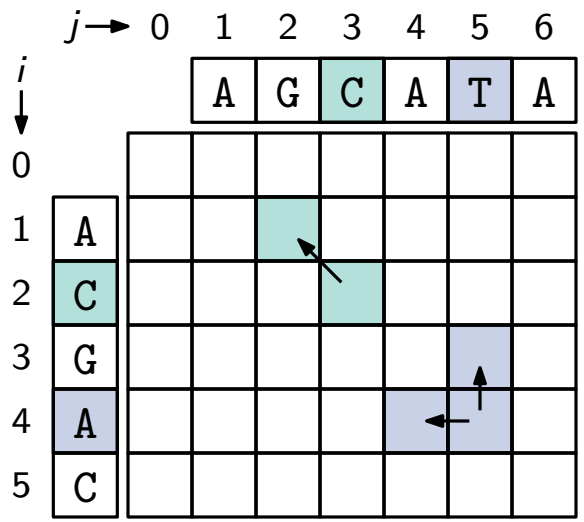
- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)



Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)

$i \downarrow$ \ $j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0						
2	C	0						
3	G	0						
4	A	0						
5	C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ / $j \rightarrow$	0		A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1					
2	C	0						
3	G	0						
4	A	0						
5	C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ \ $j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1				
2	C	0						
3	G	0						
4	A	0						
5	C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ \ $j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1			
2	C	0						
3	G	0						
4	A	0						
5	C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ / $j \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6
		A	G	C	A	T	A
0	0	0	0	0	0	0	0
1 A	0	1	1	1	1		
2 C	0						
3 G	0						
4 A	0						
5 C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ / $j \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6
		A	G	C	A	T	A
0	0	0	0	0	0	0	0
1 A	0	1	1	1	1	1	
2 C	0						
3 G	0						
4 A	0						
5 C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ / $j \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6
		A	G	C	A	T	A
0	0	0	0	0	0	0	0
1 A	0	1	1	1	1	1	1
2 C	0						
3 G	0						
4 A	0						
5 C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ / $j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1	1	1	1
2	C	0	1					
3	G	0						
4	A	0						
5	C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ / $j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1	1	1	1
2	C	0	1	1				
3	G	0						
4	A	0						
5	C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ / $j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1	1	1	1
2	C	0	1	1	2			
3	G	0						
4	A	0						
5	C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ / $j \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6
		A	G	C	A	T	A
0	0	0	0	0	0	0	0
1 A	0	1	1	1	1	1	1
2 C	0	1	1	2	2		
3 G	0						
4 A	0						
5 C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ \ $j \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6
		A	G	C	A	T	A
0	0	0	0	0	0	0	0
1 A	0	1	1	1	1	1	1
2 C	0	1	1	2	2	2	
3 G	0						
4 A	0						
5 C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ / $j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1	1	1	1
2	C	0	1	1	2	2	2	2
3	G	0						
4	A	0						
5	C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ \ $j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1	1	1	1
2	C	0	1	1	2	2	2	2
3	G	0	1					
4	A	0						
5	C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ / $j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1	1	1	1
2	C	0	1	1	2	2	2	2
3	G	0	1	2				
4	A	0						
5	C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ \ $j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1	1	1	1
2	C	0	1	1	2	2	2	2
3	G	0	1	2	2			
4	A	0						
5	C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ \ $j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1	1	1	1
2	C	0	1	1	2	2	2	2
3	G	0	1	2	2	2		
4	A	0						
5	C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ \ $j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1	1	1	1
2	C	0	1	1	2	2	2	2
3	G	0	1	2	2	2	2	
4	A	0						
5	C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ \ $j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1	1	1	1
2	C	0	1	1	2	2	2	2
3	G	0	1	2	2	2	2	2
4	A	0						
5	C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ / $j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1	1	1	1
2	C	0	1	1	2	2	2	2
3	G	0	1	2	2	2	2	2
4	A	0	1					
5	C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ \ $j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1	1	1	1
2	C	0	1	1	2	2	2	2
3	G	0	1	2	2	2	2	2
4	A	0	1	2				
5	C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ \ $j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1	1	1	1
2	C	0	1	1	2	2	2	2
3	G	0	1	2	2	2	2	2
4	A	0	1	2	2			
5	C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ \ $j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1	1	1	1
2	C	0	1	1	2	2	2	2
3	G	0	1	2	2	2	2	2
4	A	0	1	2	2	3		
5	C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ \ $j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1	1	1	1
2	C	0	1	1	2	2	2	2
3	G	0	1	2	2	2	2	2
4	A	0	1	2	2	3	3	
5	C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ / $j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1	1	1	1
2	C	0	1	1	2	2	2	2
3	G	0	1	2	2	2	2	2
4	A	0	1	2	2	3	3	3
5	C	0						

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ \ $j \rightarrow$	0		1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1	1	1	1
2	C	0	1	1	2	2	2	2
3	G	0	1	2	2	2	2	2
4	A	0	1	2	2	3	3	3
5	C	0	1					

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ \ $j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1	1	1	1
2	C	0	1	1	2	2	2	2
3	G	0	1	2	2	2	2	2
4	A	0	1	2	2	3	3	3
5	C	0	1	2				

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ \ $j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1	1	1	1
2	C	0	1	1	2	2	2	2
3	G	0	1	2	2	2	2	2
4	A	0	1	2	2	3	3	3
5	C	0	1	2	3			

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ \ $j \rightarrow$	0		1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1	1	1	1
2	C	0	1	1	2	2	2	2
3	G	0	1	2	2	2	2	2
4	A	0	1	2	2	3	3	3
5	C	0	1	2	3	3		

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ / $j \rightarrow$	0		1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1	1	1	1
2	C	0	1	1	2	2	2	2
3	G	0	1	2	2	2	2	2
4	A	0	1	2	2	3	3	3
5	C	0	1	2	3	3	3	

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt

$i \downarrow$ \ $j \rightarrow$		0	1	2	3	4	5	6
			A	G	C	A	T	A
0		0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	1	1	1	1	1
2	C	0	1	1	2	2	2	2
3	G	0	1	2	2	2	2	2
4	A	0	1	2	2	3	3	3
5	C	0	1	2	3	3	3	3

Longest Common Subsequence: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{LCS}(i,0) = \mathbf{LCS}(0,j) = 0$
- $\mathbf{LCS}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{LCS}(i-1,j-1)+1 & \text{wenn } a_i = b_i \\ \max\{\mathbf{LCS}(i,j-1), \mathbf{LCS}(i-1,j)\} & \text{wenn } a_i \neq b_i \end{cases}$

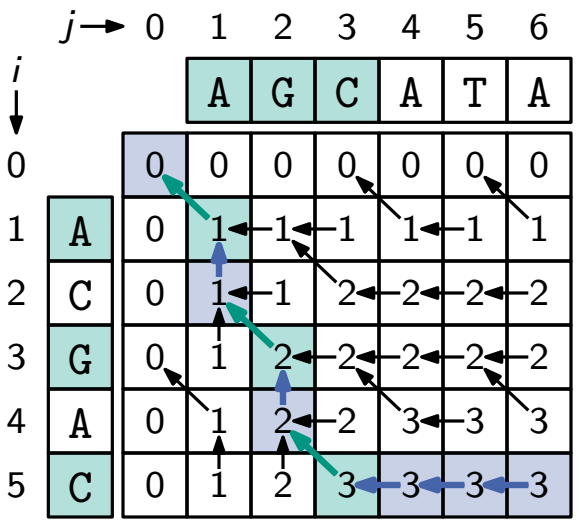
Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere für jedes $(i,j) \in [0,n] \times [0,m]$ eine Zahl
- $\rightarrow$ Array von Arrays
- Eintrag bei (i,j) hängt ab von Einträgen bei: $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ und $(i-1,j)$
- von oben links nach unten rechts ausfüllen (Zeilenweise)
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt
  - Rückverfolgung dieser Pointer $\rightarrow$ Lösung

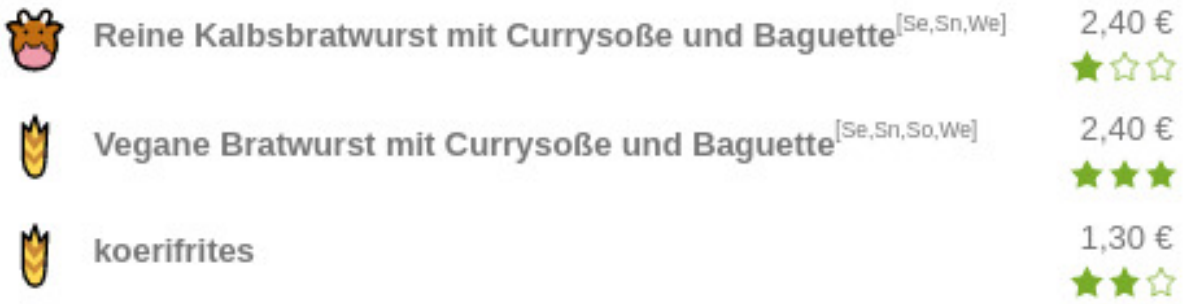
(jeder diagonale Schritt ist gemeinsames Zeichen)



Subset Sum

Situation

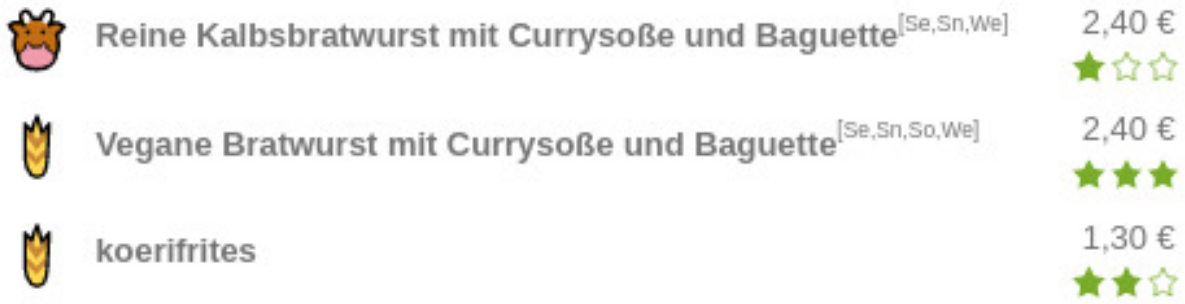
- ihr braucht kœri + Pommes (3,70€)
- ihr wollt gerne passend bezahlen



Subset Sum

Situation

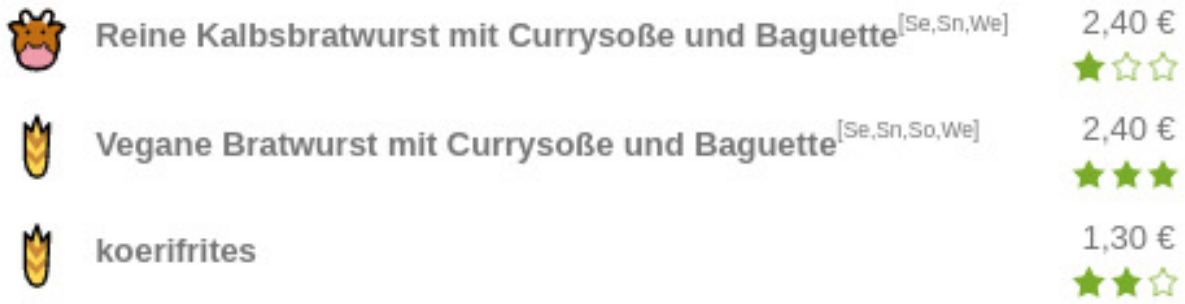
- ihr braucht kœri + Pommes (3,70€)
- ihr wollt gerne passend bezahlen



Subset Sum

Situation

- ihr braucht kœri + Pommes (3,70€)
- ihr wollt gerne passend bezahlen

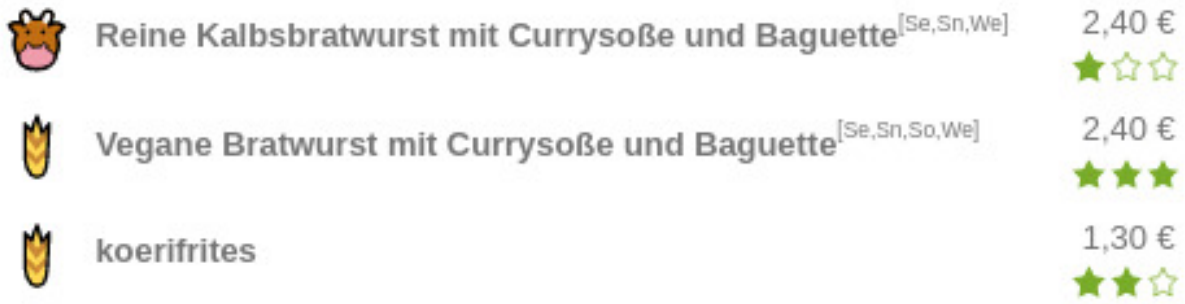


Problem: Subset Sum
Gegeben eine Multimenge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ von natürlichen Zahlen und eine natürliche Zahl S. Gibt es eine Teilmenge $A' \subseteq A$, sodass $\sum_{a \in A'} a = S$?

Subset Sum

Situation

- ihr braucht kœri + Pommes (3,70€)
- ihr wollt gerne passend bezahlen



Problem: Subset Sum
Gegeben eine Multimenge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ von natürlichen Zahlen und eine natürliche Zahl S. Gibt es eine Teilmenge $A' \subseteq A$, sodass $\sum_{a \in A'} a = S$?

Anmerkungen

- das ist in gewissem Sinne ein schweres Problem
- mehr dazu in TGI nächstes Semester
- aber: S nicht zu groß $\rightarrow$ effiziente Lösung mit DP

Subset Sum: Teilprobleme und Rekurrenz

Problem: Subset Sum Problem
Gegeben eine Multimenge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ von natürlichen Zahlen und eine natürliche Zahl S. Gibt es eine Teilmenge $A' \subseteq A$, sodass $\sum_{a \in A'} a = S$?

Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme

pwa.klicker.uzh.ch/join/algo1

Subset Sum: Teilprobleme und Rekurrenz

Problem: Subset Sum Problem
Gegeben eine Multimenge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ von natürlichen Zahlen und eine natürliche Zahl S. Gibt es eine Teilmenge $A' \subseteq A$, sodass $\sum_{a \in A'} a = S$?

Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme

Welche Teilprobleme würdet ihr betrachten?

Subset Sum: Teilprobleme und Rekurrenz

Problem: Subset Sum Problem
Gegeben eine Multimenge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ von natürlichen Zahlen und eine natürliche Zahl S. Gibt es eine Teilmenge $A' \subseteq A$, sodass $\sum_{a \in A'} a = S$?

Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme

- betrachte ein Paar (i, s) mit $i \leq n$ und $s \leq S$
- Gibt es Teilmenge $A' \subseteq \{a_1, \ldots, a_i\}$, sodass $\sum_{a \in A'} a = s$?

Subset Sum: Teilprobleme und Rekurrenz

Problem: Subset Sum Problem
Gegeben eine Multimenge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ von natürlichen Zahlen und eine natürliche Zahl S. Gibt es eine Teilmenge $A' \subseteq A$, sodass $\sum_{a \in A'} a = S$?

Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme

- betrachte ein Paar (i, s) mit $i \leq n$ und $s \leq S$
- Gibt es Teilmenge $A' \subseteq \{a_1, \ldots, a_i\}$, sodass $\sum_{a \in A'} a = s$?
- $i = n$ und $s = S$ liefert Gesamtlösung

Subset Sum: Teilprobleme und Rekurrenz

Problem: Subset Sum Problem
Gegeben eine Multimenge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ von natürlichen Zahlen und eine natürliche Zahl S. Gibt es eine Teilmenge $A' \subseteq A$, sodass $\sum_{a \in A'} a = S$?

Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme

- betrachte ein Paar (i, s) mit $i \leq n$ und $s \leq S$
- Gibt es Teilmenge $A' \subseteq \{a_1, \ldots, a_i\}$, sodass $\sum_{a \in A'} a = s$?
- $i = n$ und $s = S$ liefert Gesamtlösung

Schritt 2: Aufstellung der Rekurrenz

- Ziel: **SSP**$(i, s) = \texttt{true}$ genau dann wenn es für das Paar (i, s) eine Lösung gibt

Subset Sum: Teilprobleme und Rekurrenz

Problem: Subset Sum Problem
Gegeben eine Multimenge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ von natürlichen Zahlen und eine natürliche Zahl S. Gibt es eine Teilmenge $A' \subseteq A$, sodass $\sum_{a \in A'} a = S$?

Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme

- betrachte ein Paar (i, s) mit $i \leq n$ und $s \leq S$
- Gibt es Teilmenge $A' \subseteq \{a_1, \ldots, a_i\}$, sodass $\sum_{a \in A'} a = s$?
- $i = n$ und $s = S$ liefert Gesamtlösung

Schritt 2: Aufstellung der Rekurrenz

- Ziel: **SSP**$(i, s) = \texttt{true}$ genau dann wenn es für das Paar (i, s) eine Lösung gibt
- **SSP**$(0, s) = \texttt{true} \Leftrightarrow s = 0$ ($\texttt{false}$ sonst) und **SSP**$(i, s) = \texttt{false}$ für $s < 0$

Subset Sum: Teilprobleme und Rekurrenz

Problem: Subset Sum Problem
Gegeben eine Multimenge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ von natürlichen Zahlen und eine natürliche Zahl S. Gibt es eine Teilmenge $A' \subseteq A$, sodass $\sum_{a \in A'} a = S$?

Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme

- betrachte ein Paar (i, s) mit $i \leq n$ und $s \leq S$
- Gibt es Teilmenge $A' \subseteq \{a_1, \ldots, a_i\}$, sodass $\sum_{a \in A'} a = s$?
- $i = n$ und $s = S$ liefert Gesamtlösung

Schritt 2: Aufstellung der Rekurrenz

- Ziel: $\mathbf{SSP}(i, s) = \texttt{true}$ genau dann wenn es für das Paar (i, s) eine Lösung gibt
- $\mathbf{SSP}(0, s) = \texttt{true} \Leftrightarrow s = 0$ ($\texttt{false}$ sonst) und $\mathbf{SSP}(i, s) = \texttt{false}$ für $s < 0$
- $\mathbf{SSP}(i, s) = \underbrace{\mathbf{SSP}(i-1, s)}_{a_i \text{ nicht gewählt}} \vee \underbrace{\mathbf{SSP}(i-1, s-a_i)}_{a_i \text{ gewählt}}$

(Korrektheit folgt induktiv)

Subset Sum: Schritt 3

Rekurrenz

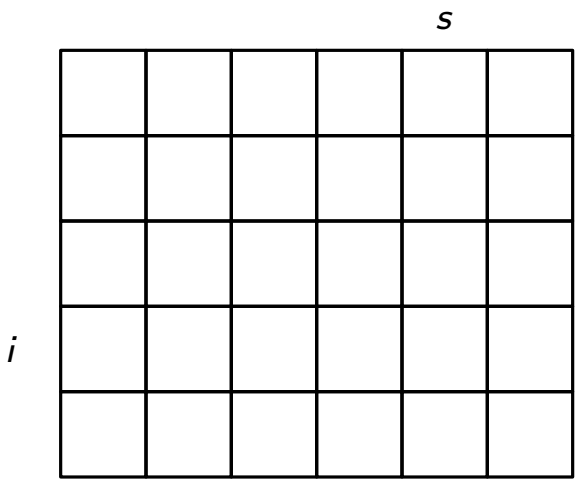
- $\mathbf{SSP}(0, s) = \texttt{true} \Leftrightarrow s = 0$
- $\mathbf{SSP}(i, s) = \texttt{false}$ für $s < 0$
- $\mathbf{SSP}(i, s) = \mathbf{SSP}(i-1, s) \vee \mathbf{SSP}(i-1, s-a_i)$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- $\mathbf{SSP}(i, s) = \texttt{false}$ für $s < 0$ brauchen wir nicht explizit speichern
- für jedes $(i, s) \in [0, n] \times [0, S]$ ein boolescher Wert $\rightarrow$ Array von Arrays



Subset Sum: Schritt 3

Rekurrenz

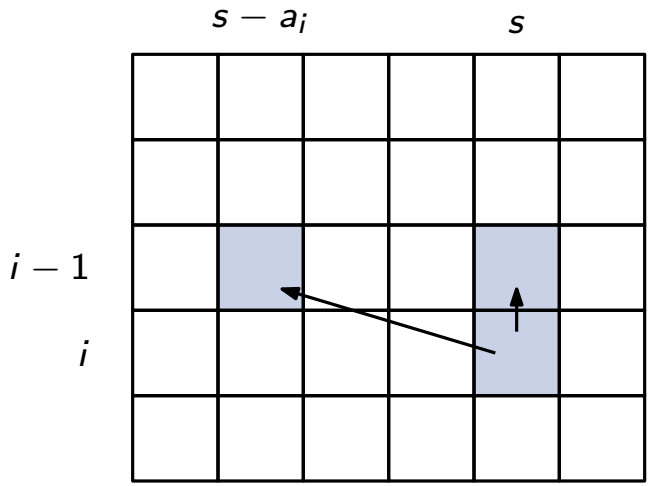
- $\mathbf{SSP}(0, s) = \texttt{true} \Leftrightarrow s = 0$
- $\mathbf{SSP}(i, s) = \texttt{false}$ für $s < 0$
- $\mathbf{SSP}(i, s) = \mathbf{SSP}(i-1, s) \vee \mathbf{SSP}(i-1, s-a_i)$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- $\mathbf{SSP}(i, s) = \texttt{false}$ für $s < 0$ brauchen wir nicht explizit speichern
- für jedes $(i, s) \in [0, n] \times [0, S]$ ein boolescher Wert $\rightarrow$ Array von Arrays
- Einträge in Zeile i hängen von Einträgen in Zeile $i-1$ ab
- Reihenfolge: Tabelle zeilenweise ausfüllen



Subset Sum: Schritt 3

Rekurrenz

- $\mathbf{SSP}(0, s) = \texttt{true} \Leftrightarrow s = 0$
- $\mathbf{SSP}(i, s) = \texttt{false}$ für $s < 0$
- $\mathbf{SSP}(i, s) = \mathbf{SSP}(i-1, s) \vee \mathbf{SSP}(i-1, s-a_i)$

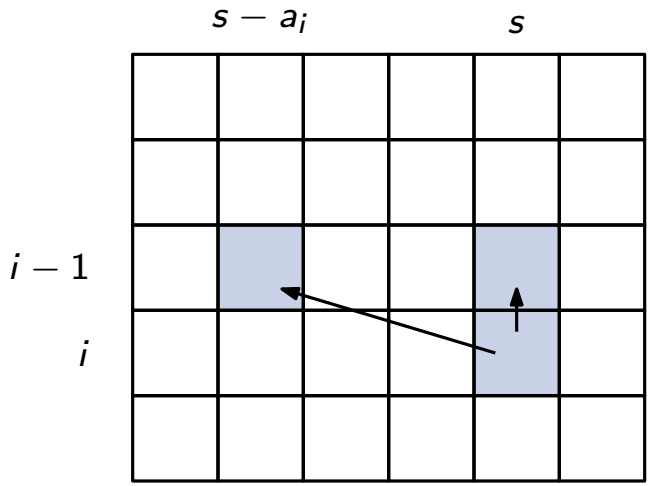
Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- $\mathbf{SSP}(i, s) = \texttt{false}$ für $s < 0$ brauchen wir nicht explizit speichern
- für jedes $(i, s) \in [0, n] \times [0, S]$ ein boolescher Wert $\rightarrow$ Array von Arrays
- Einträge in Zeile i hängen von Einträgen in Zeile $i-1$ ab
- Reihenfolge: Tabelle zeilenweise ausfüllen
- zur Rekonstruktion der Lösung:
  - merke für jeden Eintrag, von wo er kommt
  - Rückverfolgung dieser Pointer $\rightarrow$ Lösung

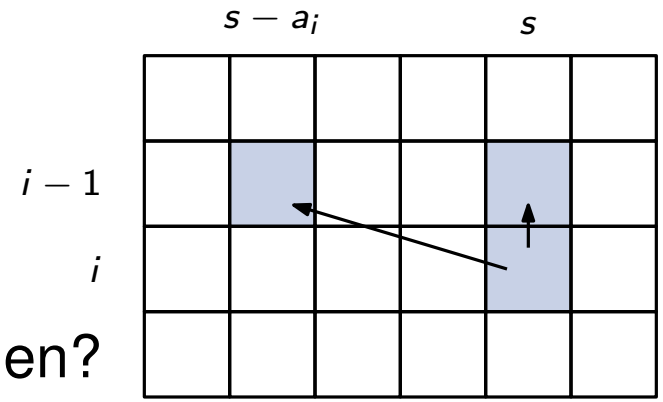
    (jeder diagonale Schritt entspricht ausgewähltem Element)



Alternativer Sichtweise für Schritt 3: Pfadfindung

Rekurrenz

- $\mathbf{SSP}(0, s) = \texttt{true} \Leftrightarrow s = 0$
- $\mathbf{SSP}(i, s) = \texttt{false}$ für $s < 0$
- $\mathbf{SSP}(i, s) = \mathbf{SSP}(i-1, s) \vee \mathbf{SSP}(i-1, s - a_i)$

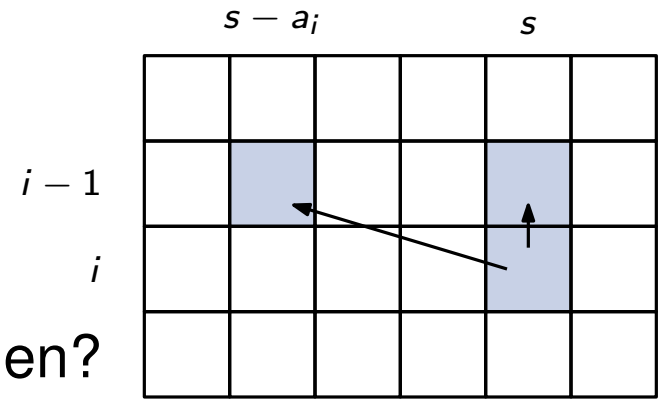


Bisher: Welche Einträge muss ich anschauen, um (i, s) auszufüllen?

Alternativer Sichtweise für Schritt 3: Pfadfindung

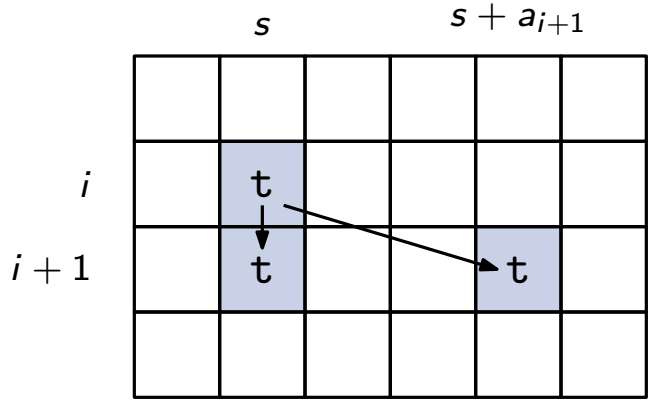
Rekurrenz

- $\mathbf{SSP}(0, s) = \texttt{true} \Leftrightarrow s = 0$
- $\mathbf{SSP}(i, s) = \texttt{false}$ für $s < 0$
- $\mathbf{SSP}(i, s) = \mathbf{SSP}(i-1, s) \vee \mathbf{SSP}(i-1, s - a_i)$



Bisher: Welche Einträge muss ich anschauen, um (i, s) auszufüllen?

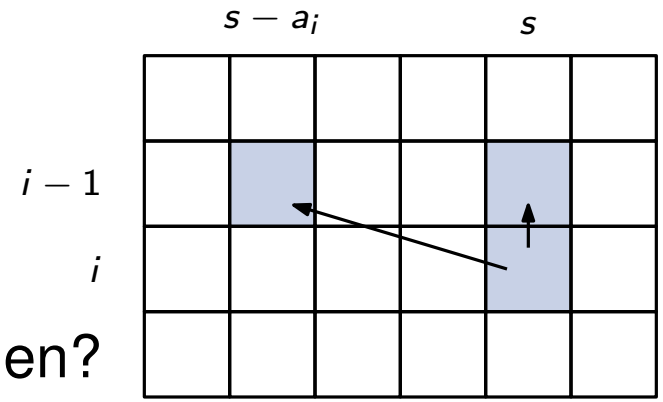
Jetzt: Welche Einträge kann ich auf `true` setzen, wenn ich weiß, dass $\mathbf{SSP}(i, s) = \texttt{true}$?



Alternativer Sichtweise für Schritt 3: Pfadfindung

Rekurrenz

- $\mathbf{SSP}(0, s) = \texttt{true} \Leftrightarrow s = 0$
- $\mathbf{SSP}(i, s) = \texttt{false}$ für $s < 0$
- $\mathbf{SSP}(i, s) = \mathbf{SSP}(i-1, s) \vee \mathbf{SSP}(i-1, s - a_i)$

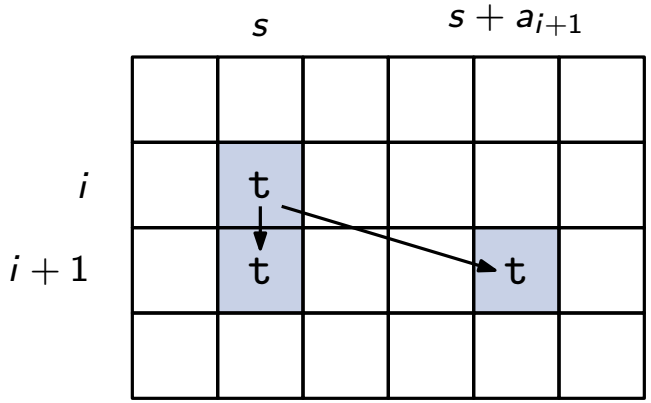


Bisher: Welche Einträge muss ich anschauen, um (i, s) auszufüllen?

Jetzt: Welche Einträge kann ich auf `true` setzen, wenn ich weiß, dass $\mathbf{SSP}(i, s) = \texttt{true}$?

Pfadfindung in einem Graphen

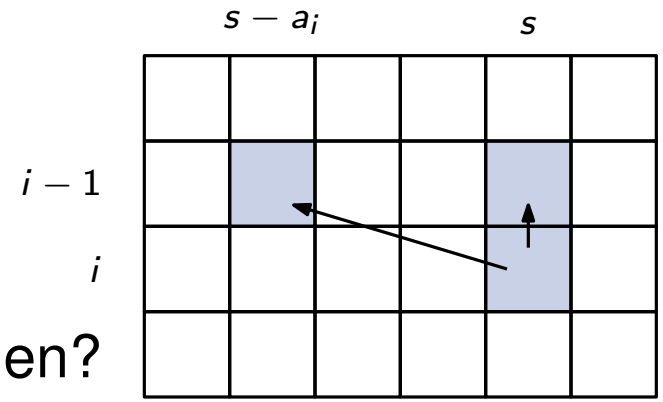
- fasse jedes Paar (i, s) als Knoten auf
- Kanten: $(i, s) \to (i+1, s)$ und $(i, s) \to (i+1, s + a_{i+1})$
- Ja-Instanz $\Leftrightarrow$ es gibt einen Pfad von $(0, 0)$ zu (n, S)



Alternativer Sichtweise für Schritt 3: Pfadfindung

Rekurrenz

- $\mathbf{SSP}(0, s) = \texttt{true} \Leftrightarrow s = 0$
- $\mathbf{SSP}(i, s) = \texttt{false}$ für $s < 0$
- $\mathbf{SSP}(i, s) = \mathbf{SSP}(i-1, s) \vee \mathbf{SSP}(i-1, s - a_i)$

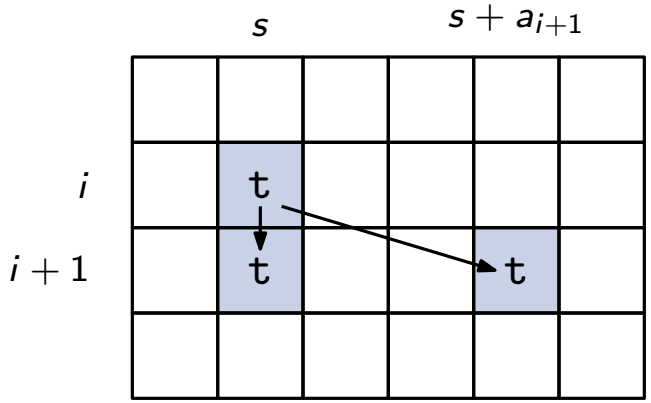


Bisher: Welche Einträge muss ich anschauen, um (i, s) auszufüllen?

Jetzt: Welche Einträge kann ich auf `true` setzen, wenn ich weiß, dass $\mathbf{SSP}(i, s) = \texttt{true}$?

Pfadfindung in einem Graphen

- fasse jedes Paar (i, s) als Knoten auf
- Kanten: $(i, s) \to (i+1, s)$ und $(i, s) \to (i+1, s + a_{i+1})$
- Ja-Instanz $\Leftrightarrow$ es gibt einen Pfad von $(0, 0)$ zu (n, S)
- beachte: Graph nur implizit repräsentiert
- Vorteil: wir besuchen in der Tabelle nur Zellen, die `true` sind



(ggf. deutlich weniger als alle Zellen)

In drei Schritten zum dynamischen Programm

Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme

- Welche Zwischenergebnisse wollen wir berechnen?
- Worüber geht die Induktion?
- Induktion über Parameter oder eine Baumstruktur

schwer
erfordert Kreativität
ggf. richtige Idee nötig
interagiert mit Schritt 2

Schritt 2: Aufstellung der Rekurrenz für Teillösungen

- Wie berechnen wir neue aus alten Zwischenergebnissen?
- Korrektheit: vollständige oder strukturelle Induktion

nicht superschwer
(vorausgesetzt ihr habt eine gute Spezifikation der Teilergebnisse)

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

leicht
(mit etwas Übung)

Dynamische Programmierung

DPs haben wir schon häufiger gesehen (ohne es zu wissen)

- Bellman–Ford
  - DP über die Anzahl Kanten aus denen die Pfade bestehen
  - Iteration i: berechne kürzeste Pfade unter allen Pfaden, die aus $\leq i$ Kanten bestehen

Dynamische Programmierung

DPs haben wir schon häufiger gesehen (ohne es zu wissen)

- Bellman–Ford
  - DP über die Anzahl Kanten aus denen die Pfade bestehen
  - Iteration i: berechne kürzeste Pfade unter allen Pfaden, die aus $\leq i$ Kanten bestehen
- Blatt 11, Aufgabe 1 – Dijkstras Angst-Gegner
  - berechne kürzesten Pfad in einem DAG
  - DP über topologische Sortierung der Knoten

Dynamische Programmierung

Karlsruher Institut für Technologie

DPs haben wir schon häufiger gesehen (ohne es zu wissen)

- Bellman–Ford
  - DP über die Anzahl Kanten aus denen die Pfade bestehen
  - Iteration i: berechne kürzeste Pfade unter allen Pfaden, die aus $\leq i$ Kanten bestehen
- Blatt 11, Aufgabe 1 – Dijkstras Angst-Gegner
  - berechne kürzesten Pfad in einem DAG
  - DP über topologische Sortierung der Knoten

Lernziel

- ihr habt verstanden, wie DPs funktionieren $\rightarrow$ schnelleres Verständnis unbekannter DPs
- ihr könnt zumindest einfache DPs selber bauen

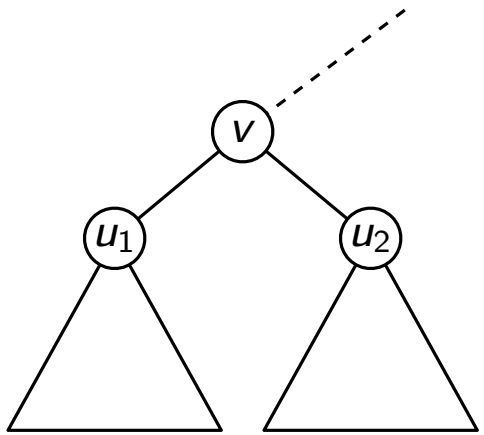
(insbesondere, wenn die Teillösungen gegeben sind)

Bonus: Längster Pfad im Baum

Problem: Longest Path
Gegeben einen (gewurzelten) Baum T. Wie lang ist der längste Pfad in T?

Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme

- strukturelle Induktion über Baumstruktur



Erinnerung: 1. Spezifikation der Teilprobleme

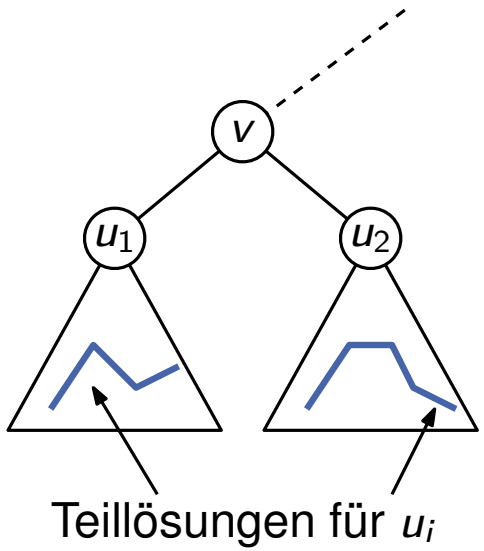
- Welche Zwischenergebnisse wollen wir berechnen?
- Worüber geht die Induktion?

Bonus: Längster Pfad im Baum

Problem: Longest Path
Gegeben einen (gewurzelten) Baum T. Wie lang ist der längste Pfad in T?

Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme

- strukturelle Induktion über Baumstruktur
- Teillösung für v: längster Pfad in Teilbaum T_v unter v



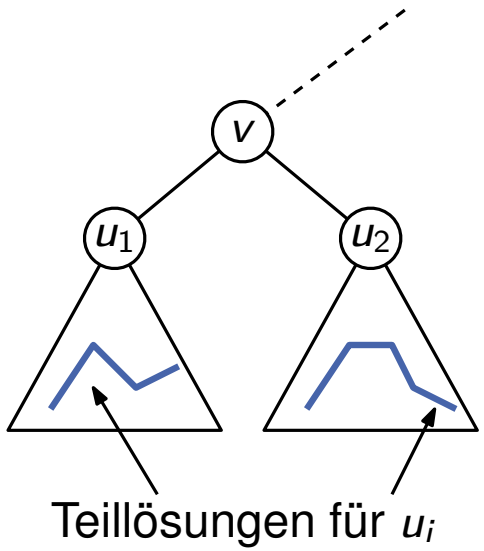
Erinnerung: 1. Spezifikation der Teilprobleme
- Welche Zwischenergebnisse wollen wir berechnen?
- Worüber geht die Induktion?

Bonus: Längster Pfad im Baum

Problem: Longest Path
Gegeben einen (gewurzelten) Baum T. Wie lang ist der längste Pfad in T?

Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme

- strukturelle Induktion über Baumstruktur
- Teillösung für v: längster Pfad in Teilbaum T_v unter v



Schritt 2: Aufstellung der Rekurrenz

- erhalte Lösung für v aus Lösung für Kinder $u_1, \ldots, u_k$

Erinnerung: 1. Spezifikation der Teilprobleme
- Welche Zwischenergebnisse wollen wir berechnen?
- Worüber geht die Induktion?

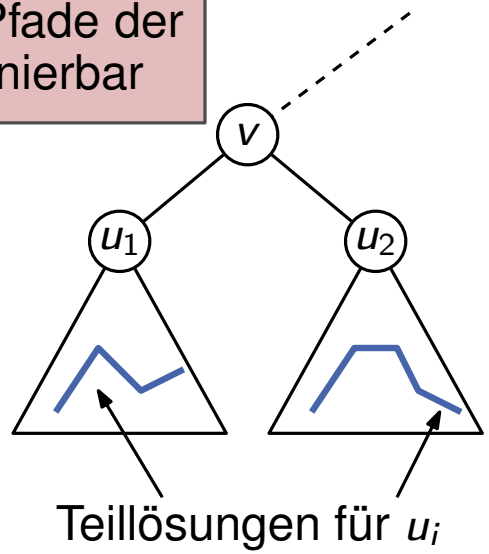
Bonus: Längster Pfad im Baum

Problem: Longest Path
Gegeben einen (gewurzelten) Baum T. Wie lang ist der längste Pfad in T?

Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme

- strukturelle Induktion über Baumstruktur
- Teillösung für v: längster Pfad in Teilbaum T_v unter v

Problem: längste Pfade der T_{u_i} ggf. nicht kombinierbar



Schritt 2: Aufstellung der Rekurrenz

- erhalte Lösung für v aus Lösung für Kinder $u_1, \ldots, u_k$

Erinnerung: 1. Spezifikation der Teilprobleme

- Welche Zwischenergebnisse wollen wir berechnen?
- Worüber geht die Induktion?

Bonus: Längster Pfad im Baum

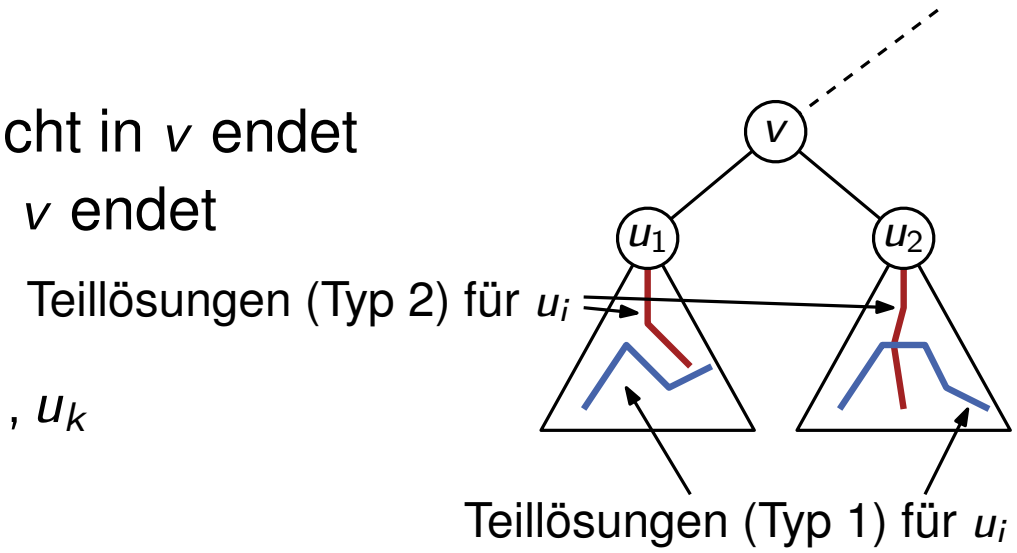
Problem: Longest Path
Gegeben einen (gewurzelten) Baum T. Wie lang ist der längste Pfad in T?

Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme

- strukturelle Induktion über Baumstruktur
- Teillösung (Typ 1) für v: längster Pfad in T_v, der nicht in v endet
- Teillösung (Typ 2) für v: längster Pfad in T_v, der in v endet

Schritt 2: Aufstellung der Rekurrenz

- erhalte Lösung für v aus Lösung für Kinder $u_1, \ldots, u_k$



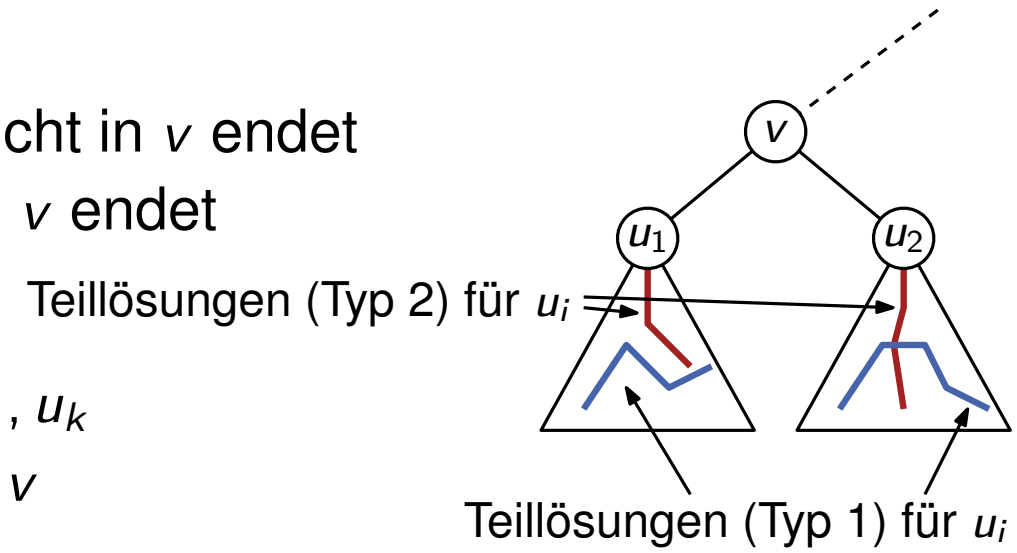
Erinnerung: 1. Spezifikation der Teilprobleme
- Welche Zwischenergebnisse wollen wir berechnen?
- Worüber geht die Induktion?

Bonus: Längster Pfad im Baum

Problem: Longest Path
Gegeben einen (gewurzelten) Baum T. Wie lang ist der längste Pfad in T?

Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme

- strukturelle Induktion über Baumstruktur
- Teillösung (Typ 1) für v: längster Pfad in T_v, der nicht in v endet
- Teillösung (Typ 2) für v: längster Pfad in T_v, der in v endet



Schritt 2: Aufstellung der Rekurrenz

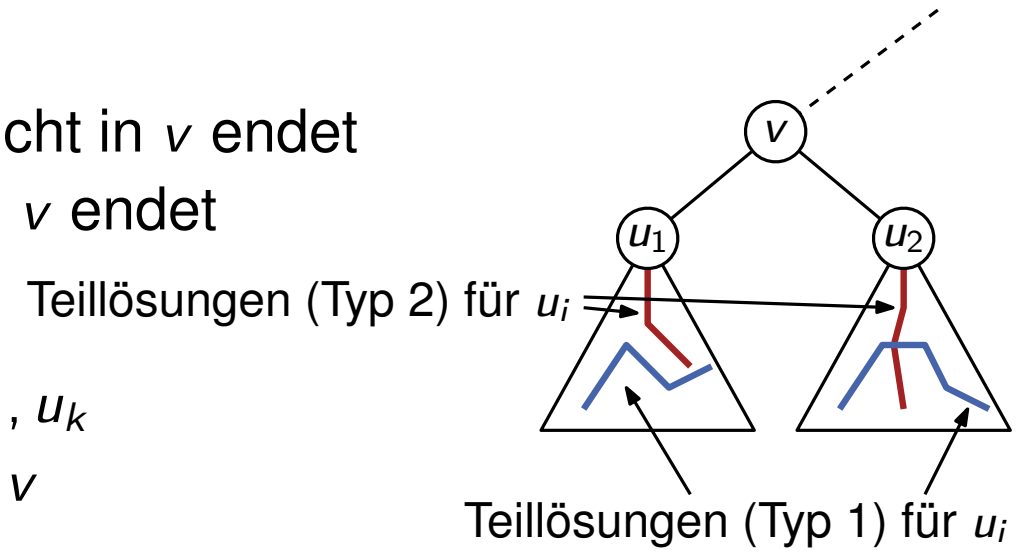
- erhalte Lösung für v aus Lösung für Kinder $u_1, \ldots, u_k$
- Ziel: $\mathbf{LP}_t(v)$ repräsentiert Teillösung von Typ t für v

Bonus: Längster Pfad im Baum

Problem: Longest Path
Gegeben einen (gewurzelten) Baum T. Wie lang ist der längste Pfad in T?

Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme

- strukturelle Induktion über Baumstruktur
- Teillösung (Typ 1) für v: längster Pfad in T_v, der nicht in v endet
- Teillösung (Typ 2) für v: längster Pfad in T_v, der in v endet



Schritt 2: Aufstellung der Rekurrenz

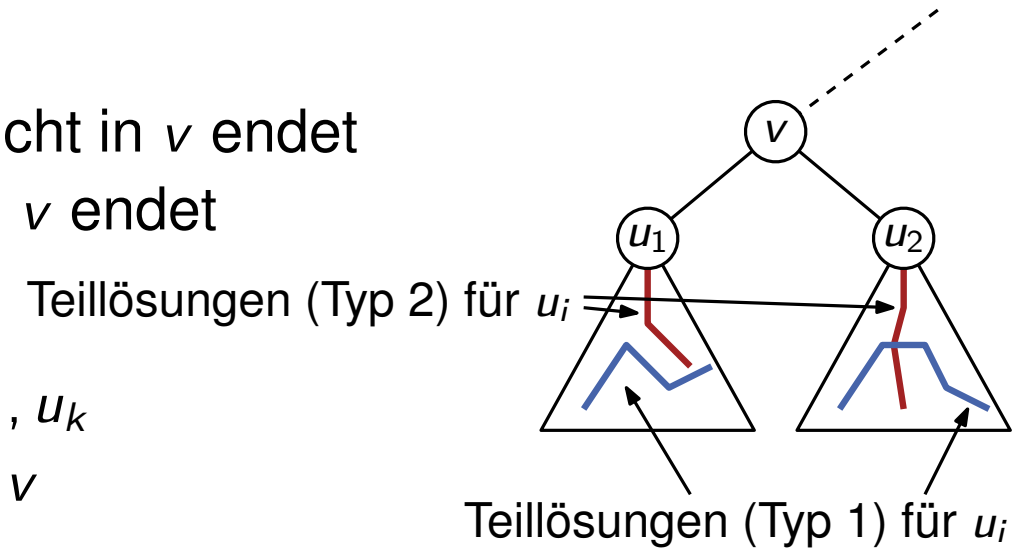
- erhalte Lösung für v aus Lösung für Kinder $u_1, \ldots, u_k$
- Ziel: $\mathbf{LP}_t(v)$ repräsentiert Teillösung von Typ t für v
- Falls v ein Blatt: $\mathbf{LP}_1(v) = \mathbf{LP}_2(v) = 0$

Bonus: Längster Pfad im Baum

Problem: Longest Path
Gegeben einen (gewurzelten) Baum T. Wie lang ist der längste Pfad in T?

Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme

- strukturelle Induktion über Baumstruktur
- Teillösung (Typ 1) für v: längster Pfad in T_v, der nicht in v endet
- Teillösung (Typ 2) für v: längster Pfad in T_v, der in v endet



Schritt 2: Aufstellung der Rekurrenz

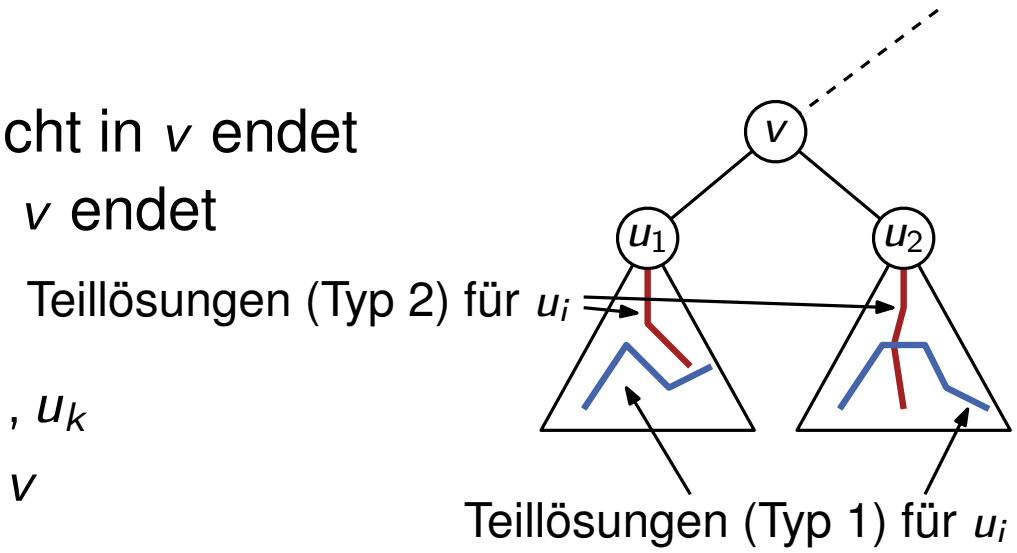
- erhalte Lösung für v aus Lösung für Kinder $u_1, \ldots, u_k$
- Ziel: $\mathbf{LP}_t(v)$ repräsentiert Teillösung von Typ t für v
- Falls v ein Blatt: $\mathbf{LP}_1(v) = \mathbf{LP}_2(v) = 0$
- $\mathbf{LP}_2(v) = \max_i\{\mathbf{LP}_2(u_i) + 1\}$

Bonus: Längster Pfad im Baum

Problem: Longest Path
Gegeben einen (gewurzelten) Baum T. Wie lang ist der längste Pfad in T?

Schritt 1: Spezifikation der Teilprobleme

- strukturelle Induktion über Baumstruktur
- Teillösung (Typ 1) für v: längster Pfad in T_v, der nicht in v endet
- Teillösung (Typ 2) für v: längster Pfad in T_v, der in v endet



Schritt 2: Aufstellung der Rekurrenz

- erhalte Lösung für v aus Lösung für Kinder $u_1, \ldots, u_k$
- Ziel: $\mathbf{LP}_t(v)$ repräsentiert Teillösung von Typ t für v
- Falls v ein Blatt: $\mathbf{LP}_1(v) = \mathbf{LP}_2(v) = 0$
- $\mathbf{LP}_2(v) = \max_i\{\mathbf{LP}_2(u_i) + 1\}$
- $\mathbf{LP}_1(v) = \max\left[\max_i\{\max\{\mathbf{LP}_1(u_i), \mathbf{LP}_2(u_i)\}\},\ \max_{i\neq j}\{\mathbf{LP}_2(u_i) + \mathbf{LP}_2(u_j) + 2\}\right]$

Bonus: Längster Pfad im Baum: Korrektheit

Rekurrenz

- Falls v ein Blatt: $\mathbf{LP}_1(v) = \mathbf{LP}_2(v) = 0$
- $\mathbf{LP}_2(v) = \max_i\{\mathbf{LP}_2(u_i) + 1\}$
- $\mathbf{LP}_1(v) = \max\Big[\max_i\{\max\{\mathbf{LP}_1(u_i), \mathbf{LP}_2(u_i)\}\}, \max_{i \neq j}\{\mathbf{LP}_2(u_i) + \mathbf{LP}_2(u_j) + 2\}\Big]$

Was wollen wir zeigen?

- Ziel: $\mathbf{LP}_i(v)$ repräsentiert Teillösung von Typ i für v
- Typ 1: längster Pfad in Teilbaum T_v unter v
- Typ 2: längster Pfad in T_v, der in v endet

Bonus: Längster Pfad im Baum: Korrektheit

Rekurrenz

- Falls v ein Blatt: $\mathbf{LP}_1(v) = \mathbf{LP}_2(v) = 0$
- $\mathbf{LP}_2(v) = \max_i\{\mathbf{LP}_2(u_i) + 1\}$
- $\mathbf{LP}_1(v) = \max\Big[\max_i\{\max\{\mathbf{LP}_1(u_i), \mathbf{LP}_2(u_i)\}\}, \max_{i \neq j}\{\mathbf{LP}_2(u_i) + \mathbf{LP}_2(u_j) + 2\}\Big]$

Was wollen wir zeigen?

- Ziel: $\mathbf{LP}_i(v)$ repräsentiert Teillösung von Typ i für v
- Typ 1: längster Pfad in Teilbaum T_v unter v
- Typ 2: längster Pfad in T_v, der in v endet

Korrektheit mittels struktureller Induktion

- korrekt für die Blätter
- korrekt für v falls korrekt für die Kinder $u_1, \ldots, u_k$

Bonus: Längster Pfad im Baum: Korrektheit

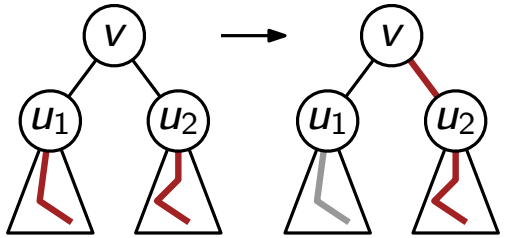
Rekurrenz

- Falls v ein Blatt: $\mathbf{LP}_1(v) = \mathbf{LP}_2(v) = 0$
- $\mathbf{LP}_2(v) = \max_i\{\mathbf{LP}_2(u_i) + 1\}$
- $\mathbf{LP}_1(v) = \max\Big[\max_i\{\max\{\mathbf{LP}_1(u_i), \mathbf{LP}_2(u_i)\}\}, \max_{i \neq j}\{\mathbf{LP}_2(u_i) + \mathbf{LP}_2(u_j) + 2\}\Big]$

Was wollen wir zeigen?

- Ziel: $\mathbf{LP}_i(v)$ repräsentiert Teillösung von Typ i für v
- Typ 1: längster Pfad in Teilbaum T_v unter v
- Typ 2: längster Pfad in T_v, der in v endet

$\mathbf{LP}_2(v) = \max_i\{\mathbf{LP}_2(u_i) + 1\}$



Korrektheit mittels struktureller Induktion

- korrekt für die Blätter
- korrekt für v falls korrekt für die Kinder $u_1, \ldots, u_k$
- **Typ 2:** Pfad führt über ein Kind u_i ($+1$ wegen $\{v, u_i\}$)

Bonus: Längster Pfad im Baum: Korrektheit

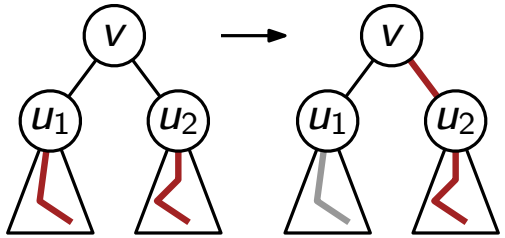
Rekurrenz

- Falls v ein Blatt: $\mathbf{LP}_1(v) = \mathbf{LP}_2(v) = 0$
- $\mathbf{LP}_2(v) = \max_i\{\mathbf{LP}_2(u_i) + 1\}$
- $\mathbf{LP}_1(v) = \max\Big[\max_i\{\max\{\mathbf{LP}_1(u_i), \mathbf{LP}_2(u_i)\}\}, \max_{i \neq j}\{\mathbf{LP}_2(u_i) + \mathbf{LP}_2(u_j) + 2\}\Big]$

Was wollen wir zeigen?

- Ziel: $\mathbf{LP}_i(v)$ repräsentiert Teillösung von Typ i für v
- Typ 1: längster Pfad in Teilbaum T_v unter v
- Typ 2: längster Pfad in T_v, der in v endet

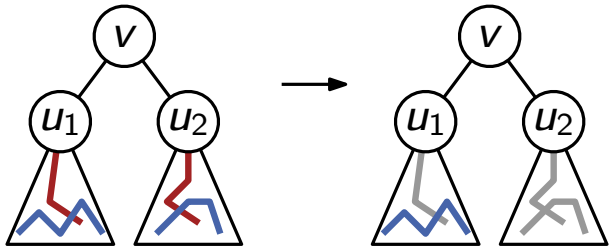
$\mathbf{LP}_2(v) = \max_i\{\mathbf{LP}_2(u_i) + 1\}$



Korrektheit mittels struktureller Induktion

- korrekt für die Blätter
- korrekt für v falls korrekt für die Kinder $u_1, \ldots, u_k$
- **Typ 2:** Pfad führt über ein Kind u_i ($+1$ wegen $\{v, u_i\}$)
- **Typ 1, Fall 1:** längster Pfad in T_v enthält v nicht

$\max_i\{\mathbf{LP}_1(u_i), \mathbf{LP}_2(u_i)\}$



Bonus: Längster Pfad im Baum: Korrektheit

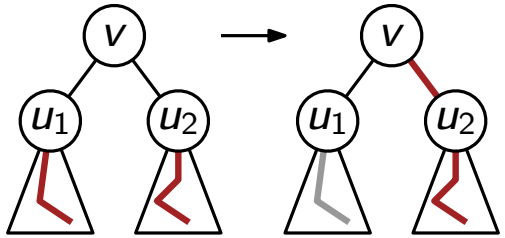
Rekurrenz

- Falls v ein Blatt: $\mathbf{LP}_1(v) = \mathbf{LP}_2(v) = 0$
- $\mathbf{LP}_2(v) = \max_i\{\mathbf{LP}_2(u_i) + 1\}$
- $\mathbf{LP}_1(v) = \max\Big[\max_i\{\max\{\mathbf{LP}_1(u_i), \mathbf{LP}_2(u_i)\}\}, \max_{i\neq j}\{\mathbf{LP}_2(u_i) + \mathbf{LP}_2(u_j) + 2\}\Big]$

Was wollen wir zeigen?

- Ziel: $\mathbf{LP}_i(v)$ repräsentiert Teillösung von Typ i für v
- Typ 1: längster Pfad in Teilbaum T_v unter v
- Typ 2: längster Pfad in T_v, der in v endet

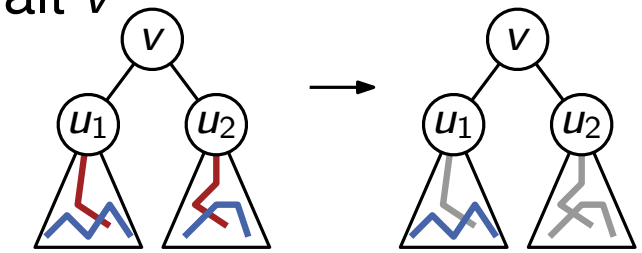
$\mathbf{LP}_2(v) = \max_i\{\mathbf{LP}_2(u_i) + 1\}$



Korrektheit mittels struktureller Induktion

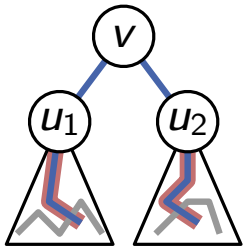
- korrekt für die Blätter
- korrekt für v falls korrekt für die Kinder $u_1, \ldots, u_k$
- **Typ 2:** Pfad führt über ein Kind u_i ($+1$ wegen $\{v, u_i\}$)
- **Typ 1, Fall 1:** längster Pfad in T_v enthält v nicht
- **Typ 1, Fall 2:** längster Pfad in T_v enthält v

$\max_i\{\mathbf{LP}_1(u_i), \mathbf{LP}_2(u_i)\}$



oder

$\max_{i\neq j}\{\mathbf{LP}_2(u_i) + \mathbf{LP}_2(u_j) + 2\}$



Bonus: Längster Pfad im Baum: Schritt 3

Rekurrenz

- Falls v ein Blatt: $\mathbf{LP}_1(v) = \mathbf{LP}_2(v) = 0$
- $\mathbf{LP}_2(v) = \max_i\{\mathbf{LP}_2(u_i) + 1\}$
- $\mathbf{LP}_1(v) = \max\Big[\max_i\{\max\{\mathbf{LP}_1(u_i), \mathbf{LP}_2(u_i)\}\},$
  $\max_{i \neq j}\{\mathbf{LP}_2(u_i) + \mathbf{LP}_2(u_j) + 2\}\Big]$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere zwei Werte an jedem Knoten v: $\mathbf{LP}_1(v)$ und $\mathbf{LP}_2(v)$

Bonus: Längster Pfad im Baum: Schritt 3

Rekurrenz

- Falls v ein Blatt: $\mathbf{LP}_1(v) = \mathbf{LP}_2(v) = 0$
- $\mathbf{LP}_2(v) = \max_i\{\mathbf{LP}_2(u_i) + 1\}$
- $\mathbf{LP}_1(v) = \max\Big[\max_i\{\max\{\mathbf{LP}_1(u_i), \mathbf{LP}_2(u_i)\}\},$
  $\max_{i \neq j}\{\mathbf{LP}_2(u_i) + \mathbf{LP}_2(u_j) + 2\}\Big]$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere zwei Werte an jedem Knoten v: $\mathbf{LP}_1(v)$ und $\mathbf{LP}_2(v)$
- Eltern hängen von Kindern ab $\rightarrow$ Reihenfolge: bottom-up (z.B. entsprechend der Lagen im BFS-Baum)

Bonus: Längster Pfad im Baum: Schritt 3

Rekurrenz

- Falls v ein Blatt: $\mathbf{LP}_1(v) = \mathbf{LP}_2(v) = 0$
- $\mathbf{LP}_2(v) = \max_i\{\mathbf{LP}_2(u_i) + 1\}$
- $\mathbf{LP}_1(v) = \max\Big[\max_i\{\max\{\mathbf{LP}_1(u_i), \mathbf{LP}_2(u_i)\}\},$
  $\max_{i \neq j}\{\mathbf{LP}_2(u_i) + \mathbf{LP}_2(u_j) + 2\}\Big]$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere zwei Werte an jedem Knoten v: $\mathbf{LP}_1(v)$ und $\mathbf{LP}_2(v)$
- Eltern hängen von Kindern ab $\rightarrow$ Reihenfolge: bottom-up (z.B. entsprechend der Lagen im BFS-Baum)
- tatsächliche Lösung berechnen: wie bei vorherigen DPs

Bonus: Längster Pfad im Baum: Schritt 3

Rekurrenz

- Falls v ein Blatt: $\mathbf{LP}_1(v) = \mathbf{LP}_2(v) = 0$
- $\mathbf{LP}_2(v) = \max_i\{\mathbf{LP}_2(u_i) + 1\}$
- $\mathbf{LP}_1(v) = \max\Big[\max_i\{\max\{\mathbf{LP}_1(u_i), \mathbf{LP}_2(u_i)\}\}, \max_{i \neq j}\{\mathbf{LP}_2(u_i) + \mathbf{LP}_2(u_j) + 2\}\Big]$

Schritt 3: Iterative Berechnung der Teillösungen

- Wie verwalten wir die Zwischenergebnisse?
- Wie hängen die Zwischenergebnisse voneinander ab?
- In welcher Reihenfolge berechnen wir Zwischenergebnisse?
- Wie bekommen wir die tatsächliche Lösung?

Antworten auf die Fragen von Schritt 3

- speichere zwei Werte an jedem Knoten v: $\mathbf{LP}_1(v)$ und $\mathbf{LP}_2(v)$
- Eltern hängen von Kindern ab $\rightarrow$ Reihenfolge: bottom-up (z.B. entsprechend der Lagen im BFS-Baum)
- tatsächliche Lösung berechnen: wie bei vorherigen DPs

Anmerkung

- Teillösungen überlappen nicht: Teillösung jedes Kinds u_i nur für den einen Elter v relevant
- rekursive Implementierung in dem Fall also auch ok (entspricht im Prinzip einer DFS)