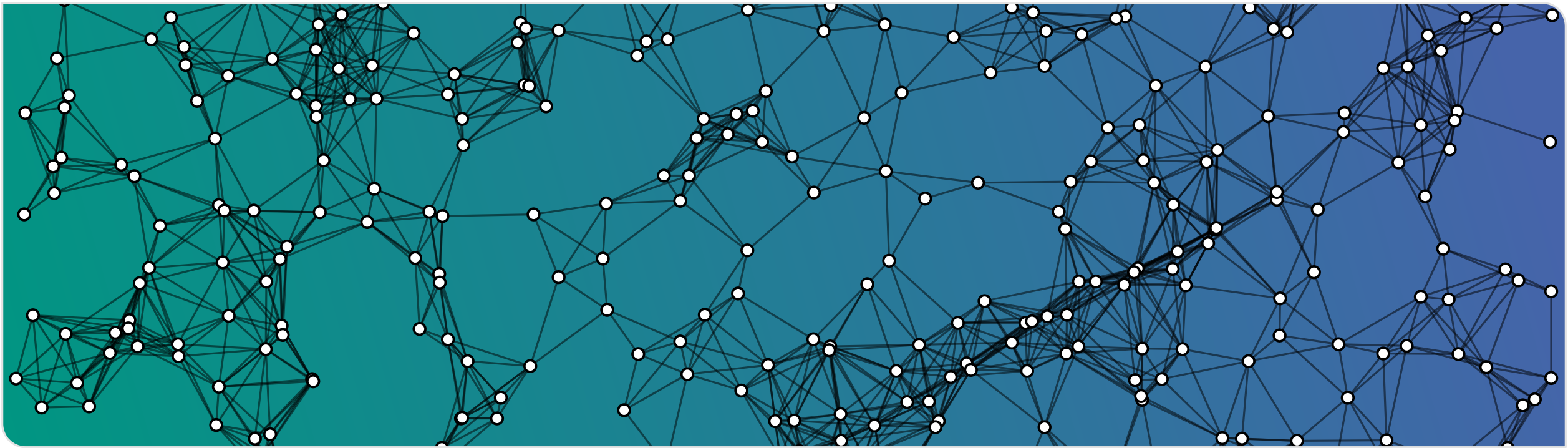
Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen 1

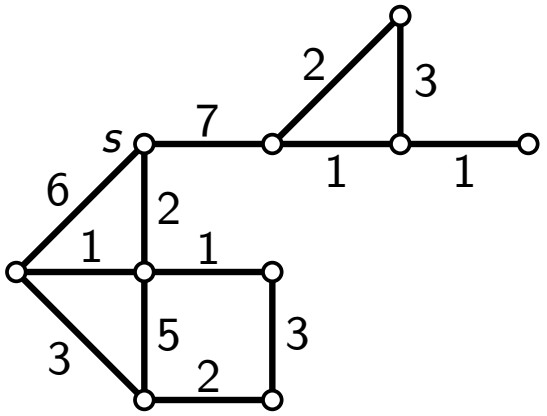
Kürzeste Wege in gewichteten Graphen – Dijkstras Algorithmus



Problemstellung

Gegeben

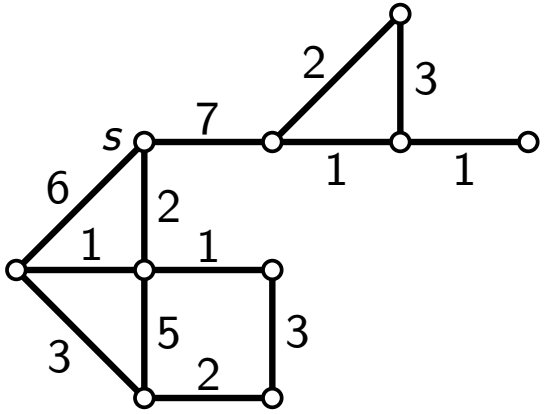
- ein Graph $G = (V, E)$ (ungerichtet oder gerichtet)
- Gewichtsfunktion $\text{len}\colon E \to \mathbb{Z}$, die jeder Kante $e \in E$ eine **Länge** $\text{len}(e)$ zuordnet
- Startknoten s



Problemstellung

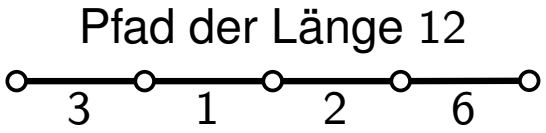
Gegeben

- ein Graph $G = (V, E)$ (ungerichtet oder gerichtet)
- Gewichtsfunktion $\text{len}\colon E \to \mathbb{Z}$, die jeder Kante $e \in E$ eine **Länge** $\text{len}(e)$ zuordnet
- Startknoten s



Pfadlängen und Distanzen

- **Länge eines Pfades** $\langle v_0, \ldots, v_k \rangle$: $\sum_{i=1}^{k} \text{len}(v_{i-1}, v_i)$ (Kurzform für $\text{len}(\{v_{i-1}, v_i\})$)

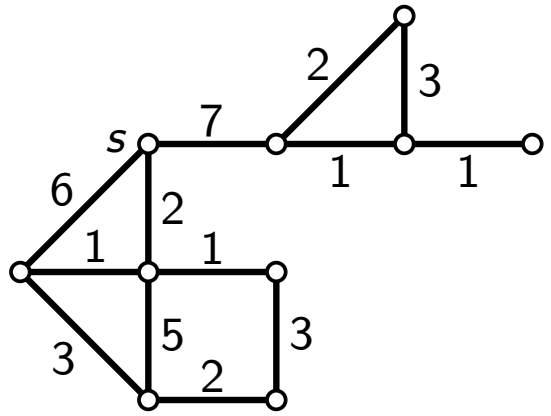


- **Distanz** $\text{dist}(s, t)$: Länge des kürzesten st-Pfades

Problemstellung

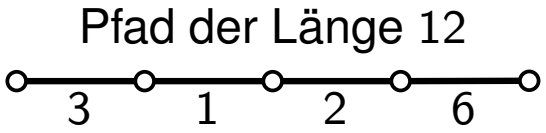
Gegeben

- ein Graph $G = (V, E)$ (ungerichtet oder gerichtet)
- Gewichtsfunktion $\text{len}\colon E \to \mathbb{Z}$, die jeder Kante $e \in E$ eine **Länge** $\text{len}(e)$ zuordnet
- Startknoten s

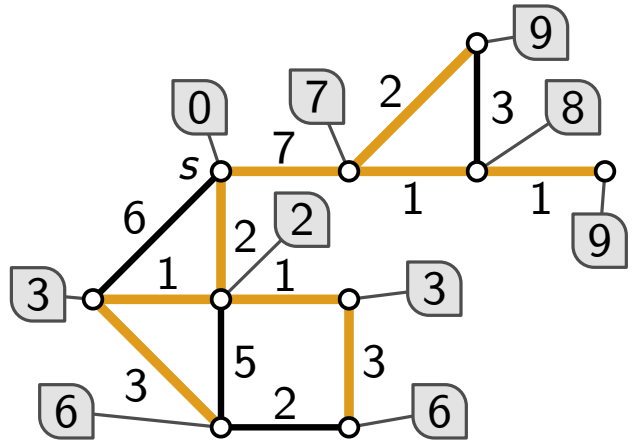


Pfadlängen und Distanzen

- **Länge eines Pfades** $\langle v_0, \ldots, v_k \rangle$: $\sum_{i=1}^{k} \text{len}(v_{i-1}, v_i)$ (Kurzform für $\text{len}(\{v_{i-1}, v_i\})$)



- **Distanz** $\text{dist}(s, t)$: Länge des kürzesten st-Pfades

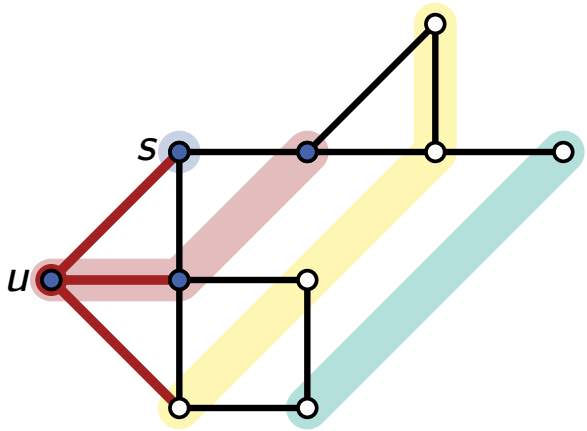


Problem: Single-Source Shortest Path (SSSP)
Gegeben einen gewichtete Graphen $G = (V, E)$ und einen Knoten $s \in V$, berechne $\text{dist}(s, t)$ für alle $t \in V$.

Erinnerung: BFS

Vorgehen

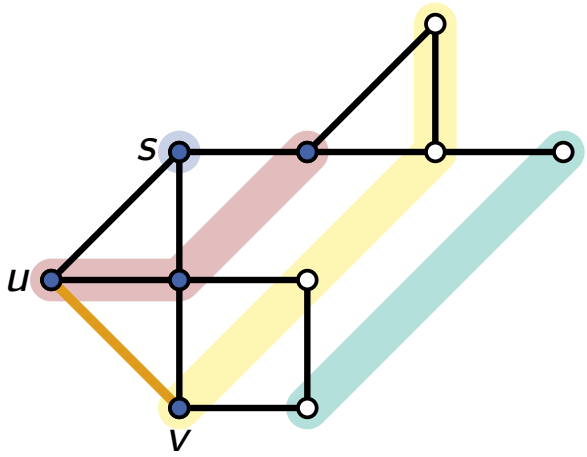
- arbeite die Knoten layerweise ab
- **Explorieren** eines Knotens u aus Layer $i-1$:
  - betrachte alle Nachbarn v von u



Erinnerung: BFS

Vorgehen

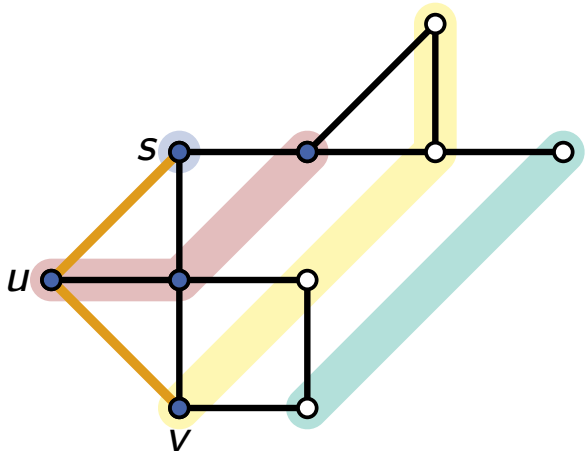
- arbeite die Knoten layerweise ab
- **Explorieren** eines Knotens u aus Layer $i-1$:
  - betrachte alle Nachbarn v von u
  - v ungefärbt $\Rightarrow$ v gehört zu Layer i



Erinnerung: BFS

Vorgehen

- arbeite die Knoten layerweise ab
- **Explorieren** eines Knotens u aus Layer $i-1$:
  - betrachte alle Nachbarn v von u
  - v ungefärbt $\Rightarrow$ v gehört zu Layer i



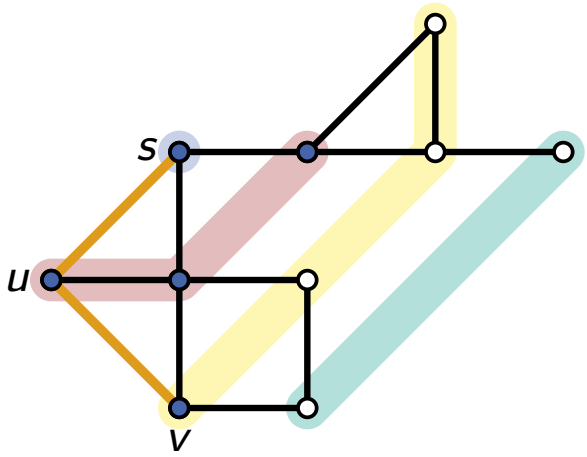
Kürzeste Pfade: v in Layer $i \Rightarrow \mathbf{dist}(s, v) = i$

- sv-Pfad der Länge i ($\mathrm{dist}(s, v) \leq i$)
  - induktiv: es gibt einen Pfad der Länge $i-1$ zu u
  - zusammen mit $\{u, v\} \Rightarrow sv$-Pfad der Länge i

Erinnerung: BFS

Vorgehen

- arbeite die Knoten layerweise ab
- **Explorieren** eines Knotens u aus Layer $i-1$:
  - betrachte alle Nachbarn v von u
  - v ungefärbt $\Rightarrow$ v gehört zu Layer i



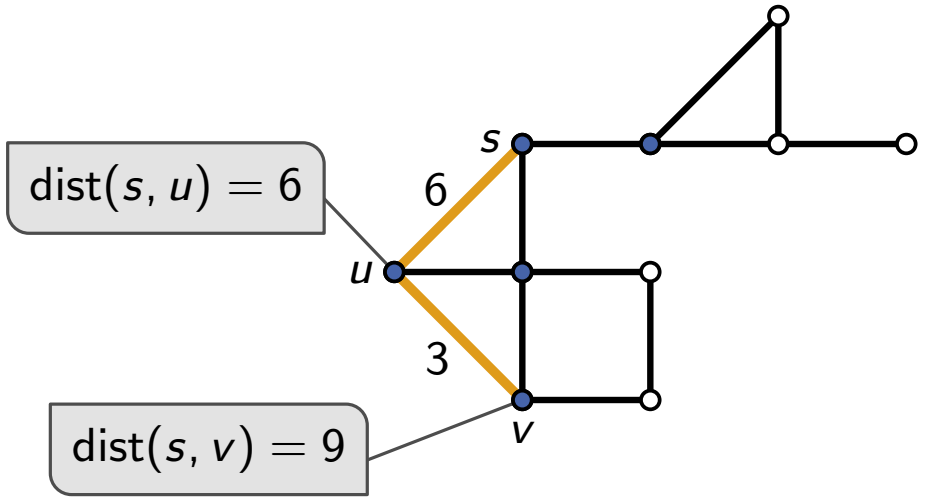
Kürzeste Pfade: v in Layer $i \Rightarrow \mathrm{dist}(s,v) = i$

- sv-Pfad der Länge i ($\mathrm{dist}(s,v) \leq i$)
  - induktiv: es gibt einen Pfad der Länge $i-1$ zu u
  - zusammen mit $\{u,v\} \Rightarrow sv$-Pfad der Länge i
- kein kürzerer Pfad möglich ($\mathrm{dist}(s,v) \geq i$):
  - gäbe es einen kürzeren sv-Pfad, dann hätte v einen Nachbarn in einem vorherigen Layer
  - layerweise Abarbeitung $\Rightarrow$ v wäre schon gefärbt

Erinnerung: BFS

Vorgehen

- arbeite die Knoten layerweise ab
- **Explorieren** eines Knotens u aus Layer $i-1$:
  - betrachte alle Nachbarn v von u
  - v ungefärbt $\Rightarrow$ v gehört zu Layer i



Kürzeste Pfade: v in Layer $i \Rightarrow \text{dist}(s, v) = i$

- sv-Pfad der Länge i ($\text{dist}(s, v) \leq i$)
  - induktiv: es gibt einen Pfad der Länge $i-1$ zu u
  - zusammen mit $\{u, v\} \Rightarrow sv$-Pfad der Länge i
- kein kürzerer Pfad möglich ($\text{dist}(s, v) \geq i$):
  - gäbe es einen kürzeren sv-Pfad, dann hätte v einen Nachbarn in einem vorherigen Layer
  - layerweise Abarbeitung $\Rightarrow$ v wäre schon gefärbt

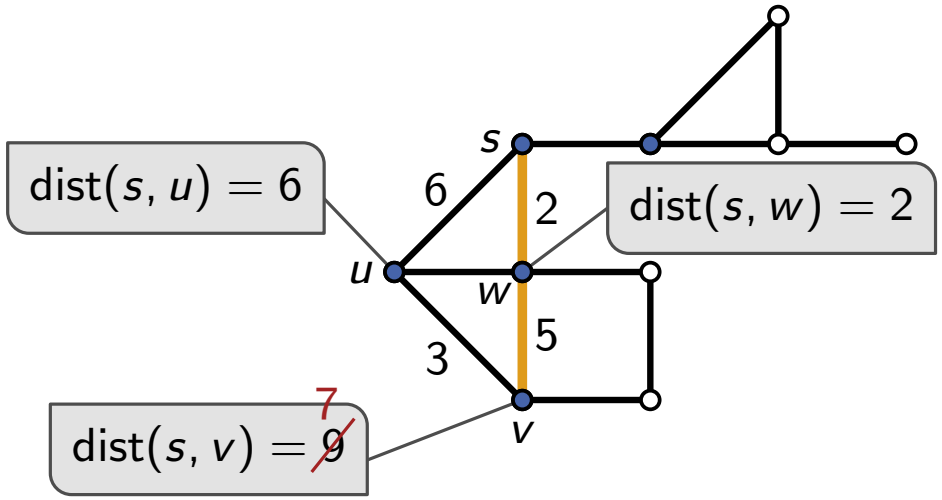
Mit Kantenlängen?

- speichere $\text{dist}(s, v)$ statt Layer
- $\text{dist}(s, u) \leq 6 \Rightarrow \text{dist}(s, v) \leq 9$

Erinnerung: BFS

Vorgehen

- arbeite die Knoten layerweise ab
- **Explorieren** eines Knotens u aus Layer $i-1$:
  - betrachte alle Nachbarn v von u
  - v ungefärbt $\Rightarrow$ v gehört zu Layer i



Kürzeste Pfade: v in Layer $i \Rightarrow \text{dist}(s, v) = i$

- sv-Pfad der Länge i ($\text{dist}(s, v) \leq i$)
  - induktiv: es gibt einen Pfad der Länge $i-1$ zu u
  - zusammen mit $\{u, v\} \Rightarrow sv$-Pfad der Länge i
- kein kürzerer Pfad möglich ($\text{dist}(s, v) \geq i$):
  - gäbe es einen kürzeren sv-Pfad, dann hätte v einen Nachbarn in einem vorherigen Layer
  - layerweise Abarbeitung $\Rightarrow$ v wäre schon gefärbt

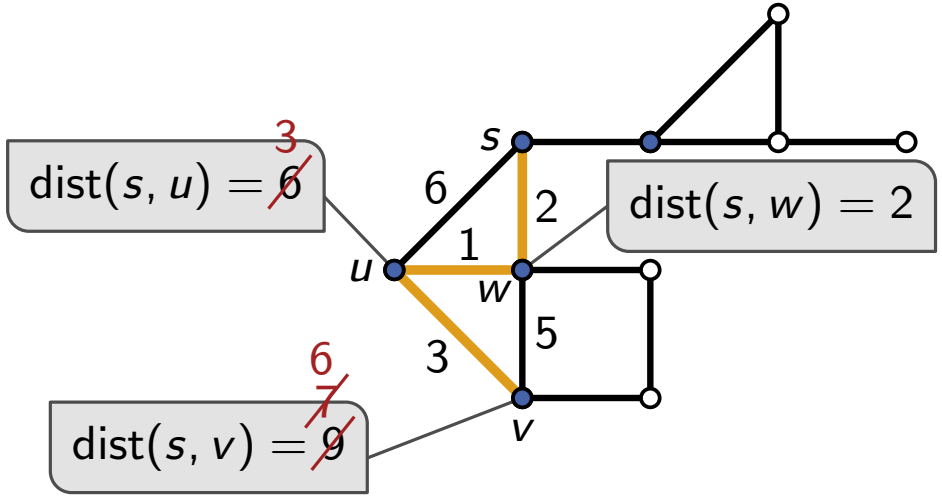
Mit Kantenlängen?

- speichere $\text{dist}(s, v)$ statt Layer
- $\text{dist}(s, u) \leq 6 \Rightarrow \text{dist}(s, v) \leq 9$
- ggf. findet man später einen kürzeren Pfad zu v

Erinnerung: BFS

Vorgehen

- arbeite die Knoten layerweise ab
- **Explorieren** eines Knotens u aus Layer $i-1$:
  - betrachte alle Nachbarn v von u
  - v ungefärbt $\Rightarrow$ v gehört zu Layer i



Kürzeste Pfade: v in Layer $i \Rightarrow \text{dist}(s, v) = i$

- sv-Pfad der Länge i ($\text{dist}(s, v) \leq i$)
  - induktiv: es gibt einen Pfad der Länge $i-1$ zu u
  - zusammen mit $\{u, v\} \Rightarrow sv$-Pfad der Länge i
- kein kürzerer Pfad möglich ($\text{dist}(s, v) \geq i$):
  - gäbe es einen kürzeren sv-Pfad, dann hätte v einen Nachbarn in einem vorherigen Layer
  - layerweise Abarbeitung $\Rightarrow$ v wäre schon gefärbt

Mit Kantenlängen?

- speichere $\text{dist}(s, v)$ statt Layer
- $\text{dist}(s, u) \leq 6 \Rightarrow \text{dist}(s, v) \leq 9$
- ggf. findet man später einen kürzeren Pfad zu v
- oder sogar zu u

Kernproblem beim Umgang mit Kantenlängen

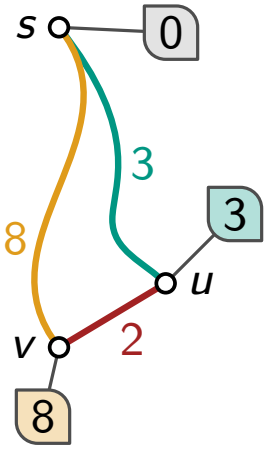
Plan für das generelle Vorgehen

- speichere $d[v]$ für jeden Knoten v: Länge des kürzesten bekannten sv-Pfades (Invariante: $\text{dist}(s, v) \leq d[v]$)

Kernproblem beim Umgang mit Kantenlängen

Plan für das generelle Vorgehen

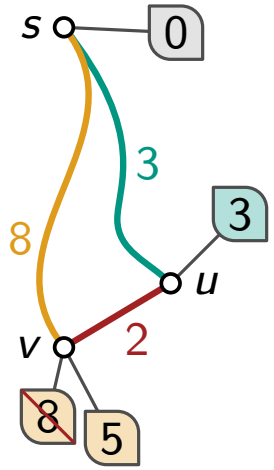
- speichere $d[v]$ für jeden Knoten v: Länge des kürzesten bekannten sv-Pfades (Invariante: $\text{dist}(s, v) \leq d[v]$)
- **Explorieren** eines Knotens u:
  - betrachte alle Nachbarn v von u
  - falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



Kernproblem beim Umgang mit Kantenlängen

Plan für das generelle Vorgehen

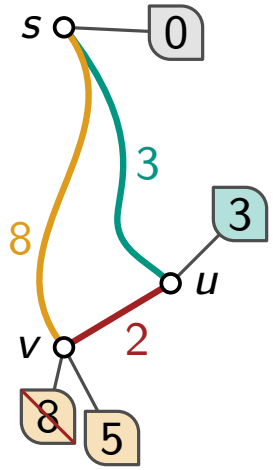
- speichere $d[v]$ für jeden Knoten v: Länge des kürzesten bekannten sv-Pfades (Invariante: $\text{dist}(s, v) \leq d[v]$)
- **Explorieren** eines Knotens u:
  - betrachte alle Nachbarn v von u
  - falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



Kernproblem beim Umgang mit Kantenlängen

Plan für das generelle Vorgehen

- speichere $d[v]$ für jeden Knoten v: Länge des kürzesten bekannten sv-Pfades (Invariante: $\text{dist}(s, v) \leq d[v]$)
- **Explorieren** eines Knotens u:
  - betrachte alle Nachbarn v von u
  - falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



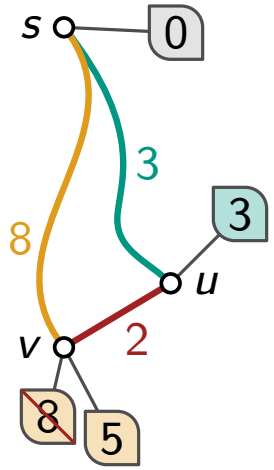
Anders als bei BFS

- v gefunden $\not\Rightarrow$ kürzester sv-Pfad gefunden

Kernproblem beim Umgang mit Kantenlängen

Plan für das generelle Vorgehen

- speichere $d[v]$ für jeden Knoten v: Länge des kürzesten bekannten sv-Pfades (Invariante: $\text{dist}(s, v) \leq d[v]$)
- **Explorieren** eines Knotens u:
  - betrachte alle Nachbarn v von u
  - falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



Anders als bei BFS

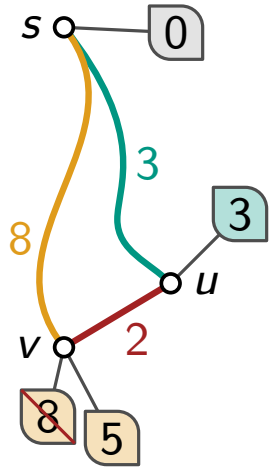
- v gefunden $\not\Rightarrow$ kürzester sv-Pfad gefunden
- $d[v]$ wird ggf. mehrfach aktualisiert

nicht schlimm: keine Zusatzkosten vergleichen mit dem Testen ob v schon gefärbt ist

Kernproblem beim Umgang mit Kantenlängen

Plan für das generelle Vorgehen

- speichere $d[v]$ für jeden Knoten v: Länge des kürzesten bekannten sv-Pfades (Invariante: $\text{dist}(s, v) \leq d[v]$)
- **Explorieren** eines Knotens u:
  - betrachte alle Nachbarn v von u
  - falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



Anders als bei BFS

- v gefunden $\not\Rightarrow$ kürzester sv-Pfad gefunden
- $d[v]$ wird ggf. mehrfach aktualisiert
- v schon exploriert, wenn $d[v]$ sich ändert $\rightarrow$ v muss erneut exploriert werden

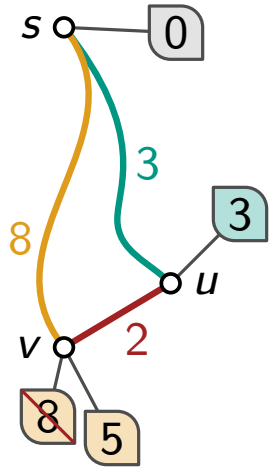
nicht schlimm: keine Zusatzkosten vergleichen mit dem Testen ob v schon gefärbt ist

problematisch: könnte öfters passieren und ggf. kaskadieren

Kernproblem beim Umgang mit Kantenlängen

Plan für das generelle Vorgehen

- speichere $d[v]$ für jeden Knoten v: Länge des kürzesten bekannten sv-Pfades (Invariante: $\text{dist}(s, v) \leq d[v]$)
- **Explorieren** eines Knotens u:
  - betrachte alle Nachbarn v von u
  - falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



Anders als bei BFS

- v gefunden $\not\Rightarrow$ kürzester sv-Pfad gefunden
- $d[v]$ wird ggf. mehrfach aktualisiert
- v schon exploriert, wenn $d[v]$ sich ändert $\rightarrow$ v muss erneut exploriert werden

nicht schlimm: keine Zusatzkosten vergleichen mit dem Testen ob v schon gefärbt ist

problematisch: könnte öfters passieren und ggf. kaskadieren

Ziel im Folgenden

- v exploriert $\Rightarrow$ kürzester sv-Pfad gefunden

super: jeden Knoten einmal explorieren kostet insgesamt $\Theta(m)$ (wie bei BFS)

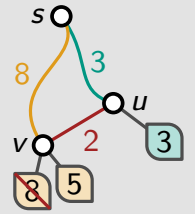
pwa.klicker.uzh.ch/join/algo1

Explorierungsreihenfolge → Dijkstras Algorithmus

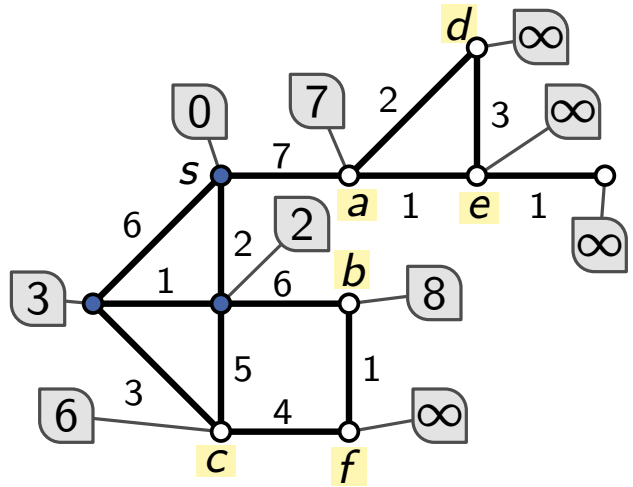
Ziel: v exploriert $\Rightarrow$ kürzester sv-Pfad gefunden

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



Welchen Knoten sollten wir als nächstes explorieren?



- bereits exploriert
- noch nicht exploriert
- X aktueller Wert für $d[\cdot]$

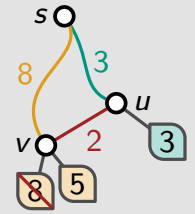
Explorierungsreihenfolge → Dijkstras Algorithmus

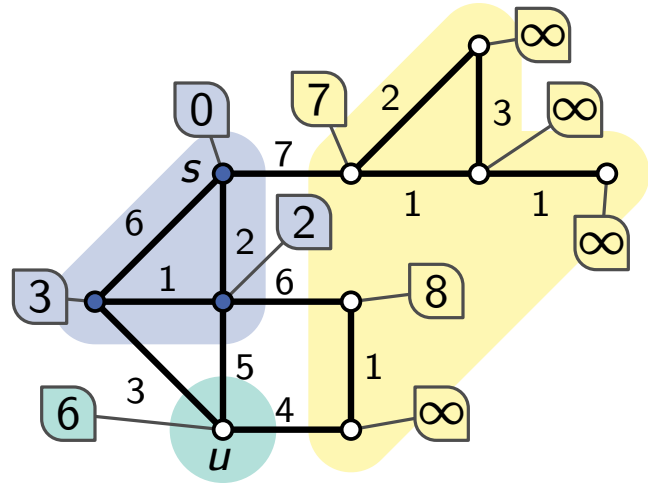
Ziel: v exploriert $\Rightarrow$ kürzester sv-Pfad gefunden

Strategie: exploriere Knoten u mit minimalem $d[u]$
(unter allen noch nicht explorierten Knoten)

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$,
  setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$





- bereits exploriert
- noch nicht exploriert
- X aktueller Wert für $d[\cdot]$

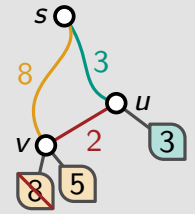
Explorierungsreihenfolge → Dijkstras Algorithmus

Ziel: v exploriert $\Rightarrow$ kürzester sv-Pfad gefunden

Strategie: exploriere Knoten u mit minimalem $d[u]$
(unter allen noch nicht explorierten Knoten)

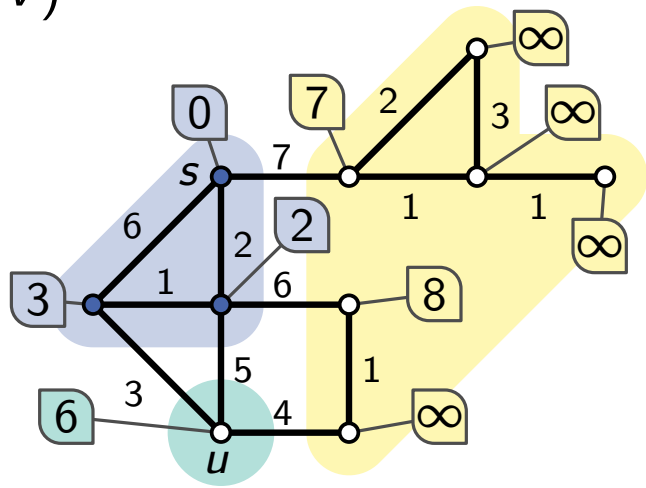
Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$,
  setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



Zielführende Strategie

- Annahme: für alle vorher explorierten Knoten v gilt $d[v] = \text{dist}(s, v)$
- zeige: für u gilt ebenfalls $d[u] = \text{dist}(s, u)$



bereits exploriert
noch nicht exploriert
X aktueller Wert für $d[\cdot]$

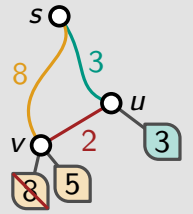
Explorierungsreihenfolge → Dijkstras Algorithmus

Ziel: v exploriert $\Rightarrow$ kürzester sv-Pfad gefunden

Strategie: exploriere Knoten u mit minimalem $d[u]$
(unter allen noch nicht explorierten Knoten)

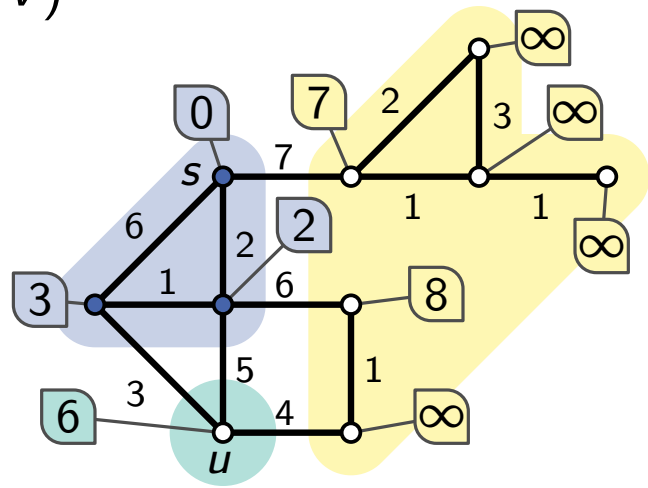
Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$,
  setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



Zielführende Strategie

- Annahme: für alle vorher explorierten Knoten v gilt $d[v] = \text{dist}(s, v)$
- zeige: für u gilt ebenfalls $d[u] = \text{dist}(s, u)$
- Intuition:
  - su-Pfad über v mit $d[v] < d[u]$ schon gefunden (v exploriert)
  - Knoten w mit $d[w] > d[u]$ explorieren kann $d[u]$ nicht senken



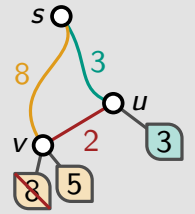
bereits exploriert
noch nicht exploriert
X aktueller Wert für $d[\cdot]$

Explorierungsreihenfolge → Dijkstras Algorithmus

Ziel: v exploriert $\Rightarrow$ kürzester sv-Pfad gefunden

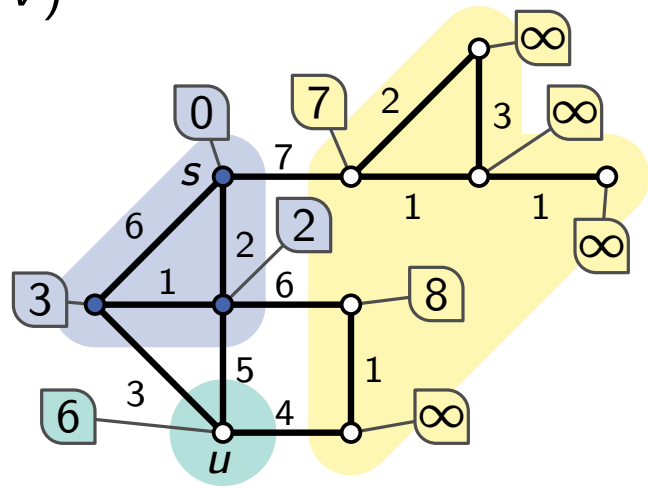
Strategie: exploriere Knoten u mit minimalem $d[u]$
(unter allen noch nicht explorierten Knoten)

Erinnerung: Explorieren von u
- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



Zielführende Strategie

- Annahme: für alle vorher explorierten Knoten v gilt $d[v] = \text{dist}(s, v)$
- zeige: für u gilt ebenfalls $d[u] = \text{dist}(s, u)$
- Intuition:
  - su-Pfad über v mit $d[v] < d[u]$ schon gefunden (v exploriert)
  - Knoten w mit $d[w] > d[u]$ explorieren kann $d[u]$ nicht senken
- **Achtung:** wir nehmen hier nicht-negative Kantenlängen an



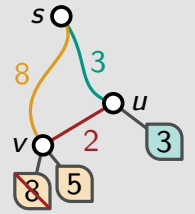
bereits exploriert
noch nicht exploriert
X aktueller Wert für $d[\cdot]$

Explorierungsreihenfolge → Dijkstras Algorithmus

Ziel: v exploriert $\Rightarrow$ kürzester sv-Pfad gefunden

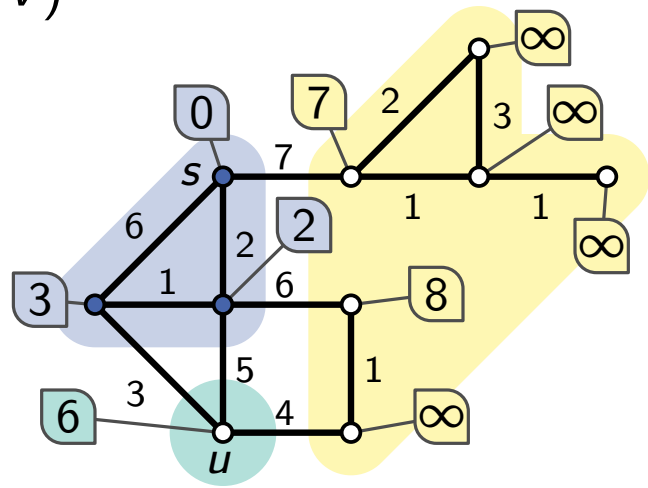
Strategie: exploriere Knoten u mit minimalem $d[u]$
(unter allen noch nicht explorierten Knoten)

Erinnerung: Explorieren von u
- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



Zielführende Strategie

- Annahme: für alle vorher explorierten Knoten v gilt $d[v] = \text{dist}(s, v)$
- zeige: für u gilt ebenfalls $d[u] = \text{dist}(s, u)$
- Intuition:
  - su-Pfad über v mit $d[v] < d[u]$ schon gefunden (v exploriert)
  - Knoten w mit $d[w] > d[u]$ explorieren kann $d[u]$ nicht senken
- **Achtung:** wir nehmen hier nicht-negative Kantenlängen an



Gleich

- Wrap-Up: Algo-Beschreibung, Umsetzung in Pseudocode, Beispiel
- formaler Korrektheitsbeweis

bereits exploriert
noch nicht exploriert
X aktueller Wert für $d[\cdot]$

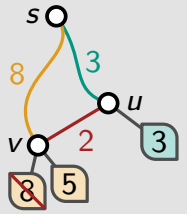
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



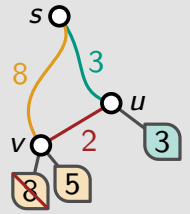
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



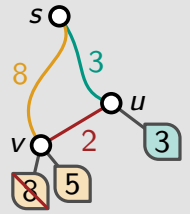
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

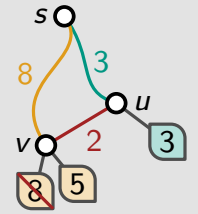
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

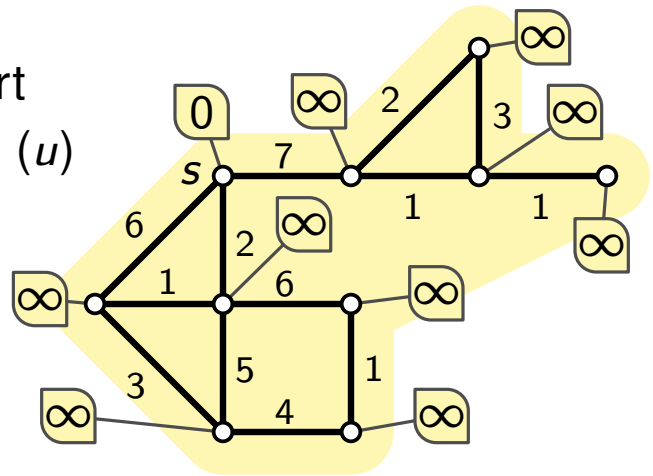
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
X $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

$d :=$ *Array* of size n initialized with ∞
$d[s] := 0$
while there is an unexplored node **do**
  Node $u :=$ unexp. node with min. $d[u]$
  for *Node* v in $N(u)$ **do**
    if $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$ **then**
      $d[v] := d[u] + \text{len}(u, v)$

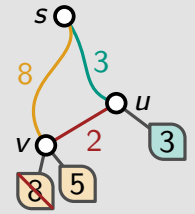
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

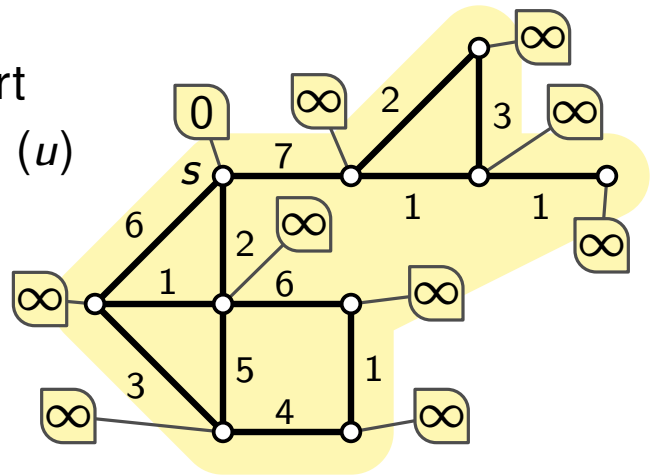
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
X $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

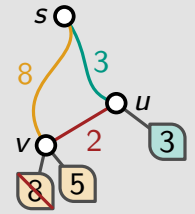
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

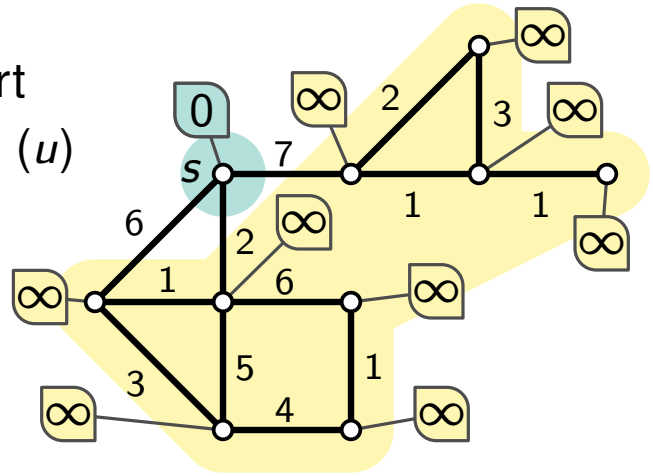
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

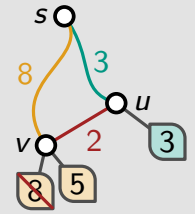
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

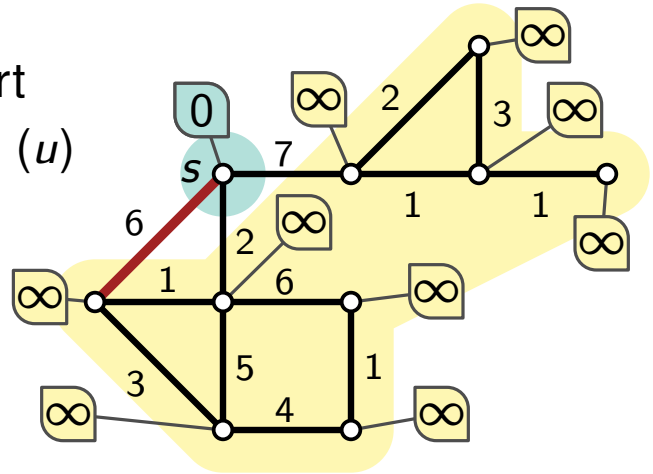
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
X $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

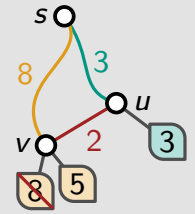
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

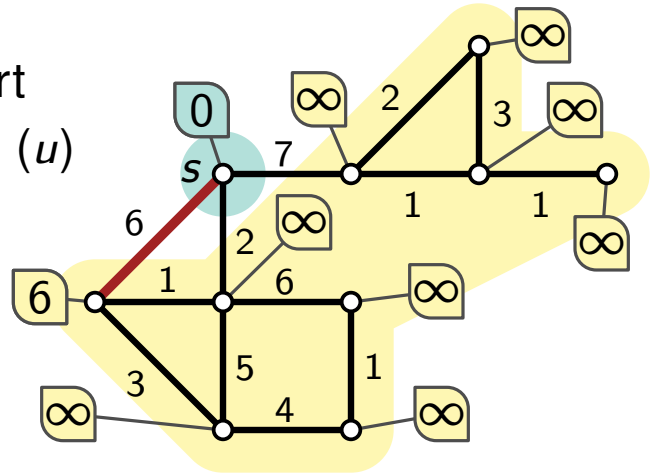
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

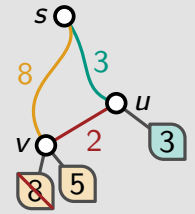
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

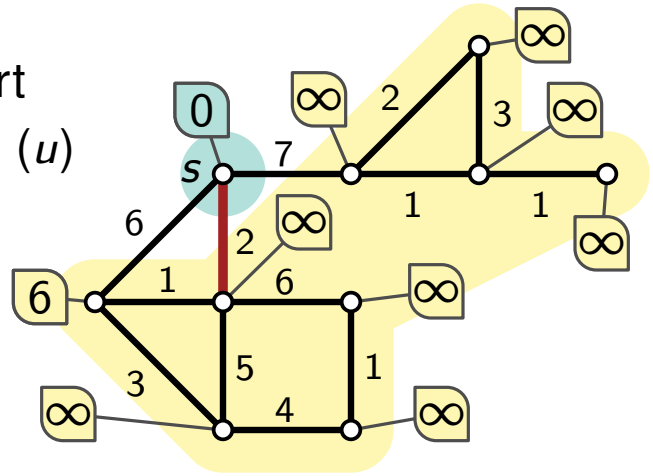
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
$d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

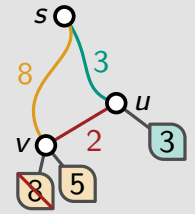
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

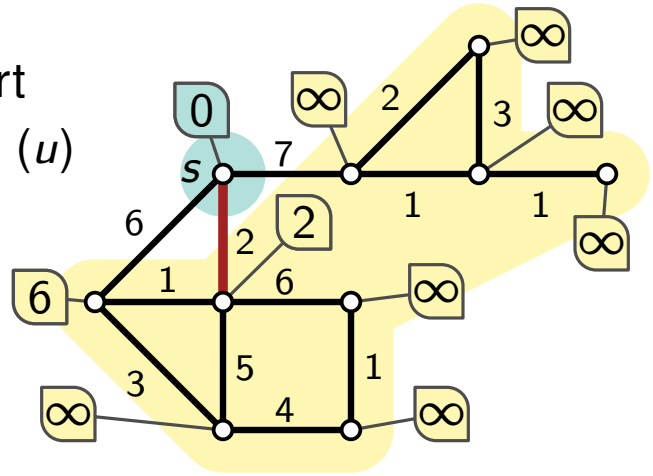
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

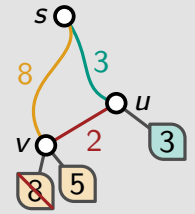
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

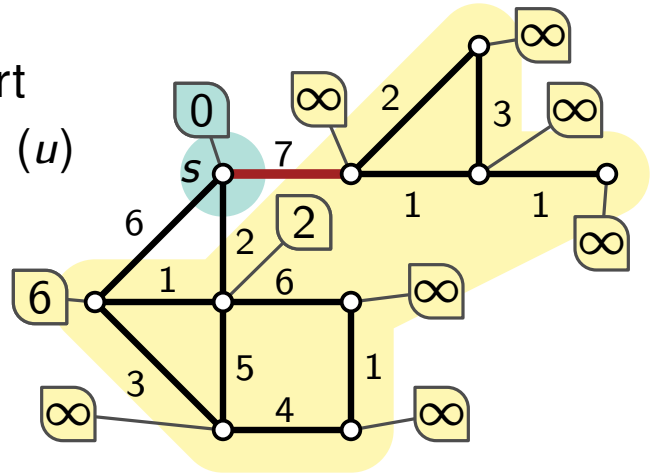
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

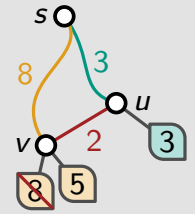
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

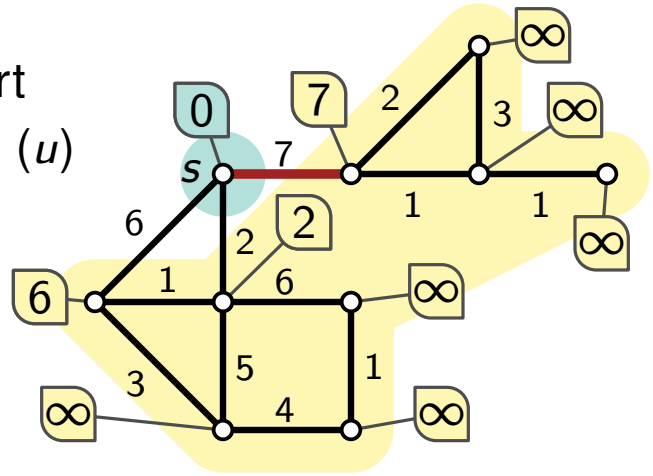
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

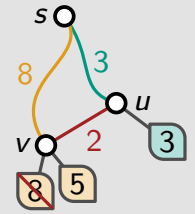
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

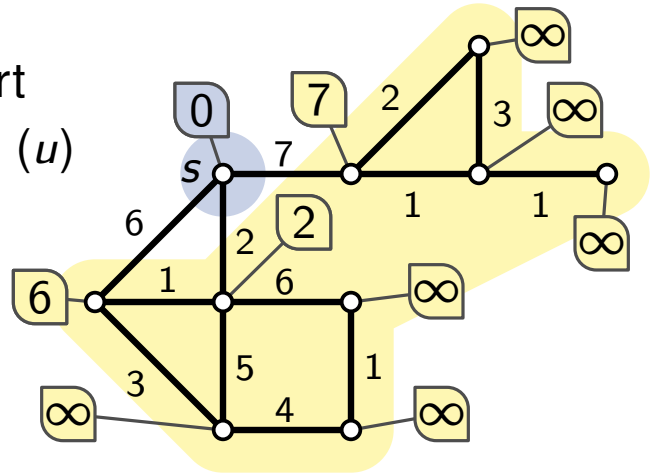
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

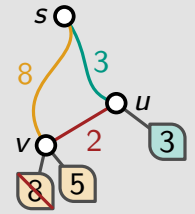
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

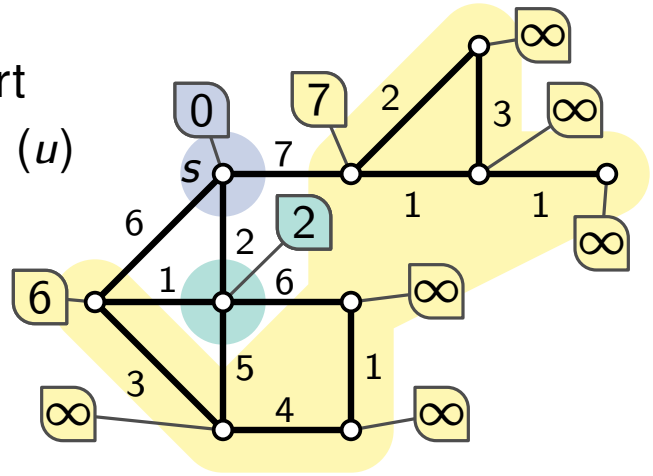
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

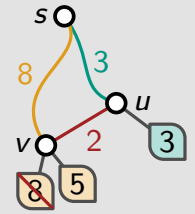
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

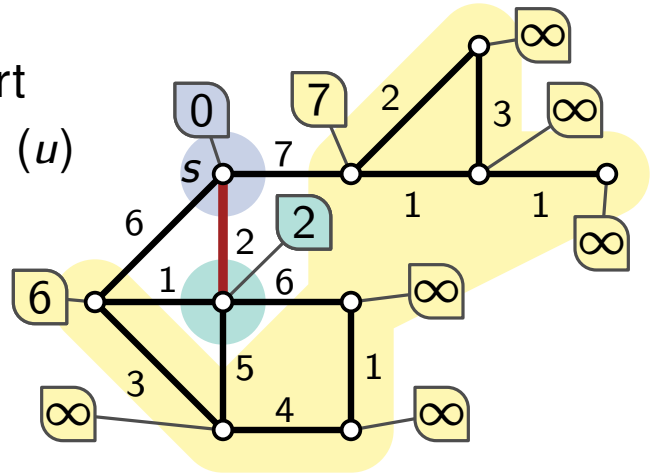
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

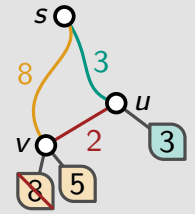
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

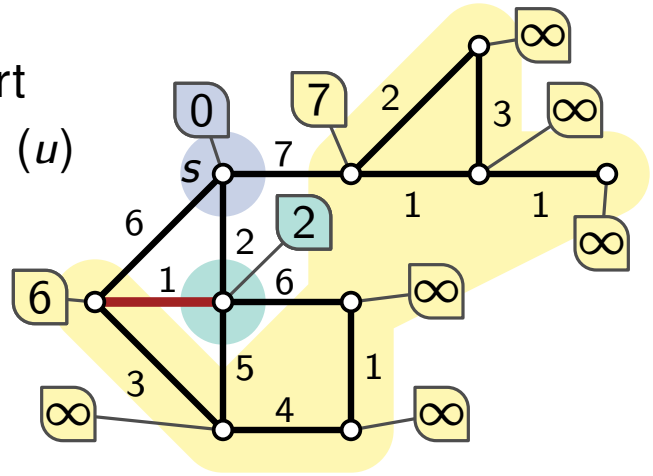
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

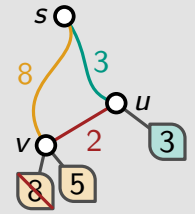
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

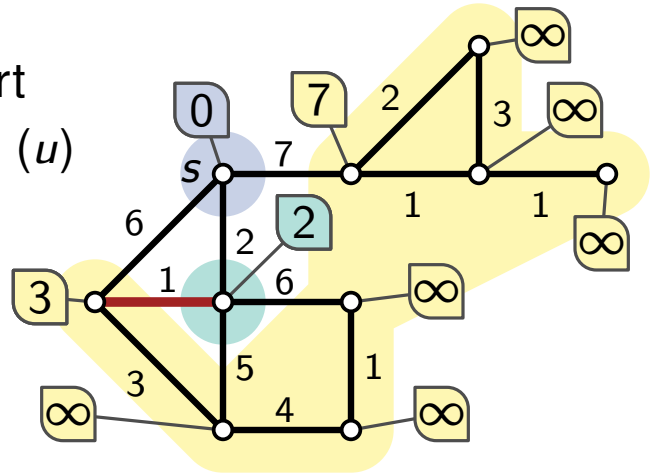
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

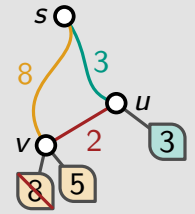
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

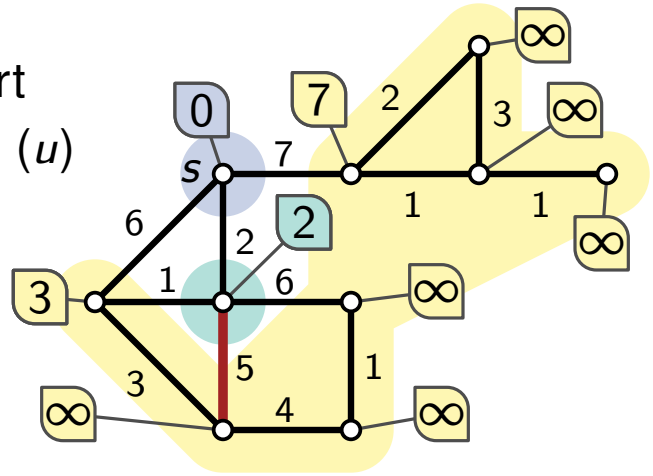
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

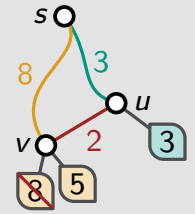
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

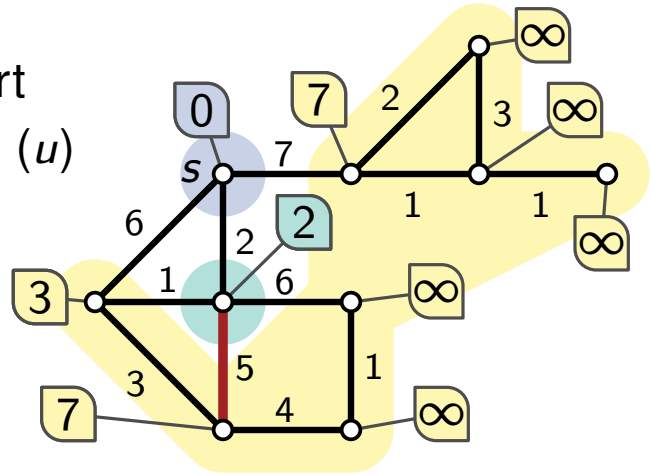
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

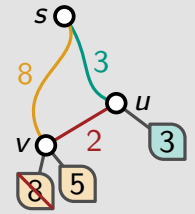
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

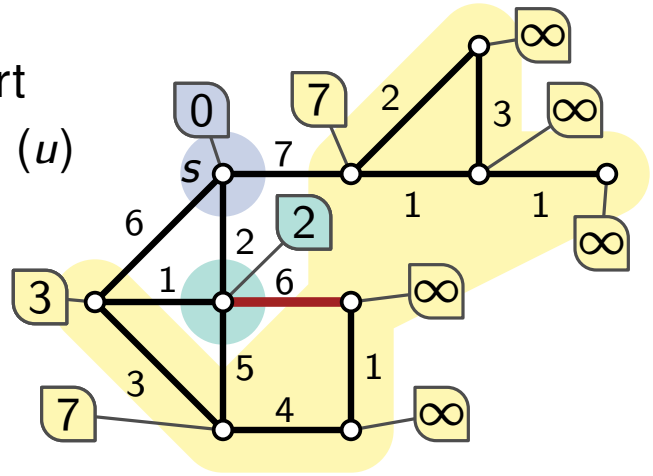
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

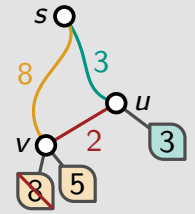
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

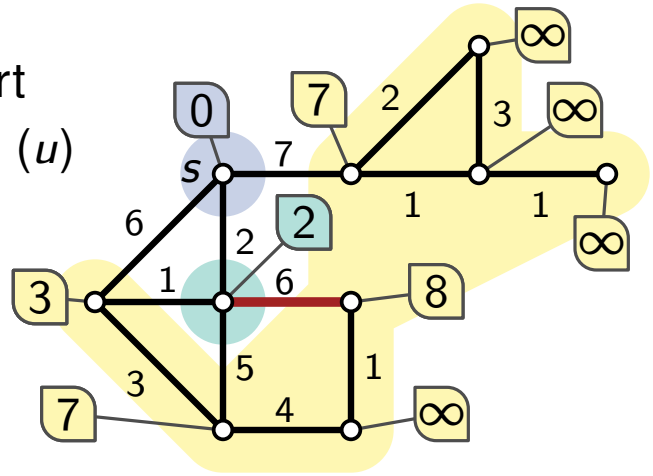
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

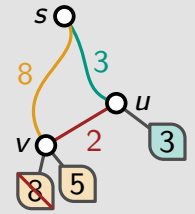
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

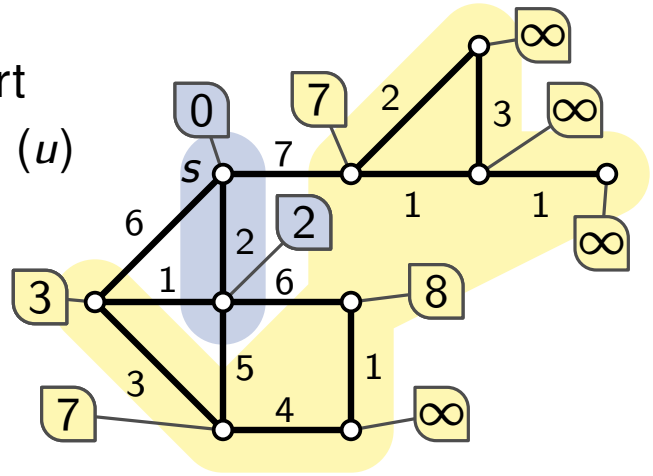
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

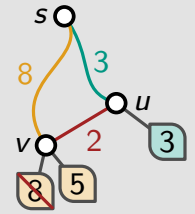
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

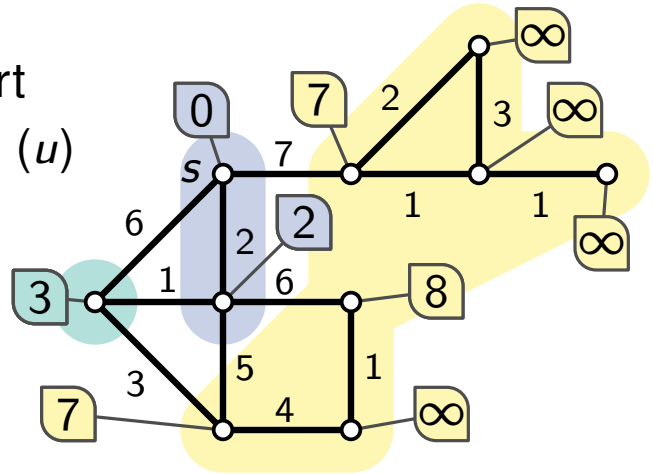
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

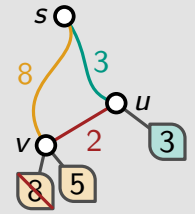
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

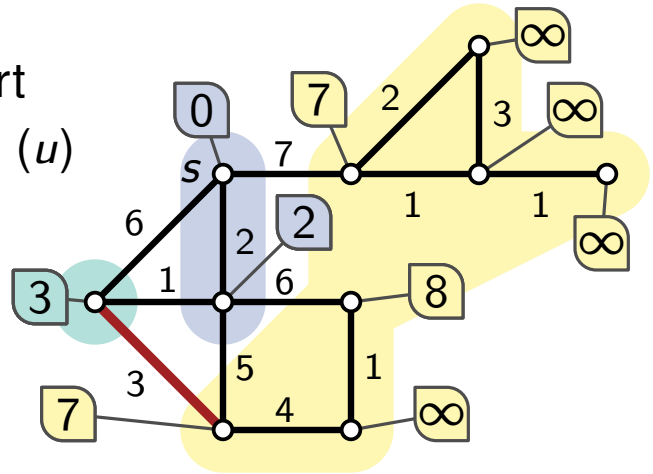
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

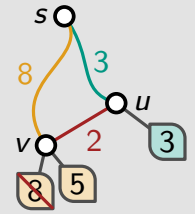
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

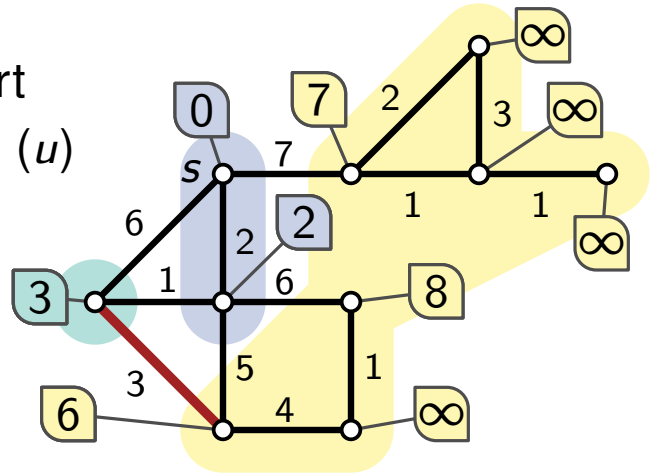
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

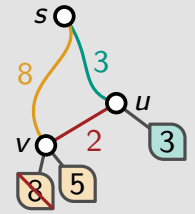
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

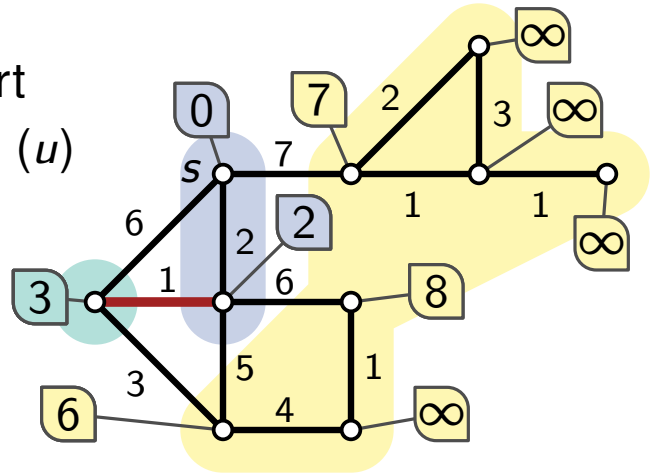
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

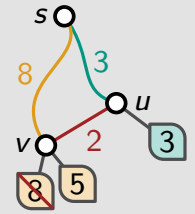
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

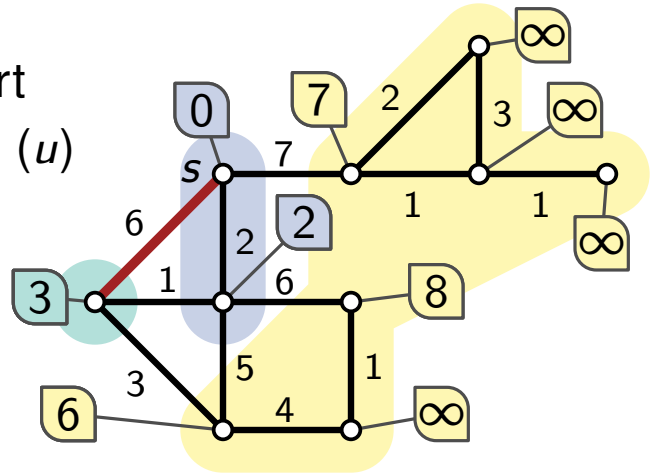
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

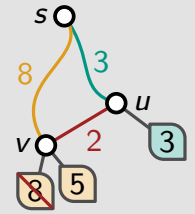
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

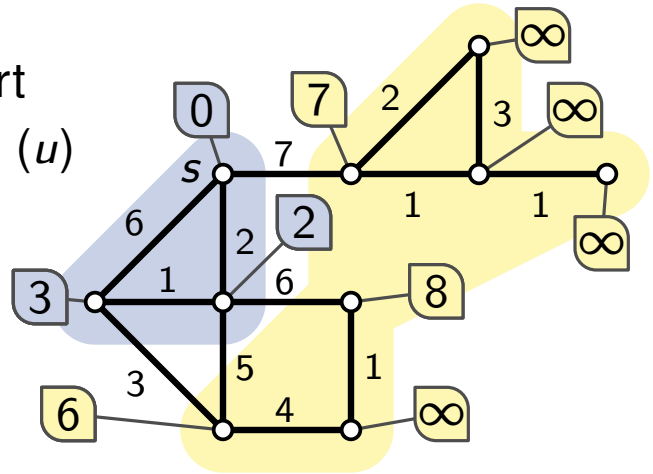
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

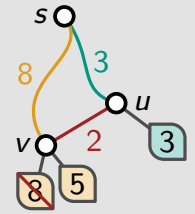
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

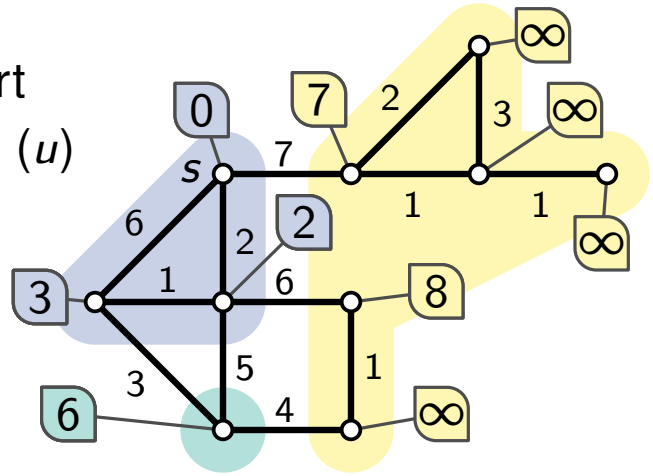
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

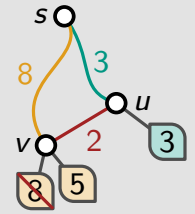
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

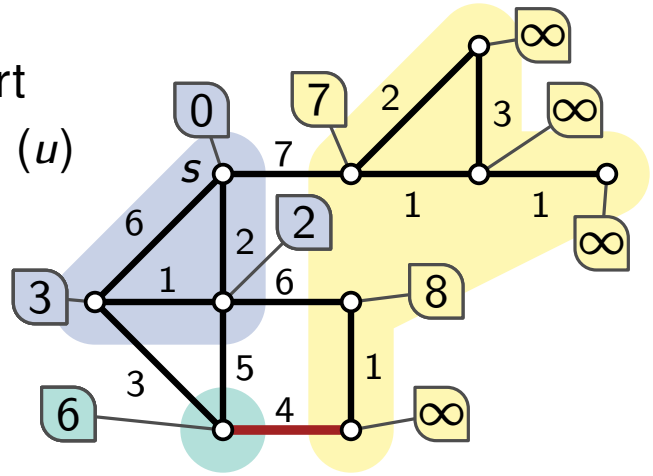
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

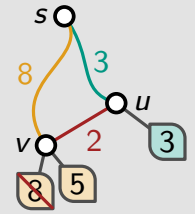
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

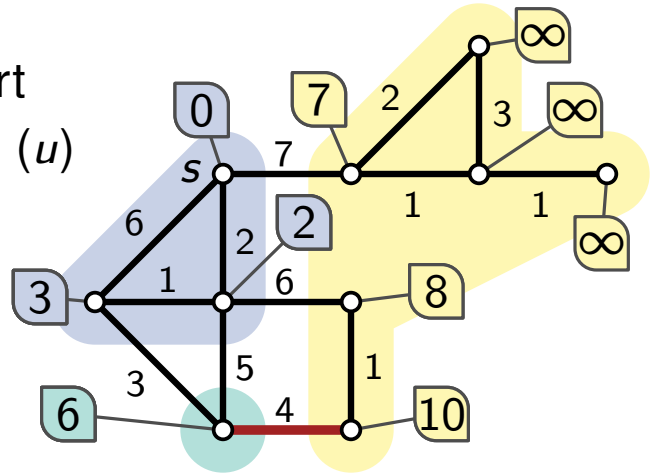
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

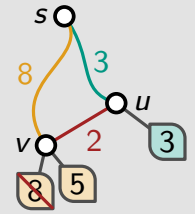
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

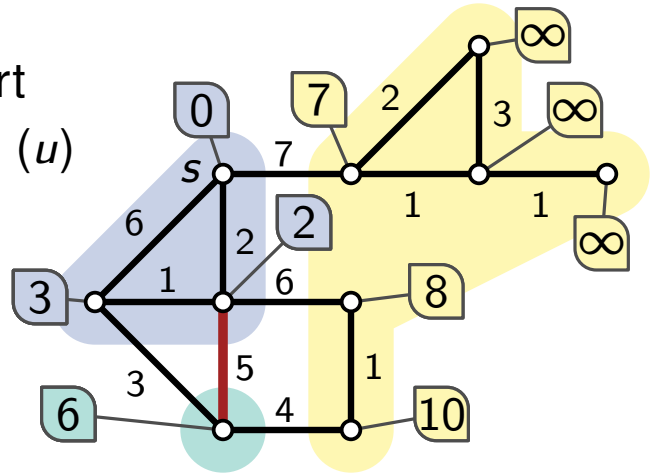
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

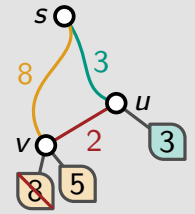
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

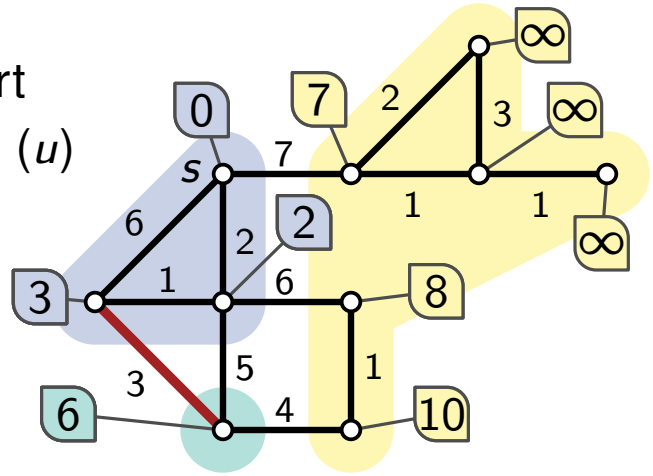
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

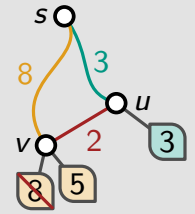
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

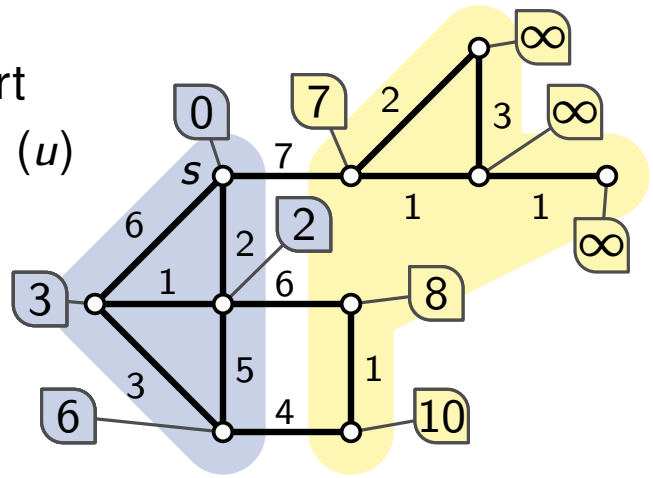
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

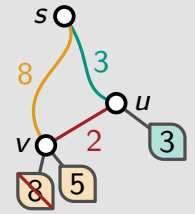
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

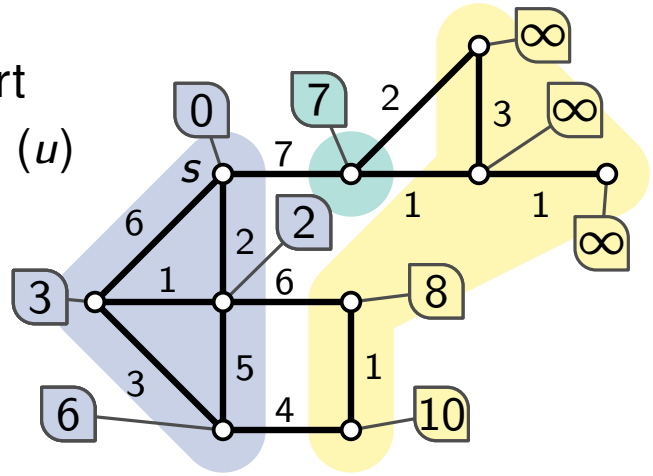
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

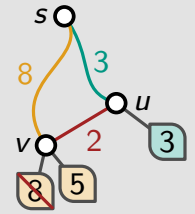
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

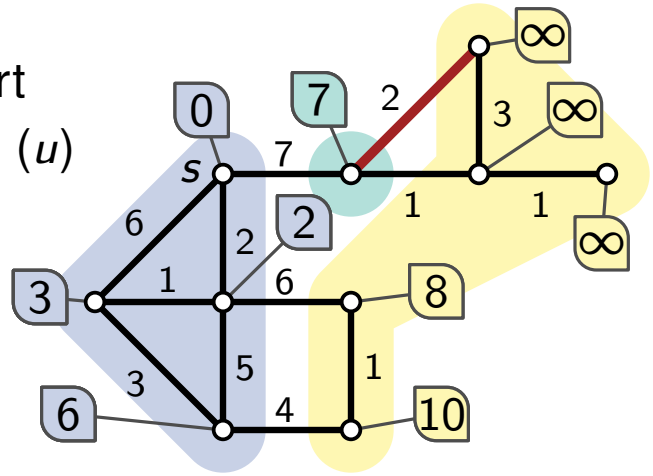
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

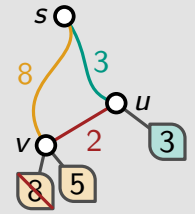
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

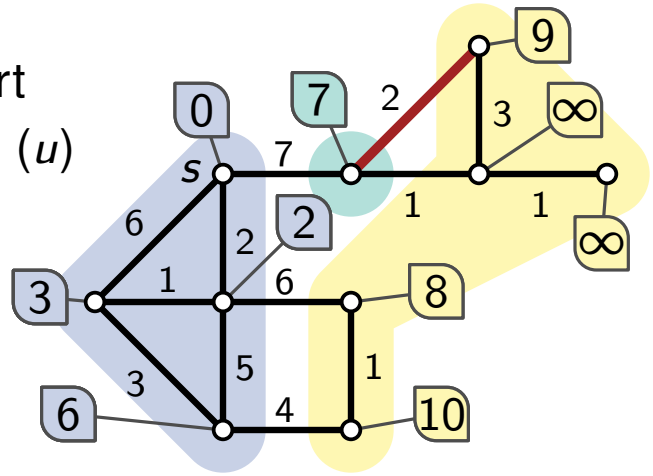
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

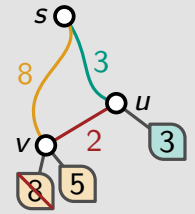
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

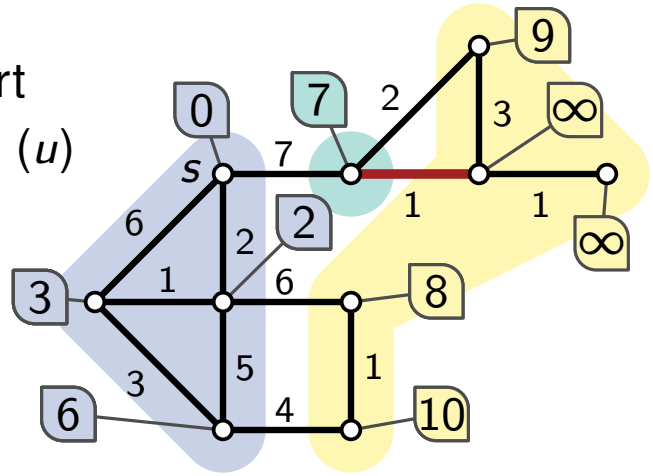
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

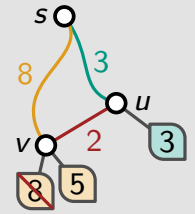
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

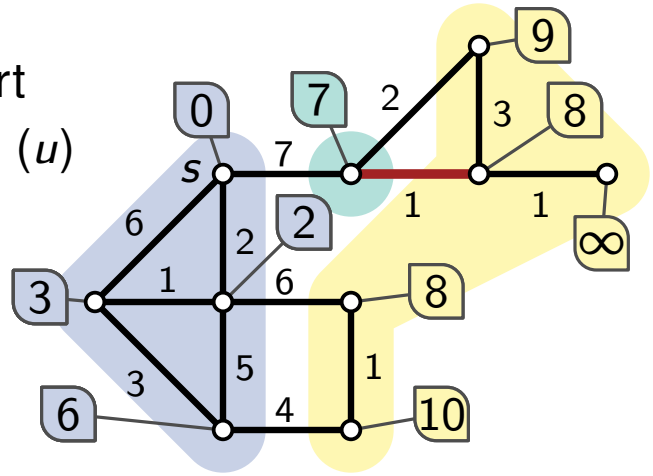
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

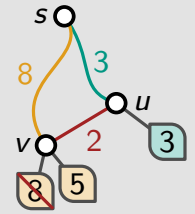
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

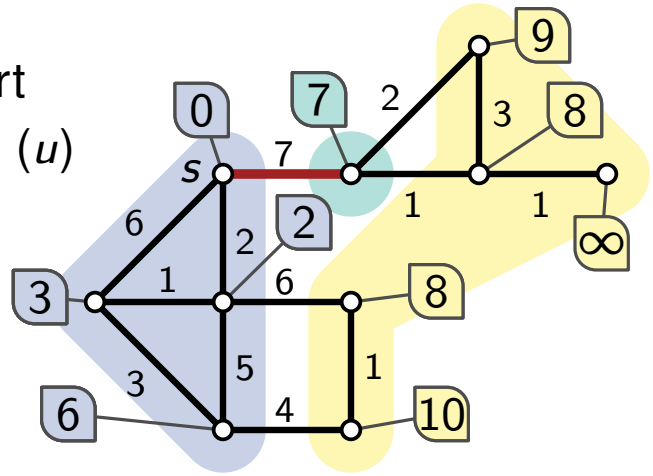
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

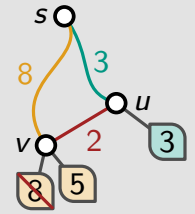
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

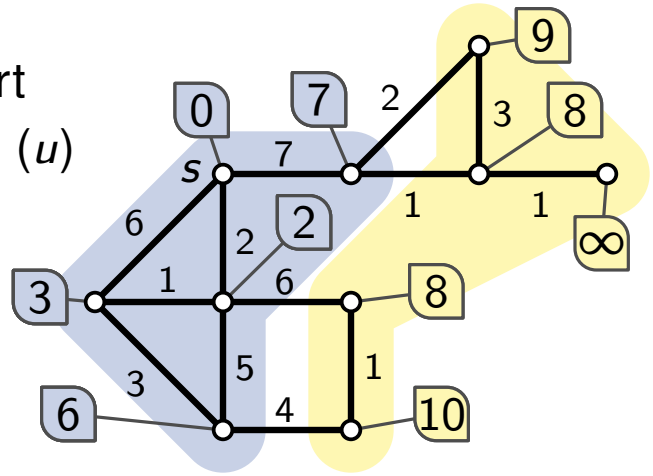
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

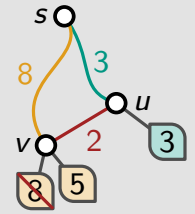
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

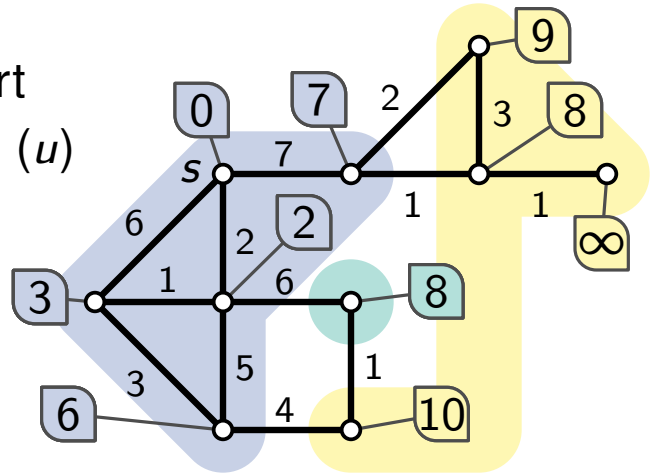
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

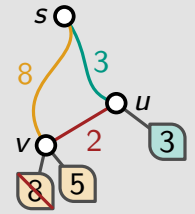
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

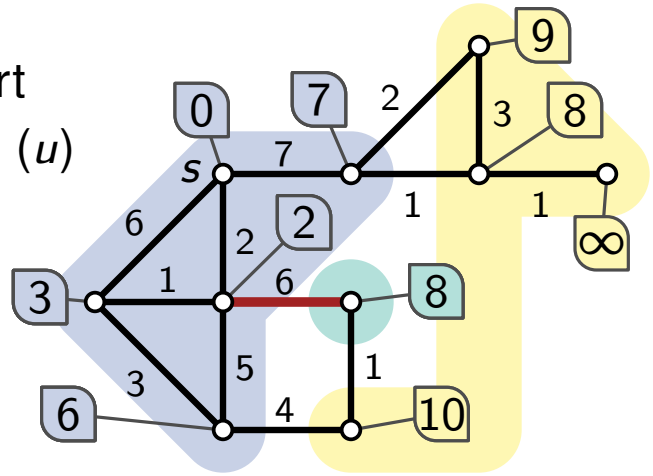
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

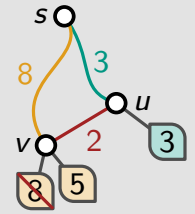
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

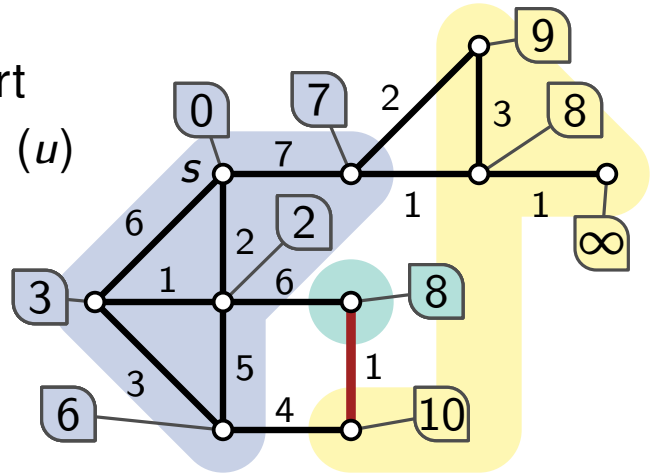
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

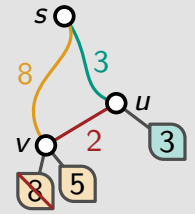
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

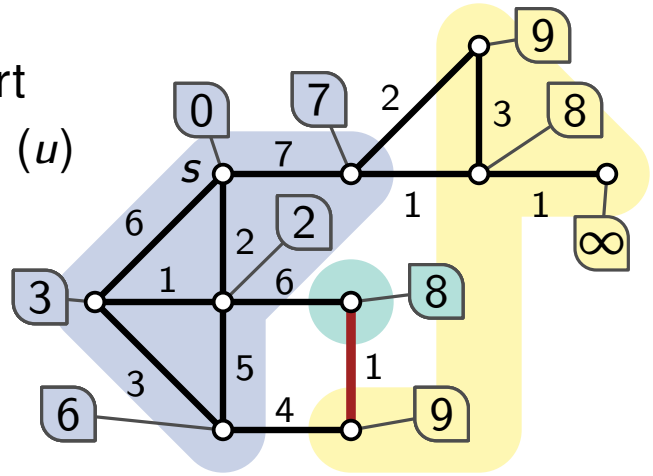
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

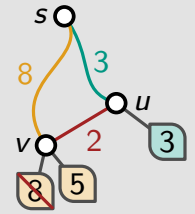
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

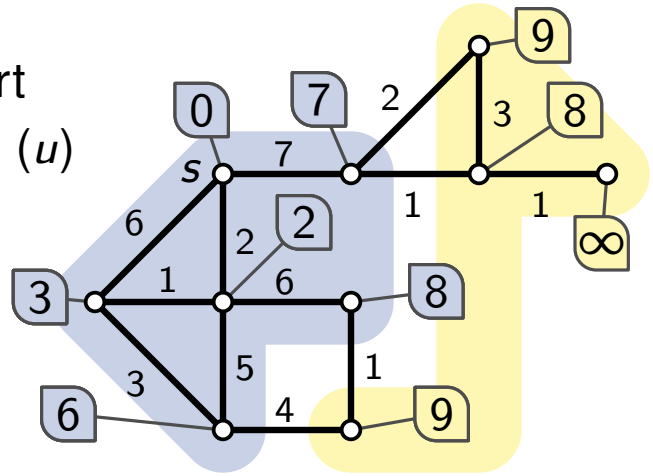
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

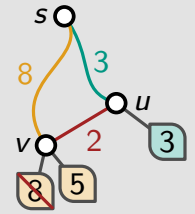
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

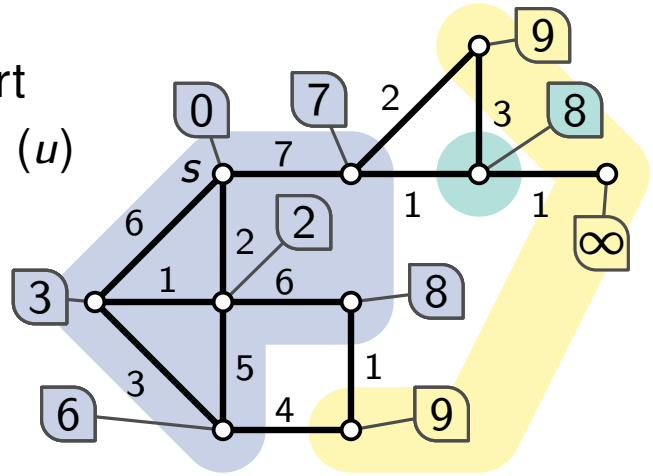
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

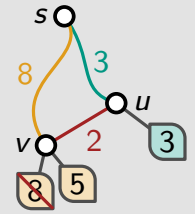
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

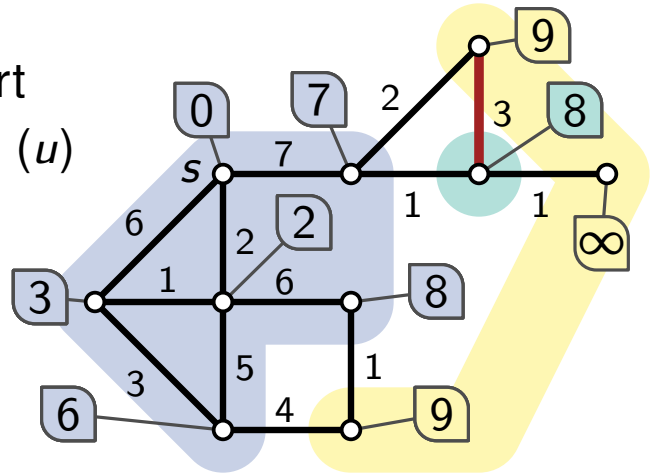
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

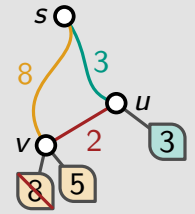
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

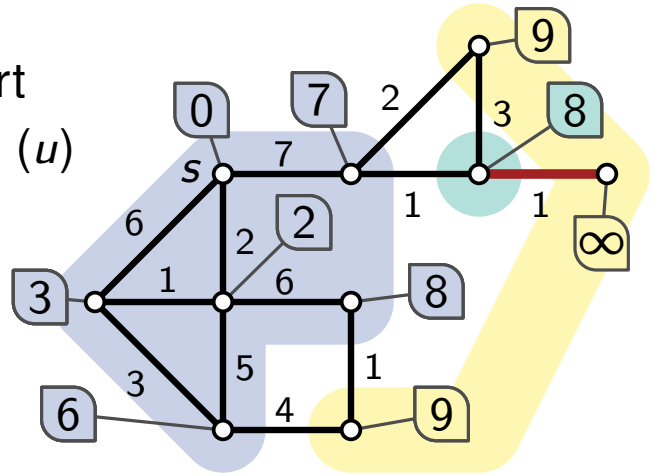
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

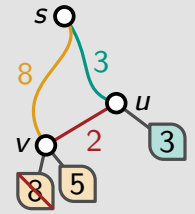
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

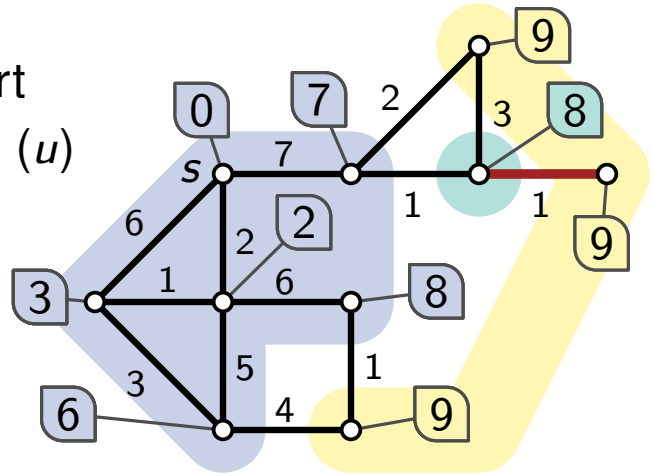
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

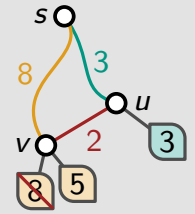
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

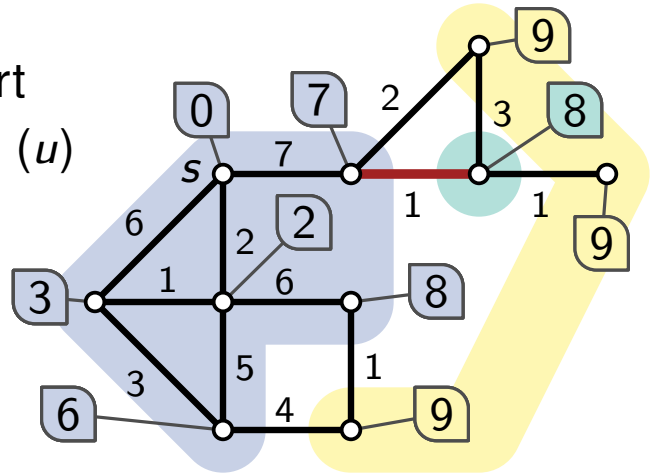
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

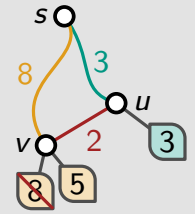
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

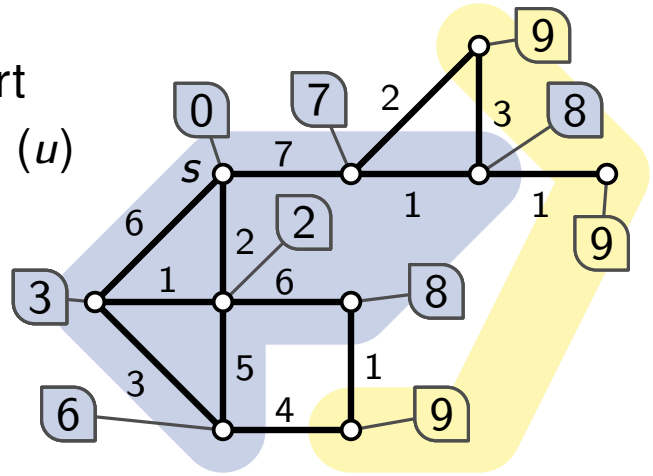
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

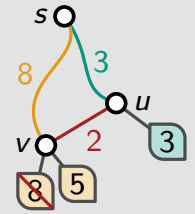
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

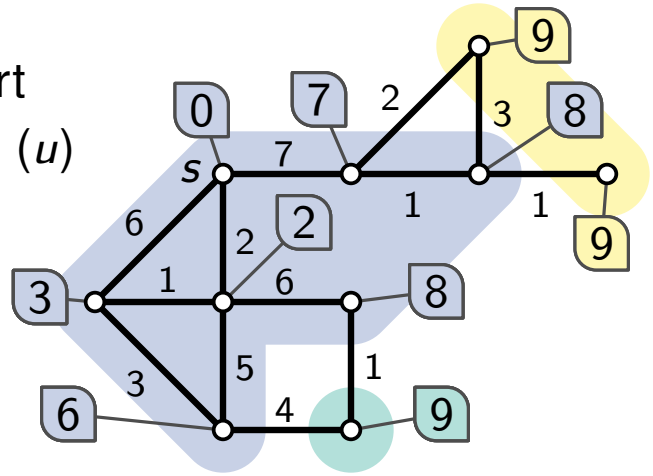
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

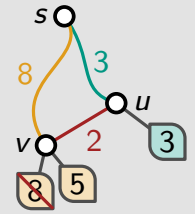
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

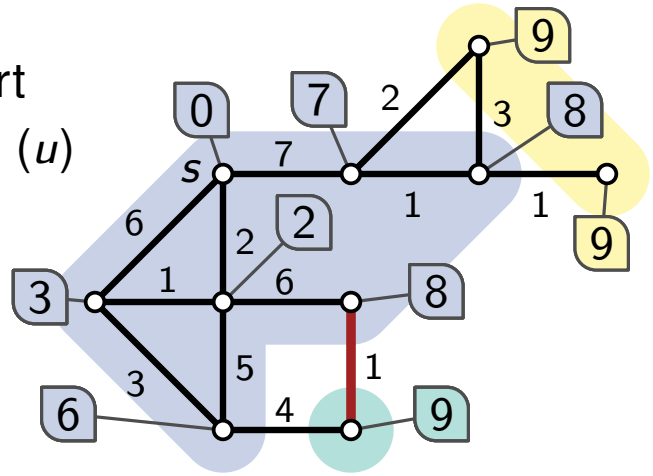
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

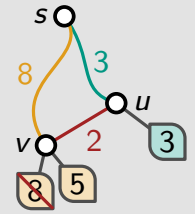
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

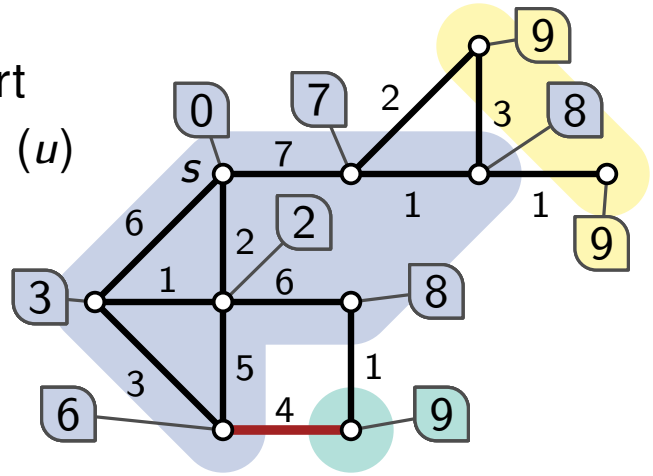
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

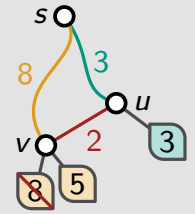
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

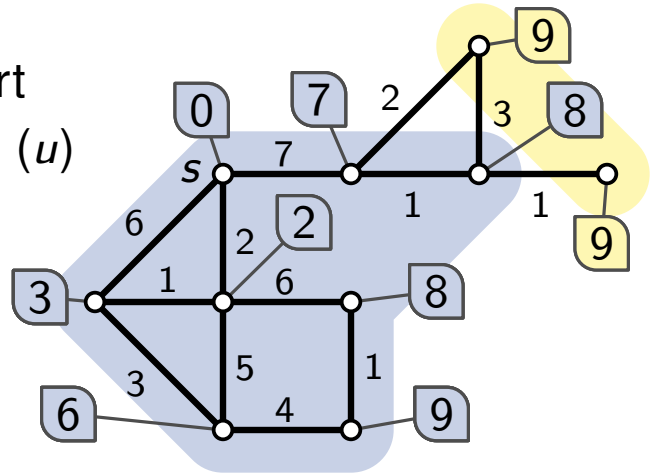
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

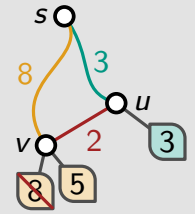
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

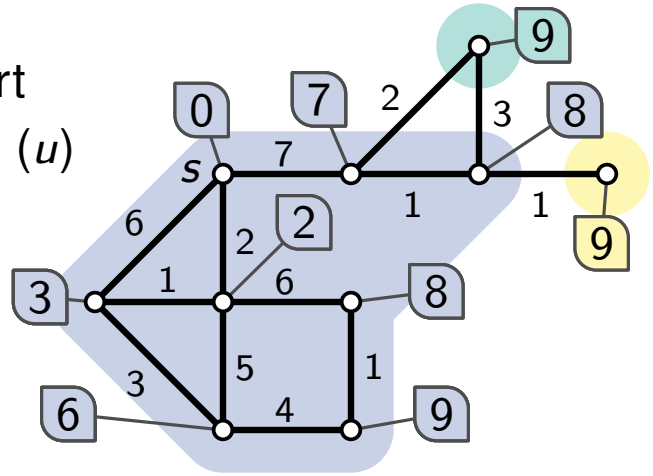
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

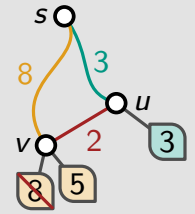
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

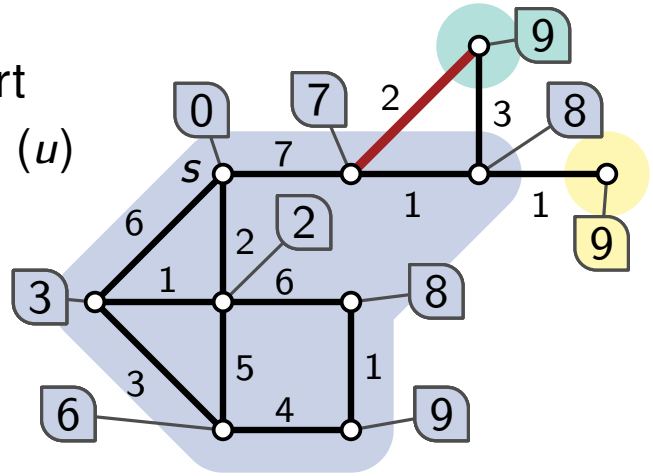
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

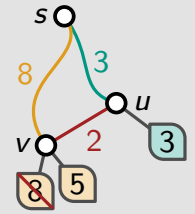
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

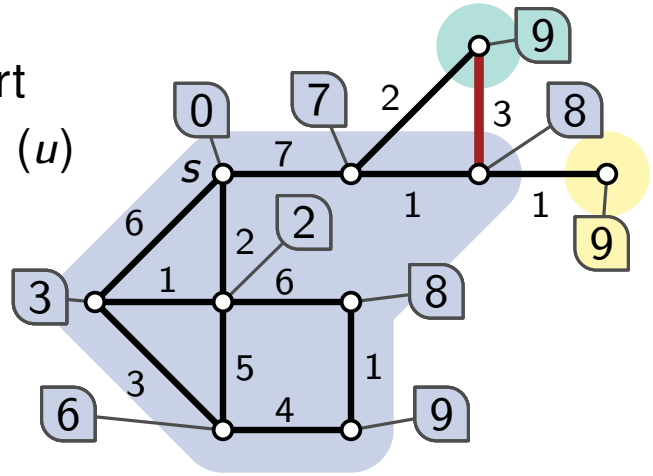
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

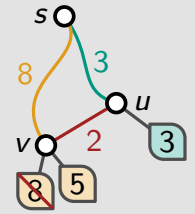
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

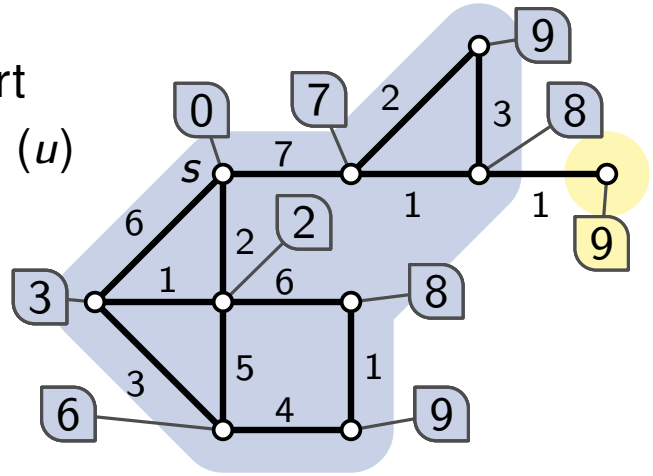
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

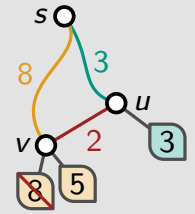
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

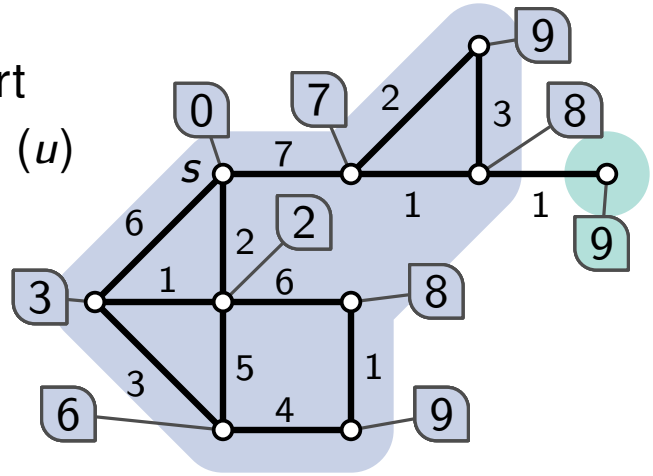
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

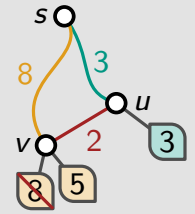
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

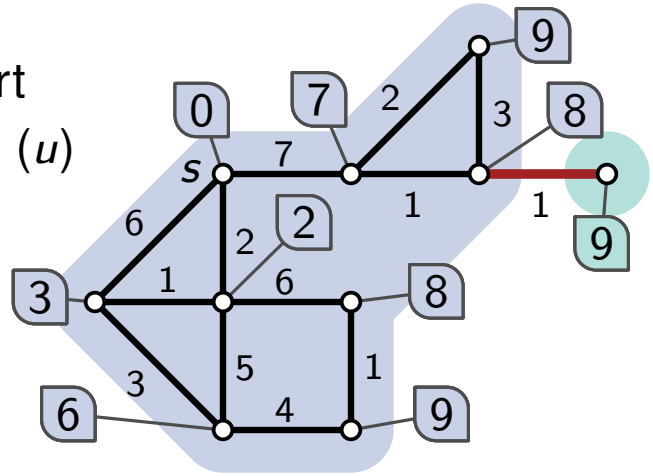
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

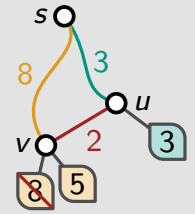
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

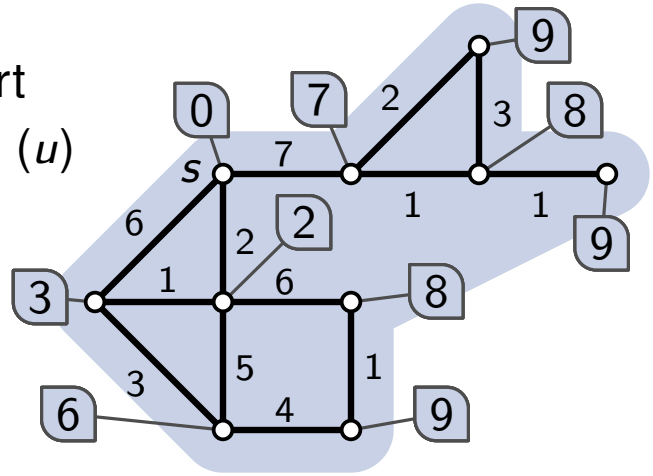
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

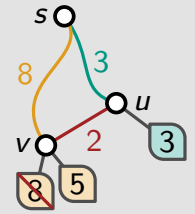
Dijkstras Algorithmus

Algorithmus

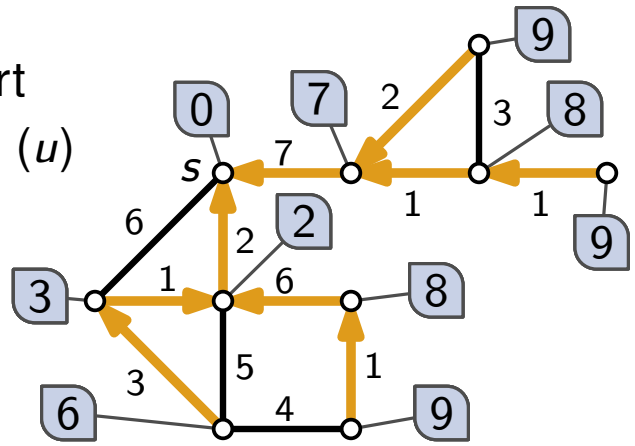
- wiederhole bis alle Knoten exploriert:
  - wähle unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
  - exploriere u
- Initialisierung: $d[v] = \infty$ für $v \in V$ und $d[s] = 0$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



schon exploriert
am explorieren (u)
unexploriert
x $d[\cdot]$



Konstruktion der kürzesten Pfade (wie bei BFS)

- jeder Knoten merkt sich seinen Vorgänger

Dijkstra(*Graph* G, *Node* s)

```
d := Array of size n initialized with ∞
d[s] := 0
while there is an unexplored node do
    Node u := unexp. node with min. d[u]
    for Node v in N(u) do
        if d[v] > d[u] + len(u, v) then
            d[v] := d[u] + len(u, v)
```

Ausblick: Priority-Queue

Wie finden wir den unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$?

- naiv: einmal alle Knoten anschauen $\rightarrow \Theta(n)$ pro Iteration $\rightarrow \Theta(n^2)$ insgesamt

Ausblick: Priority-Queue

Wie finden wir den unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$?

- naiv: einmal alle Knoten anschauen $\rightarrow \Theta(n)$ pro Iteration $\rightarrow \Theta(n^2)$ insgesamt
- Datenstruktur: Priority-Queue (Prioritätswarteschlange)
  - **push**$(v, 7)$: füge v mit Priorität 7 ein
  - **popMin**$()$: extrahiere Element mit kleinster Priorität
  - **decPrio**$(v, 4)$: verkleinere Priorität von v auf 4

Ausblick: Priority-Queue

Wie finden wir den unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$?

- naiv: einmal alle Knoten anschauen $\rightarrow \Theta(n)$ pro Iteration $\rightarrow \Theta(n^2)$ insgesamt
- Datenstruktur: Priority-Queue (Prioritätswarteschlange)
  - **push**$(v, 7)$: füge v mit Priorität 7 ein
  - **popMin**$()$: extrahiere Element mit kleinster Priorität
  - **decPrio**$(v, 4)$: verkleinere Priorität von v auf 4

Wie schnell gehen die Operationen?

- unterschiedliche Varianten mit unterschiedlichen Laufzeiten
- viele schnelle Varianten: $O(\log n)$ pro Operation
- Fibonacci-Heap: $\Theta(\log n)$ für **popMin**, $\Theta(1)$ für **push** und **decPrio**

Ausblick: Priority-Queue

Wie finden wir den unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$?

- naiv: einmal alle Knoten anschauen $\rightarrow \Theta(n)$ pro Iteration $\rightarrow \Theta(n^2)$ insgesamt
- Datenstruktur: Priority-Queue (Prioritätswarteschlange)
  - **push**$(v, 7)$: füge v mit Priorität 7 ein
  - **popMin**$()$: extrahiere Element mit kleinster Priorität
  - **decPrio**$(v, 4)$: verkleinere Priorität von v auf 4

Wie schnell gehen die Operationen?

- unterschiedliche Varianten mit unterschiedlichen Laufzeiten
- viele schnelle Varianten: $O(\log n)$ pro Operation
- Fibonacci-Heap: $\Theta(\log n)$ für **popMin**, $\Theta(1)$ für **push** und **decPrio**

Wie geht das?

- clevere Verwaltung der Elemente in einer Baumstruktur
- werden wir bald genauer kennen lernen

Dijkstras Algorithmus mit Priority-Queue

```
Dijkstra(Graph G, Node s)
    d := Array of size n initialized with ∞
    d[s] := 0
    PriorityQueue Q := empty priority queue
    for Node v in V do
        Q.push(v, d[v])
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.popMin()
        for Node v in N(u) do
            if d[v] > d[u] + len(u, v) then
                d[v] := d[u] + len(u, v)
                Q.decPrio(v, d[v])
```

Änderungen im Vergleich zu vorher:

neu: Initialisierung der Queue

konkreter: Test auf unexplorierte Knoten

konkreter: finde Knoten mit minimalem $d[u]$

neu: Update der Priorität in der Queue

Dijkstras Algorithmus mit Priority-Queue

```
Dijkstra(Graph G, Node s)
    d := Array of size n initialized with ∞
    d[s] := 0
    PriorityQueue Q := empty priority queue
    for Node v in V do
        Q.push(v, d[v])
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.popMin()
        for Node v in N(u) do
            if d[v] > d[u] + len(u, v) then
                d[v] := d[u] + len(u, v)
                Q.decPrio(v, d[v])
```

Anmerkung

- man könnte die Knoten auch beim ersten Entdecken erst in die Queue einfügen
- dann muss man sich merken, welche schon eingefügt sind (ähnlich zu BFS)

Dijkstras Algorithmus mit Priority-Queue

```
Dijkstra(Graph G, Node s)
    d := Array of size n initialized with ∞
    d[s] := 0
    PriorityQueue Q := empty priority queue
    for Node v in V do
        Q.push(v, d[v])
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.popMin()
        for Node v in N(u) do
            if d[v] > d[u] + len(u, v) then
                d[v] := d[u] + len(u, v)
                Q.decPrio(v, d[v])
```

Anmerkung

- man könnte die Knoten auch beim ersten Entdecken erst in die Queue einfügen
- dann muss man sich merken, welche schon eingefügt sind (ähnlich zu BFS)

Laufzeitanalyse

- n Mal **push**

Dijkstras Algorithmus mit Priority-Queue

```
Dijkstra(Graph G, Node s)
    d := Array of size n initialized with ∞
    d[s] := 0
    PriorityQueue Q := empty priority queue
    for Node v in V do
        Q.push(v, d[v])
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.popMin()
        for Node v in N(u) do
            if d[v] > d[u] + len(u, v) then
                d[v] := d[u] + len(u, v)
                Q.decPrio(v, d[v])
```

Anmerkung

- man könnte die Knoten auch beim ersten Entdecken erst in die Queue einfügen
- dann muss man sich merken, welche schon eingefügt sind (ähnlich zu BFS)

Laufzeitanalyse

- n Mal **push**
- jeder Knoten wird nur einmal aus der Queue entfernt $\Rightarrow$ n Mal **popMin**

Dijkstras Algorithmus mit Priority-Queue

```
Dijkstra(Graph G, Node s)
    d := Array of size n initialized with ∞
    d[s] := 0
    PriorityQueue Q := empty priority queue
    for Node v in V do
        Q.push(v, d[v])
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.popMin()
        for Node v in N(u) do
            if d[v] > d[u] + len(u, v) then
                d[v] := d[u] + len(u, v)
                Q.decPrio(v, d[v])
```

Anmerkung

- man könnte die Knoten auch beim ersten Entdecken erst in die Queue einfügen
- dann muss man sich merken, welche schon eingefügt sind (ähnlich zu BFS)

Laufzeitanalyse

- n Mal **push**
- jeder Knoten wird nur einmal aus der Queue entfernt $\Rightarrow$ n Mal **popMin**
- jede Kante nur zweimal betrachtet (einmal von jeder Seite) $\Rightarrow$ m Mal **decPrio**

Dijkstras Algorithmus mit Priority-Queue

```
Dijkstra(Graph G, Node s)
    d := Array of size n initialized with ∞
    d[s] := 0
    PriorityQueue Q := empty priority queue
    for Node v in V do
        Q.push(v, d[v])
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.popMin()
        for Node v in N(u) do
            if d[v] > d[u] + len(u, v) then
                d[v] := d[u] + len(u, v)
                Q.decPrio(v, d[v])
```

Anmerkung

- man könnte die Knoten auch beim ersten Entdecken erst in die Queue einfügen
- dann muss man sich merken, welche schon eingefügt sind (ähnlich zu BFS)

Laufzeitanalyse

- n Mal **push**
- jeder Knoten wird nur einmal aus der Queue entfernt $\Rightarrow$ n Mal **popMin**
- jede Kante nur zweimal betrachtet (einmal von jeder Seite) $\Rightarrow$ m Mal **decPrio**
- $\Theta(n \log n + m)$, wenn **decPrio** in $\Theta(1)$
- $\Theta((n+m) \log n)$, wenn **decPrio** in $\Theta(\log n)$

Korrektheit: Überblick

Theorem
Gegeben einen Graphen $G = (V, E)$, Kantenlängen $\text{len}\colon E \to \mathbb{N}$ und $s \in V$, dann berechnet Dijkstras Algorithmus in $\Theta(n \log n + m)$ Zeit die Distanzen $\text{dist}(s, v)$ für alle $v \in V$.

Anmerkung: die Kantenlängen sind hier nicht-negativ

Korrektheit: Überblick

Theorem
Gegeben einen Graphen $G = (V, E)$, Kantenlängen $\text{len}\colon E \to \mathbb{N}$ und $s \in V$, dann berechnet Dijkstras Algorithmus in $\Theta(n \log n + m)$ Zeit die Distanzen $\text{dist}(s, v)$ für alle $v \in V$.

Anmerkung: die Kantenlängen sind hier nicht-negativ

Beweis

- Laufzeit: gerade gesehen

Korrektheit: Überblick

Theorem
Gegeben einen Graphen $G = (V, E)$, Kantenlängen $\text{len}\colon E \to \mathbb{N}$ und $s \in V$, dann berechnet Dijkstras Algorithmus in $\Theta(n \log n + m)$ Zeit die Distanzen $\text{dist}(s, v)$ für alle $v \in V$.

Anmerkung: die Kantenlängen sind hier nicht-negativ

Beweis

- Laufzeit: gerade gesehen
- Korrektheit: zeige die folgenden zwei Lemmas

Lemma (der Algo behauptet nicht Pfade zu kennen, die es gar nicht gibt)
Wenn $d[v] < \infty$, dann gibt es einen sv-Pfad der Länge $d[v]$. Das heißt $d[v] \geq \text{dist}(s, v)$ gilt zu jedem Zeitpunkt.

Lemma (der Algo findet tatsächlich den kürzesten Pfad)
In dem Moment, in dem u aus der Queue entfernt und exploriert wird gilt $d[u] = \text{dist}(s, u)$.

Korrektheit: Algo kennt nur existiernede Pfade

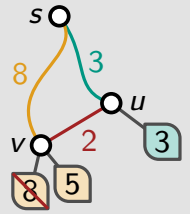
Lemma (der Algo behauptet nicht Pfade zu kennen, die es gar nicht gibt)
Wenn $d[v] < \infty$, dann gibt es einen sv-Pfad der Länge $d[v]$. Das heißt $d[v] \geq \text{dist}(s, v)$ gilt zu jedem Zeitpunkt.

Mehr oder weniger offensichtlich

- Invariante gilt am Anfang
- bleibt beim Explorieren eines Knotens erhalten

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



Korrektheit: Algo kennt nur existiernede Pfade

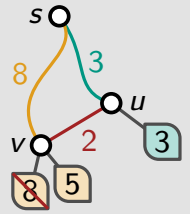
Lemma (der Algo behauptet nicht Pfade zu kennen, die es gar nicht gibt)
Wenn $d[v] < \infty$, dann gibt es einen sv-Pfad der Länge $d[v]$. Das heißt $d[v] \geq \text{dist}(s, v)$ gilt zu jedem Zeitpunkt.

Mehr oder weniger offensichtlich

- Invariante gilt am Anfang
- bleibt beim Explorieren eines Knotens erhalten

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



Beweis im Detail

- Invariante gilt nach der Initialisierung: $d[s] = 0$ und $d[v] = \infty$ für alle $v \in V \setminus \{s\}$
- $d[v]$ kann nur durch das Explorieren eines Nachbarn u geändert werden
  - da Invariante vorher galt: es gibt su-Pfad der Länge $d[u]$
  - Invariante bleibt erhalten: es gibt sv-Pfad der Länge $d[u] + \text{len}(u, v)$

Korrektheit: Algo findet kürzesten Pfad

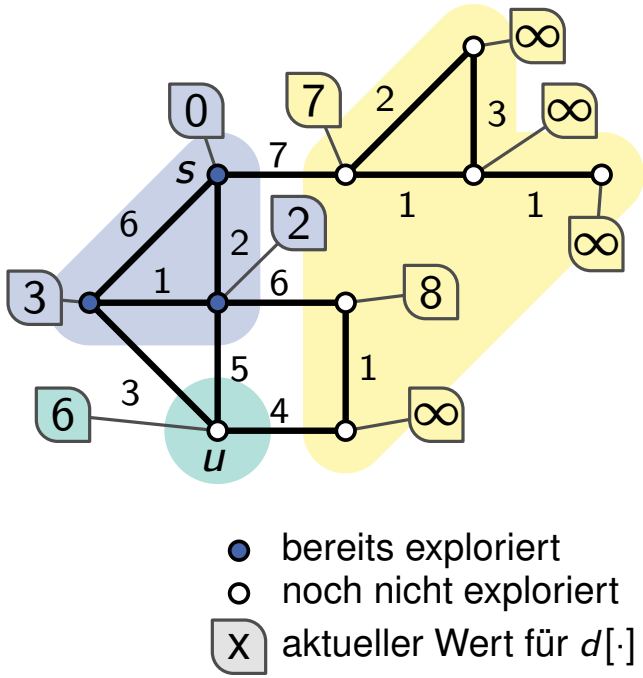
Lemma (der Algo findet tatsächlich den kürzesten Pfad)
In dem Moment, in dem u aus der Queue entfernt und exploriert wird gilt $d[u] = \text{dist}(s, u)$.

Korrektheit: Algo findet kürzesten Pfad

Lemma (der Algo findet tatsächlich den kürzesten Pfad)
In dem Moment, in dem u aus der Queue entfernt und exploriert wird gilt $d[u] = \text{dist}(s, u)$.

Intuition

- Erinnerung: wir explorieren immer den unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
- su-Pfad über v mit $d[v] < d[u]$ schon gefunden (v exploriert)
- Knoten w mit $d[w] > d[u]$ explorieren kann $d[u]$ nicht senken



Korrektheit: Algo findet kürzesten Pfad

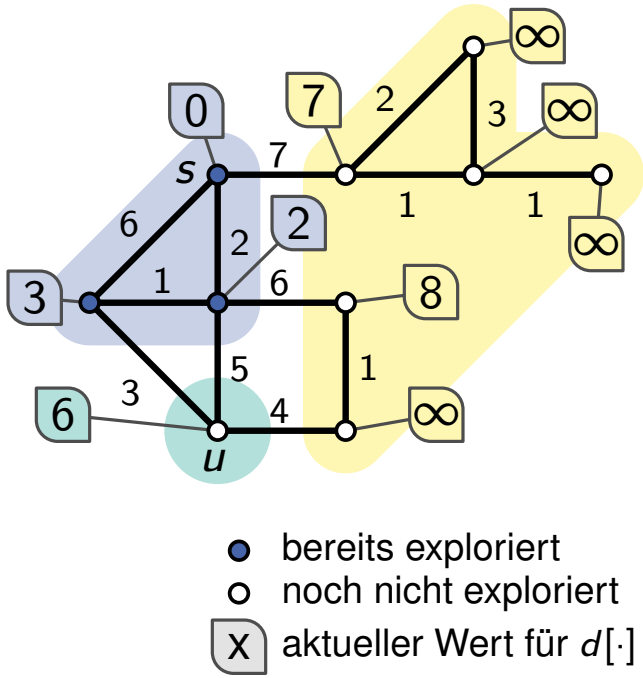
Lemma (der Algo findet tatsächlich den kürzesten Pfad)
In dem Moment, in dem u aus der Queue entfernt und exploriert wird gilt $d[u] = \text{dist}(s, u)$.

Intuition

- Erinnerung: wir explorieren immer den unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
- su-Pfad über v mit $d[v] < d[u]$ schon gefunden (v exploriert)
- Knoten w mit $d[w] > d[u]$ explorieren kann $d[u]$ nicht senken

Problem: das ist noch kein Beweis

- nur weil wir später keinen kürzeren Pfad mehr finden können heißt das nicht, dass wir jetzt den kürzesten Pfad haben



Korrektheit: Algo findet kürzesten Pfad

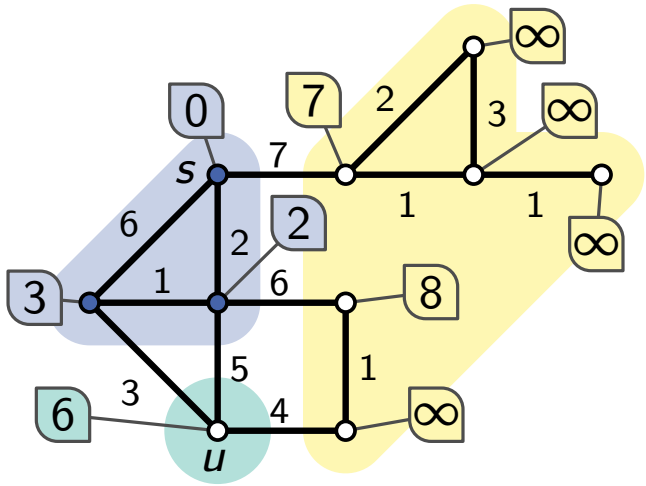
Lemma (der Algo findet tatsächlich den kürzesten Pfad)
In dem Moment, in dem u aus der Queue entfernt und exploriert wird gilt $d[u] = \text{dist}(s, u)$.

Intuition

- Erinnerung: wir explorieren immer den unexplorierten Knoten u mit minimalem $d[u]$
- su-Pfad über v mit $d[v] < d[u]$ schon gefunden (v exploriert)
- Knoten w mit $d[w] > d[u]$ explorieren kann $d[u]$ nicht senken

Problem: das ist noch kein Beweis

- nur weil wir später keinen kürzeren Pfad mehr finden können heißt das nicht, dass wir jetzt den kürzesten Pfad haben



Nützliche Beobachtung

- Knoten werden in nicht-absteigender Reihenfolge exploriert
- also: wenn $d[v] < d[u]$ beim Explorieren, dann wird v vor u exploriert

Korrektheit: Algo findet kürzesten Pfad

Lemma (der Algo findet tatsächlich den kürzesten Pfad)
In dem Moment, in dem u aus der Queue entfernt und exploriert wird gilt $d[u] = \text{dist}(s, u)$.

Beweis: angenommen es stimmt nicht

- wähle Gegenbeispiel u mit $d[u] > \text{dist}(s, u)$

Notation

- $d[v]$: Länge des kürzesten bekanntesten Pfades von s nach v **beim Explorieren**
- $\text{dist}(s, v)$: tatsächliche Distanz von s nach v
- $\text{len}(v, u)$: Länge der Kante $\{v, u\}$

Korrektheit: Algo findet kürzesten Pfad

Lemma (der Algo findet tatsächlich den kürzesten Pfad)
In dem Moment, in dem u aus der Queue entfernt und exploriert wird gilt $d[u] = \text{dist}(s, u)$.

Beweis: angenommen es stimmt nicht

- wähle Gegenbeispiel u mit $d[u] > \text{dist}(s, u)$

Notation

- $d[v]$: Länge des kürzesten bekanntesten Pfades von s nach v **beim Explorieren**
- $\text{dist}(s, v)$: tatsächliche Distanz von s nach v
- $\text{len}(v, u)$: Länge der Kante $\{v, u\}$

Einschub: Beweistechnik

- naheliegendes Argument: u ist Gegenbeispiel $\Rightarrow$ ein Nachbar von u ist Gegenbeispiel
- damit hangeln wir uns von Gegenbeispiel zu Gegenbeispiel
- und müssen zeigen: irgendwann endet das in einem Widerspruch
- schöner: starte mit einem **minimalen Gegenbeispiel**

Korrektheit: Algo findet kürzesten Pfad

Lemma (der Algo findet tatsächlich den kürzesten Pfad)
In dem Moment, in dem u aus der Queue entfernt und exploriert wird gilt $d[u] = \text{dist}(s, u)$.

Beweis: angenommen es stimmt nicht

- wähle Gegenbeispiel u mit $d[u] > \text{dist}(s, u)$, sodass u der erste solche Knoten auf einem kürzesten su-Pfad ist

Notation

- $d[v]$: Länge des kürzesten bekanntesten Pfades von s nach v **beim Explorieren**
- $\text{dist}(s, v)$: tatsächliche Distanz von s nach v
- $\text{len}(v, u)$: Länge der Kante $\{v, u\}$

Einschub: Beweistechnik

- naheliegendes Argument: u ist Gegenbeispiel $\Rightarrow$ ein Nachbar von u ist Gegenbeispiel
- damit hangeln wir uns von Gegenbeispiel zu Gegenbeispiel
- und müssen zeigen: irgendwann endet das in einem Widerspruch
- schöner: starte mit einem **minimalen Gegenbeispiel**

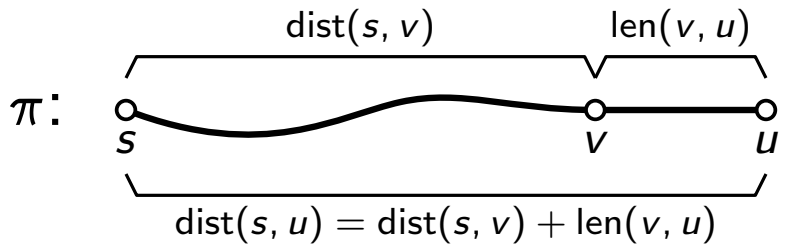
Korrektheit: Algo findet kürzesten Pfad

Lemma (der Algo findet tatsächlich den kürzesten Pfad)
In dem Moment, in dem u aus der Queue entfernt und exploriert wird gilt $d[u] = \text{dist}(s, u)$.

Beweis: angenommen es stimmt nicht

- wähle Gegenbeispiel u mit $d[u] > \text{dist}(s, u)$, sodass u der erste solche Knoten auf einem kürzesten su-Pfad ist
- sei v der Vorgänger von u auf diesem Pfad

(v ist also kein Gegenbeispiel)



Notation

- $d[v]$: Länge des kürzesten bekanntesten Pfades von s nach v **beim Explorieren**
- $\text{dist}(s, v)$: tatsächliche Distanz von s nach v
- $\text{len}(v, u)$: Länge der Kante $\{v, u\}$

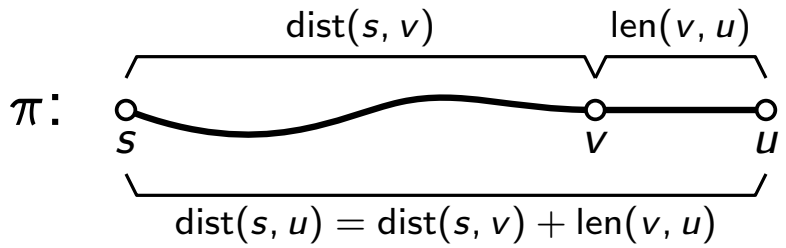
Korrektheit: Algo findet kürzesten Pfad

Lemma (der Algo findet tatsächlich den kürzesten Pfad)
In dem Moment, in dem u aus der Queue entfernt und exploriert wird gilt $d[u] = \text{dist}(s, u)$.

Beweis: angenommen es stimmt nicht

- wähle Gegenbeispiel u mit $d[u] > \text{dist}(s, u)$, sodass u der erste solche Knoten auf einem kürzesten su-Pfad ist
- sei v der Vorgänger von u auf diesem Pfad

(v ist also kein Gegenbeispiel)



Notation

- $d[v]$: Länge des kürzesten bekanntesten Pfades von s nach v **beim Explorieren**
- $\text{dist}(s, v)$: tatsächliche Distanz von s nach v
- $\text{len}(v, u)$: Länge der Kante $\{v, u\}$

Welche dieser Gleichungen und Ungleichungen gelten?

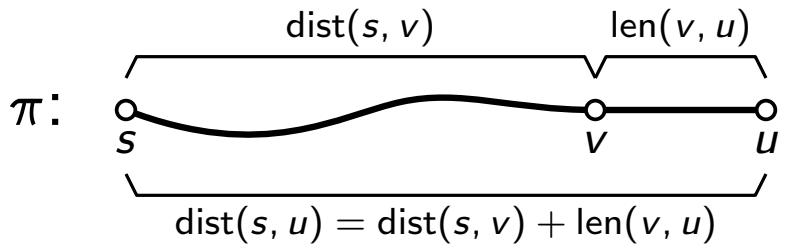
Korrektheit: Algo findet kürzesten Pfad

Lemma (der Algo findet tatsächlich den kürzesten Pfad)
In dem Moment, in dem u aus der Queue entfernt und exploriert wird gilt $d[u] = \text{dist}(s, u)$.

Beweis: angenommen es stimmt nicht

- wähle Gegenbeispiel u mit $d[u] > \text{dist}(s, u)$, sodass u der erste solche Knoten auf einem kürzesten su-Pfad ist
- sei v der Vorgänger von u auf diesem Pfad

(v ist also kein Gegenbeispiel)



- es gilt: $d[v] = \text{dist}(s, v) \leq \text{dist}(s, u) < d[u]$

Notation

- $d[v]$: Länge des kürzesten bekanntesten Pfades von s nach v **beim Explorieren**
- $\text{dist}(s, v)$: tatsächliche Distanz von s nach v
- $\text{len}(v, u)$: Länge der Kante $\{v, u\}$

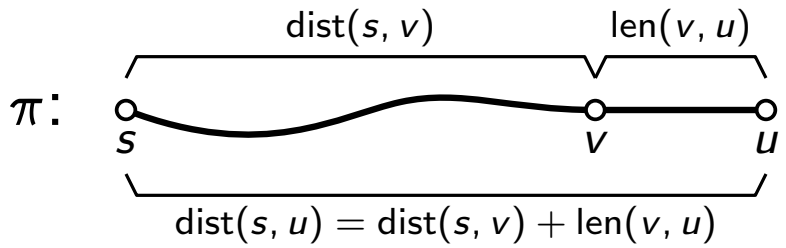
Korrektheit: Algo findet kürzesten Pfad

Lemma (der Algo findet tatsächlich den kürzesten Pfad)
In dem Moment, in dem u aus der Queue entfernt und exploriert wird gilt $d[u] = \text{dist}(s, u)$.

Beweis: angenommen es stimmt nicht

- wähle Gegenbeispiel u mit $d[u] > \text{dist}(s, u)$, sodass u der erste solche Knoten auf einem kürzesten su-Pfad ist
- sei v der Vorgänger von u auf diesem Pfad

(v ist also kein Gegenbeispiel)



- es gilt: $d[v] = \text{dist}(s, v) \leq \text{dist}(s, u) < d[u]$
- damit wird v vor u exploriert

Notation

- $d[v]$: Länge des kürzesten bekanntesten Pfades von s nach v **beim Explorieren**
- $\text{dist}(s, v)$: tatsächliche Distanz von s nach v
- $\text{len}(v, u)$: Länge der Kante $\{v, u\}$

Nützliche Beobachtung

- Knoten werden in nicht-absteigender Reihenfolge exploriert
- also: wenn $d[v] < d[u]$ beim Explorieren, dann wird v vor u exploriert

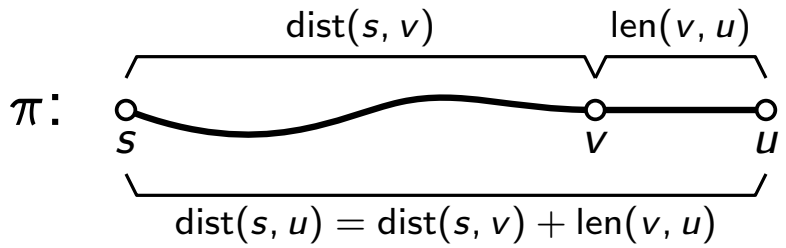
Korrektheit: Algo findet kürzesten Pfad

Lemma (der Algo findet tatsächlich den kürzesten Pfad)
In dem Moment, in dem u aus der Queue entfernt und exploriert wird gilt $d[u] = \text{dist}(s, u)$.

Beweis: angenommen es stimmt nicht

- wähle Gegenbeispiel u mit $d[u] > \text{dist}(s, u)$, sodass u der erste solche Knoten auf einem kürzesten su-Pfad ist
- sei v der Vorgänger von u auf diesem Pfad

(v ist also kein Gegenbeispiel)



- es gilt: $d[v] = \text{dist}(s, v) \leq \text{dist}(s, u) < d[u]$
- damit wird v vor u exploriert
- dabei wird $d[u]$ auf $d[v] + \text{len}(v, u) = \text{dist}(s, v) + \text{len}(v, u) = \text{dist}(s, u)$ gesetzt

Notation

- $d[v]$: Länge des kürzesten bekanntesten Pfades von s nach v **beim Explorieren**
- $\text{dist}(s, v)$: tatsächliche Distanz von s nach v
- $\text{len}(v, u)$: Länge der Kante $\{v, u\}$

Nützliche Beobachtung

- Knoten werden in nicht-absteigender Reihenfolge exploriert
- also: wenn $d[v] < d[u]$ beim Explorieren, dann wird v vor u exploriert

Dijkstras Algo: Zusammenfassung und Anmerkungen

Theorem
Gegeben einen Graphen $G = (V, E)$, Kantenlängen $\text{len}\colon E \to \mathbb{N}$ und $s \in V$, dann berechnet Dijkstras Algorithmus in $\Theta(n \log n + m)$ Zeit die Distanzen $\text{dist}(s, v)$ für alle $v \in V$.

Dijkstras Algo: Zusammenfassung und Anmerkungen

Theorem
Gegeben einen Graphen $G = (V, E)$, Kantenlängen $\text{len}\colon E \to \mathbb{N}$ und $s \in V$, dann berechnet Dijkstras Algorithmus in $\Theta(n \log n + m)$ Zeit die Distanzen $\text{dist}(s, v)$ für alle $v \in V$.

Anmerkungen

- funktioniert für gerichtete und ungerichtete Graphen
- wir brauchen nicht-negativen Kantenlängen

Dijkstras Algo: Zusammenfassung und Anmerkungen

Theorem
Gegeben einen Graphen $G = (V, E)$, Kantenlängen $\text{len}\colon E \to \mathbb{N}$ und $s \in V$, dann berechnet Dijkstras Algorithmus in $\Theta(n \log n + m)$ Zeit die Distanzen $\text{dist}(s, v)$ für alle $v \in V$.

Anmerkungen

- funktioniert für gerichtete und ungerichtete Graphen
- wir brauchen nicht-negativen Kantenlängen
- das Betrachten der Kante $e = \{u, v\}$ beim Explorieren von u heißt auch **relaxieren** von e

Dijkstras Algo: Zusammenfassung und Anmerkungen

Theorem
Gegeben einen Graphen $G = (V, E)$, Kantenlängen $\text{len}\colon E \to \mathbb{N}$ und $s \in V$, dann berechnet Dijkstras Algorithmus in $\Theta(n \log n + m)$ Zeit die Distanzen $\text{dist}(s, v)$ für alle $v \in V$.

Anmerkungen

- funktioniert für gerichtete und ungerichtete Graphen
- wir brauchen nicht-negativen Kantenlängen
- das Betrachten der Kante $e = \{u, v\}$ beim Explorieren von u heißt auch **relaxieren** von e

Nächstes Mal

- Umgang mit negativen Kantenlängen: Bellman–Ford
- Berechnung der Distanzen zwischen allen Paaren: Floyd–Warshall

Dijkstras Algo: Zusammenfassung und Anmerkungen

Theorem
Gegeben einen Graphen $G = (V, E)$, Kantenlängen $\text{len}\colon E \to \mathbb{N}$ und $s \in V$, dann berechnet Dijkstras Algorithmus in $\Theta(n \log n + m)$ Zeit die Distanzen $\text{dist}(s, v)$ für alle $v \in V$.

Anmerkungen

- funktioniert für gerichtete und ungerichtete Graphen
- wir brauchen nicht-negativen Kantenlängen
- das Betrachten der Kante $e = \{u, v\}$ beim Explorieren von u heißt auch **relaxieren** von e

Nächstes Mal

- Umgang mit negativen Kantenlängen: Bellman–Ford
- Berechnung der Distanzen zwischen allen Paaren: Floyd–Warshall

Später

- effiziente Priority-Queues

Ausblick: Routenplanung in der Praxis

Kürzeste Wege auf Straßengraphen

- Europa hat ca. 18 M Knoten und 42 M Kanten
- Dijkstra braucht mehrere Sekunden
- ungeeignet für viele Anwendungen

Ausblick: Routenplanung in der Praxis

Kürzeste Wege auf Straßengraphen

- Europa hat ca. $18\,\mathrm{M}$ Knoten und $42\,\mathrm{M}$ Kanten
- Dijkstra braucht mehrere Sekunden
- ungeeignet für viele Anwendungen

Problem: viel besser als $O(n \log n + m)$ kann es nicht werden

Ausblick: Routenplanung in der Praxis

Kürzeste Wege auf Straßengraphen

- Europa hat ca. $18\,\mathrm{M}$ Knoten und $42\,\mathrm{M}$ Kanten
- Dijkstra braucht mehrere Sekunden
- ungeeignet für viele Anwendungen

Problem: viel besser als $O(n \log n + m)$ kann es nicht werden

Beobachtung: der Eingabegraph ist immer der gleiche

Ausblick: Routenplanung in der Praxis

Kürzeste Wege auf Straßengraphen

- Europa hat ca. 18 M Knoten und 42 M Kanten
- Dijkstra braucht mehrere Sekunden
- ungeeignet für viele Anwendungen

Problem: viel besser als $O(n \log n + m)$ kann es nicht werden

Beobachtung: der Eingabegraph ist immer der gleiche

Idee

- zwei Phasen:
  1. generiere Zusatzinformationen über G
  2. **beschleunigte Anfrage** dank dieser Information

Ausblick: Routenplanung in der Praxis

Kürzeste Wege auf Straßengraphen

- Europa hat ca. 18 M Knoten und 42 M Kanten
- Dijkstra braucht mehrere Sekunden
- ungeeignet für viele Anwendungen

Problem: viel besser als $O(n \log n + m)$ kann es nicht werden

Beobachtung: der Eingabegraph ist immer der gleiche

Idee

- zwei Phasen:
  1. generiere Zusatzinformationen über G
  2. **beschleunigte Anfrage** dank dieser Information
- drei Kriterien: Beschleunigung, Vorberechnungszeit, Speicherplatz

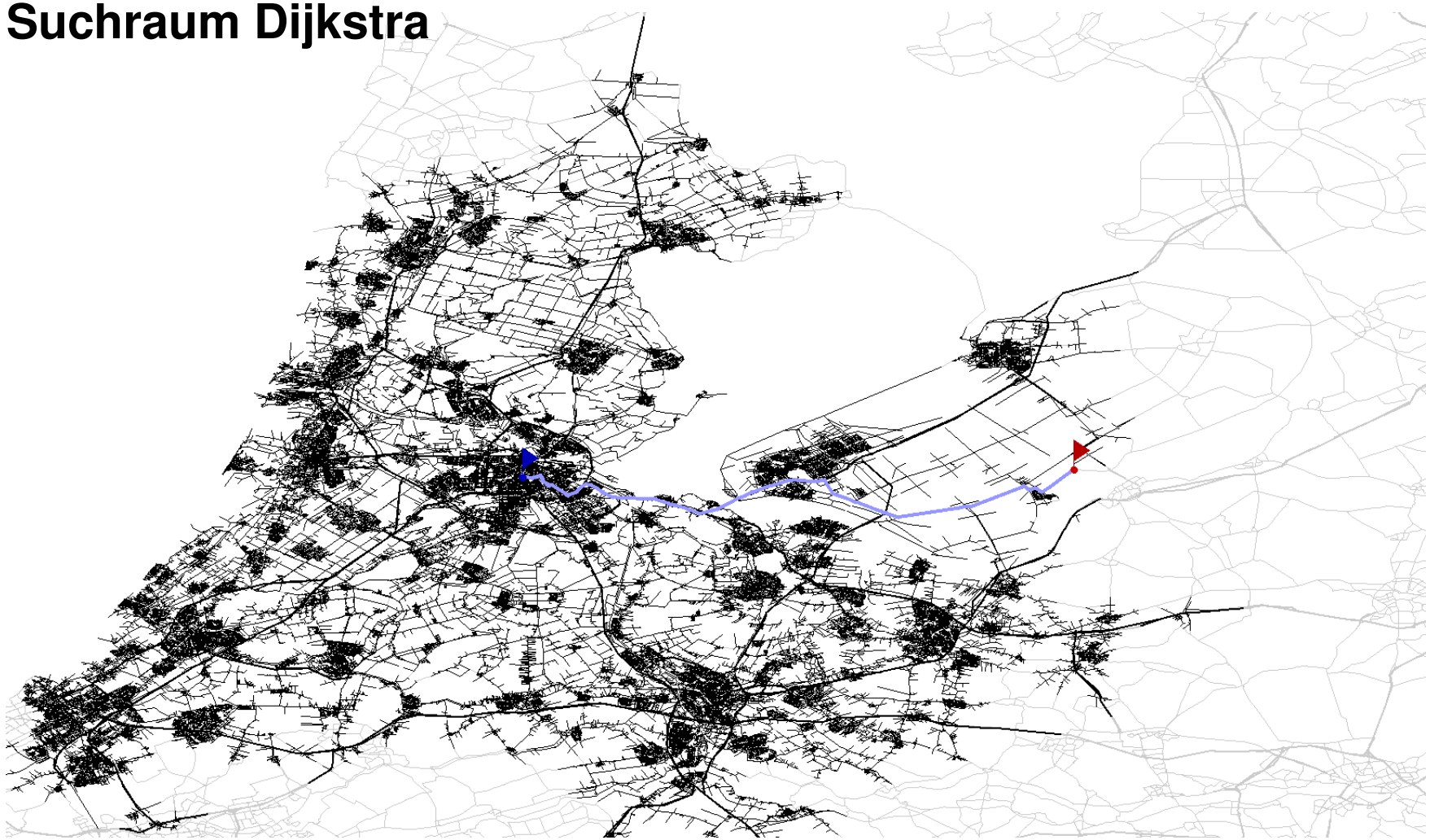
Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)

Zielgerichtetes Routing (Arc-Flags)

- manche Straßen in Karlsruhe sind nicht relevant, wenn man nach Berlin möchte
- Vorberechnung: berechne für jede Kante, ob sie für ein Ziel in Berlin relevant ist
- Anfrage: Zielknoten liegt in Berlin $\rightarrow$ Dijkstra, aber ignoriere irrelevanten Kanten

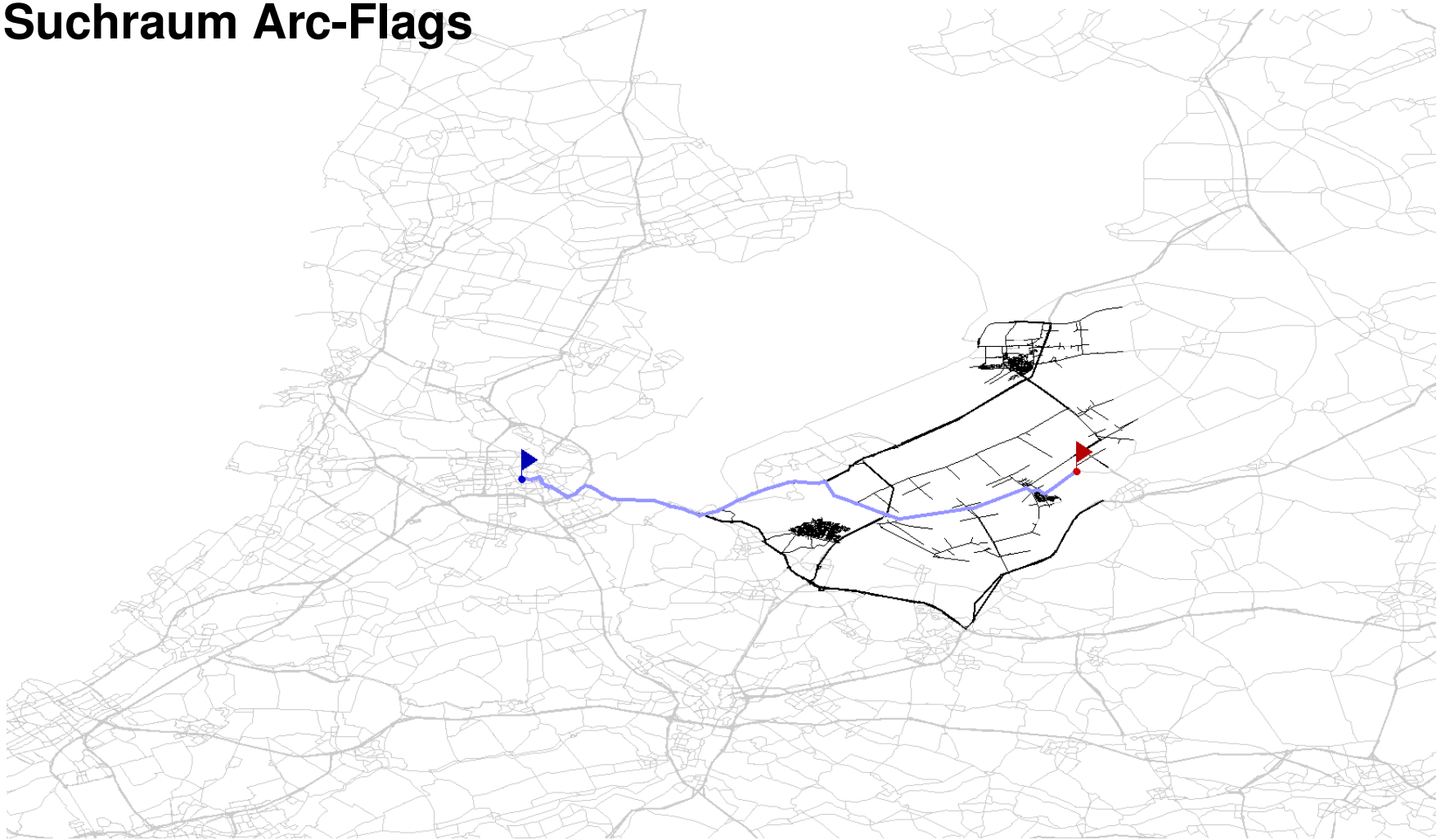
Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)

Suchraum Dijkstra



Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)

Suchraum Arc-Flags



Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)

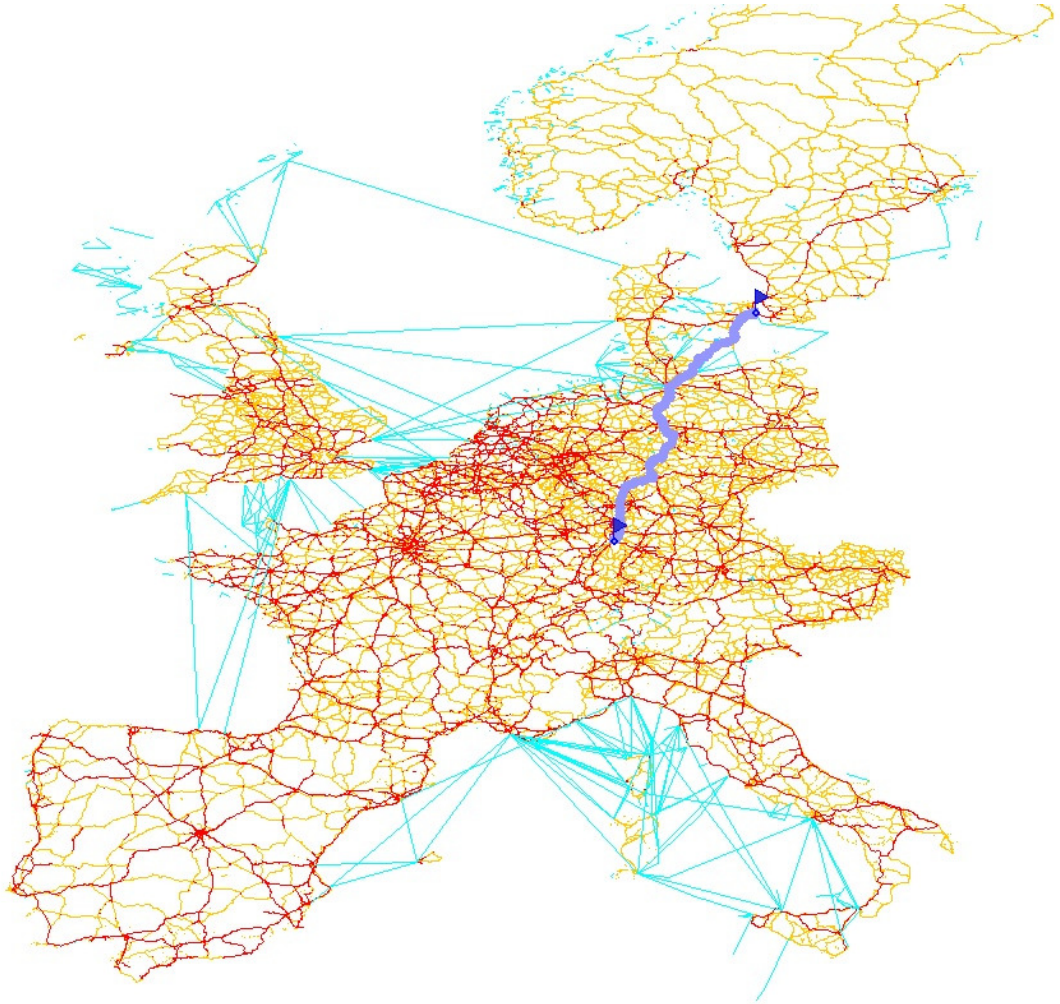
Zielgerichtetes Routing (Arc-Flags)

- manche Straßen in Karlsruhe sind nicht relevant, wenn man nach Berlin möchte
- Vorberechnung: berechne für jede Kante, ob sie für ein Ziel in Berlin relevant ist
- Anfrage: Zielknoten liegt in Berlin $\rightarrow$ Dijkstra, aber ignoriere irrelevanten Kanten

Ausnutzung von Transitknoten

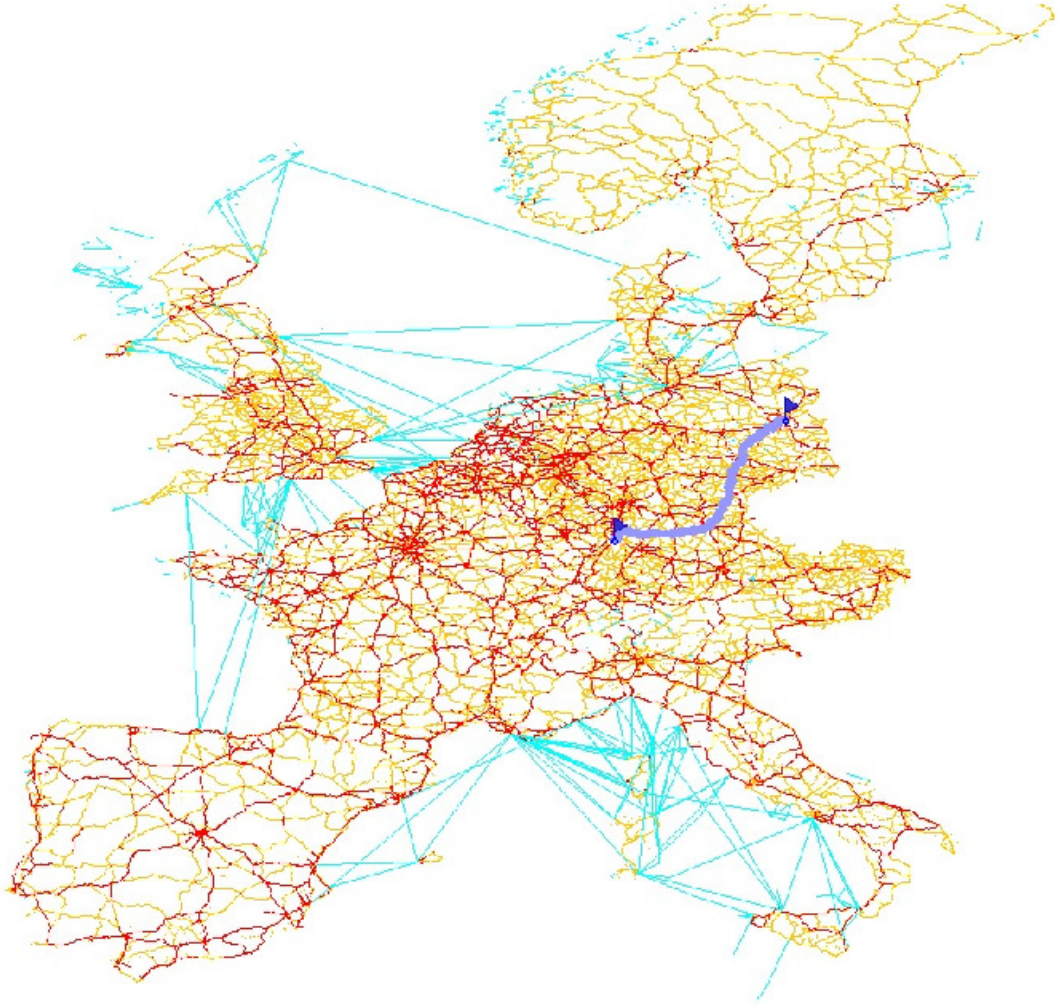
- Situation: wir wollen von Karlsruhe weit weg fahren

Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)



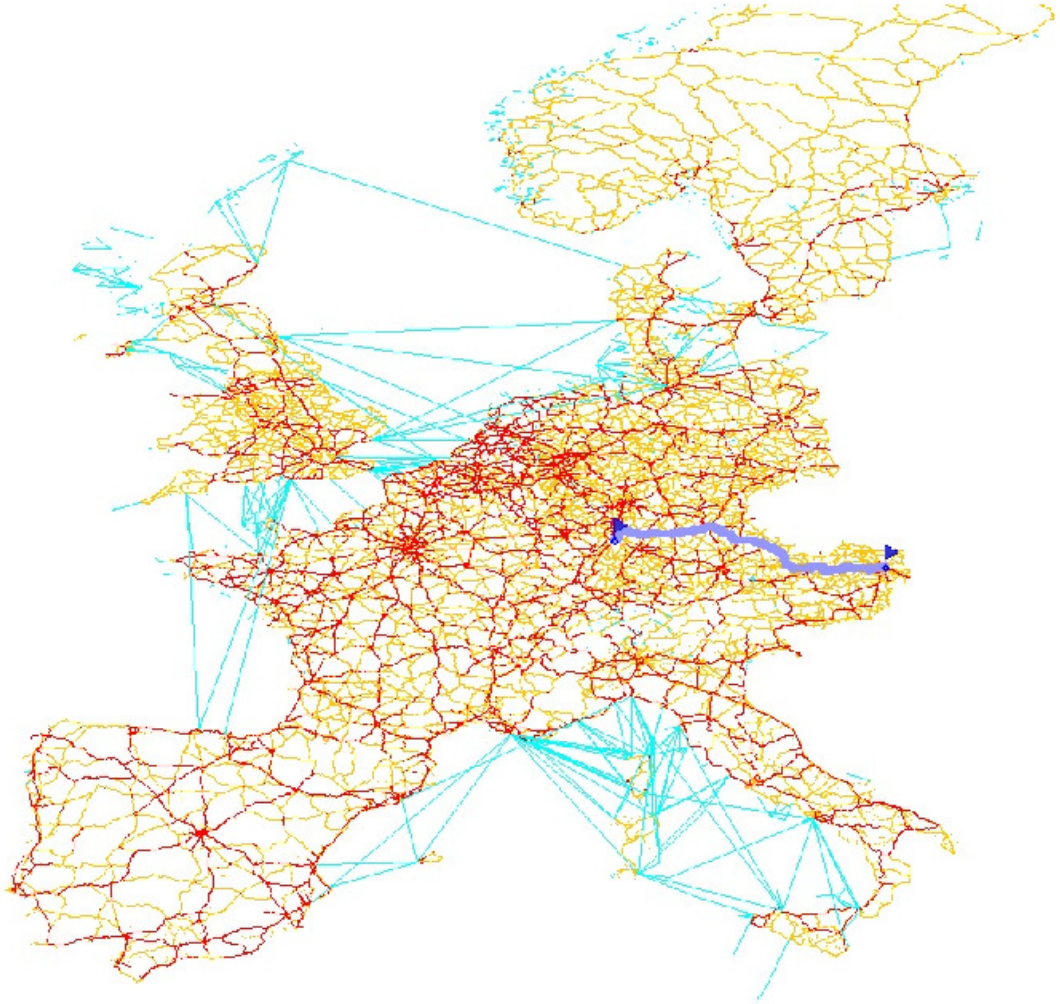
Karlsruhe $\rightarrow$ Kopenhagen

Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)



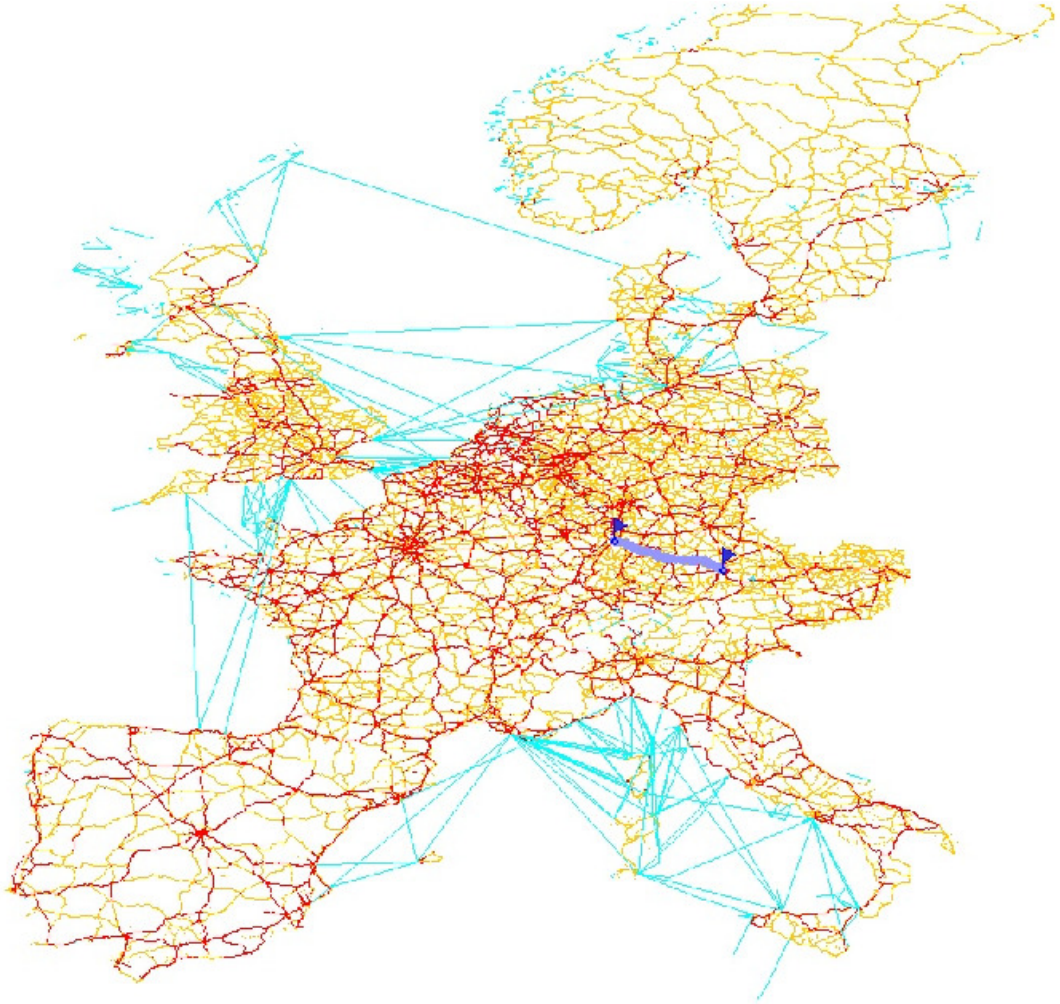
Karlsruhe $\rightarrow$ Berlin

Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)



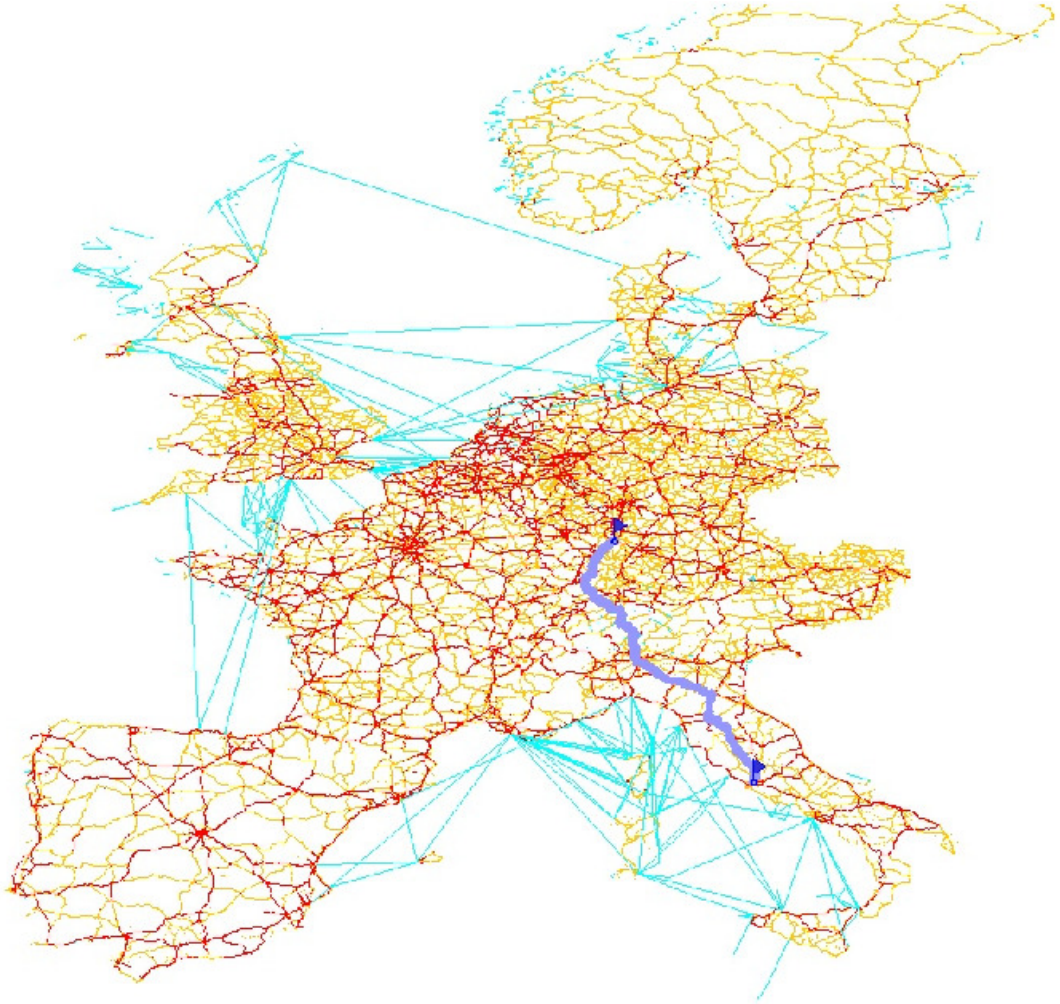
Karlsruhe $\rightarrow$ Wien

Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)



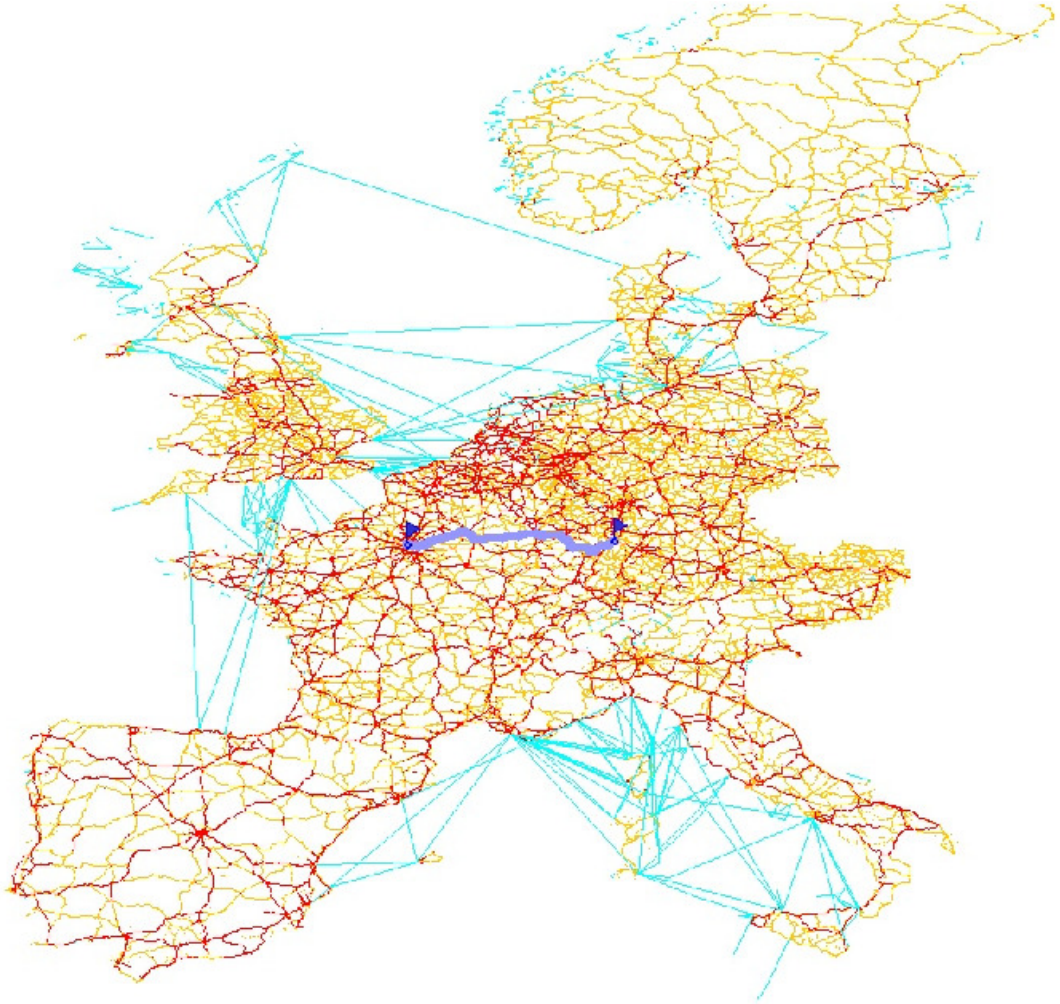
Karlsruhe $\rightarrow$ München

Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)



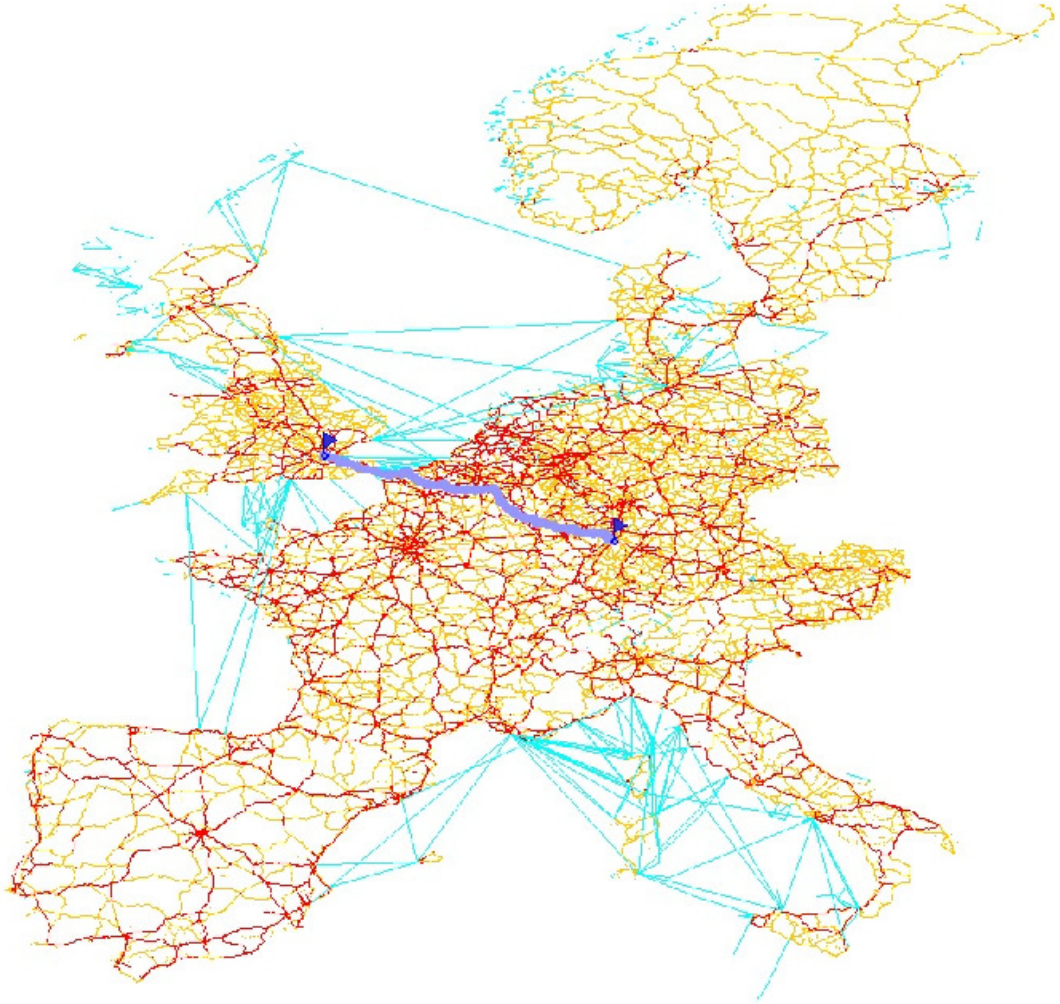
Karlsruhe $\rightarrow$ Rom

Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)



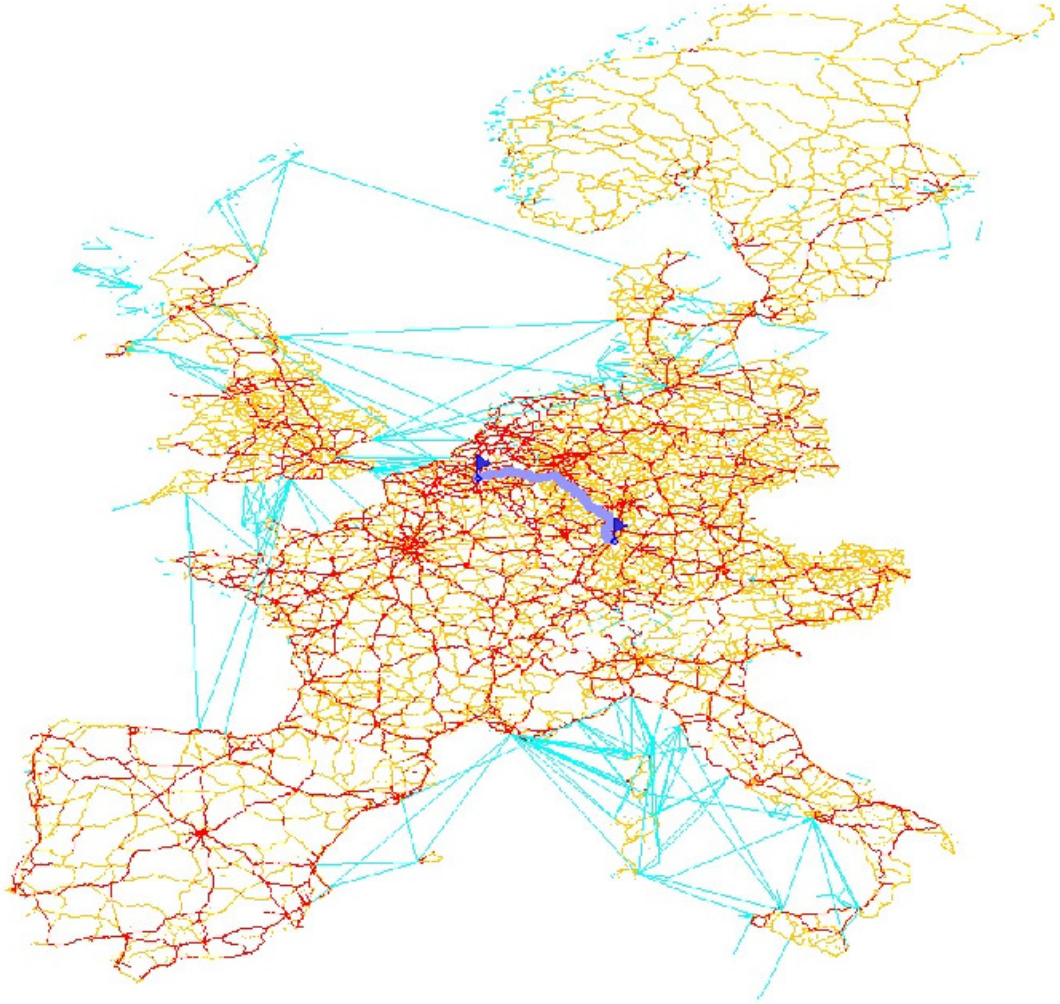
Karlsruhe $\rightarrow$ Paris

Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)



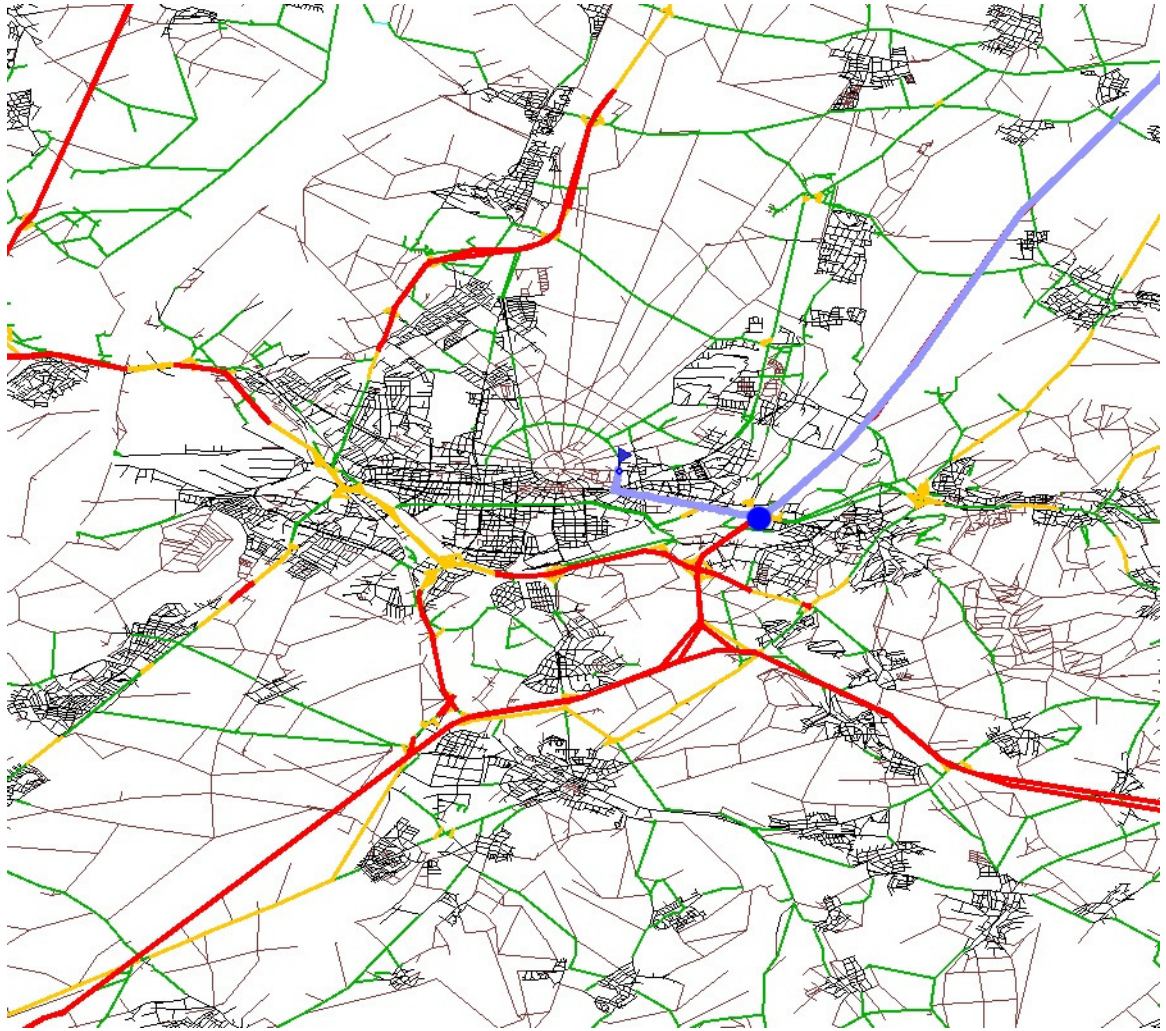
Karlsruhe $\rightarrow$ London

Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)



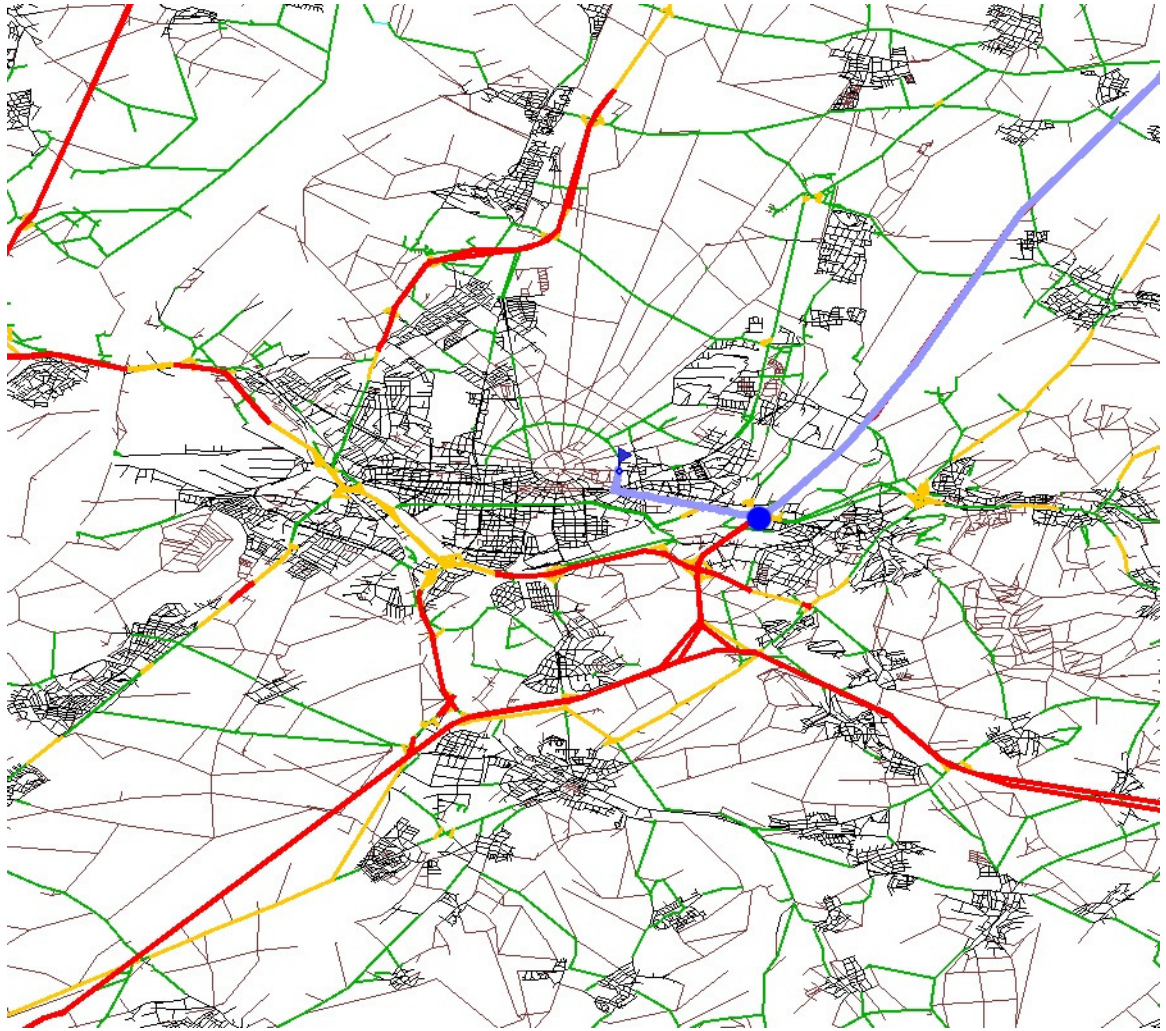
Karlsruhe $\rightarrow$ Brüssel

Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)



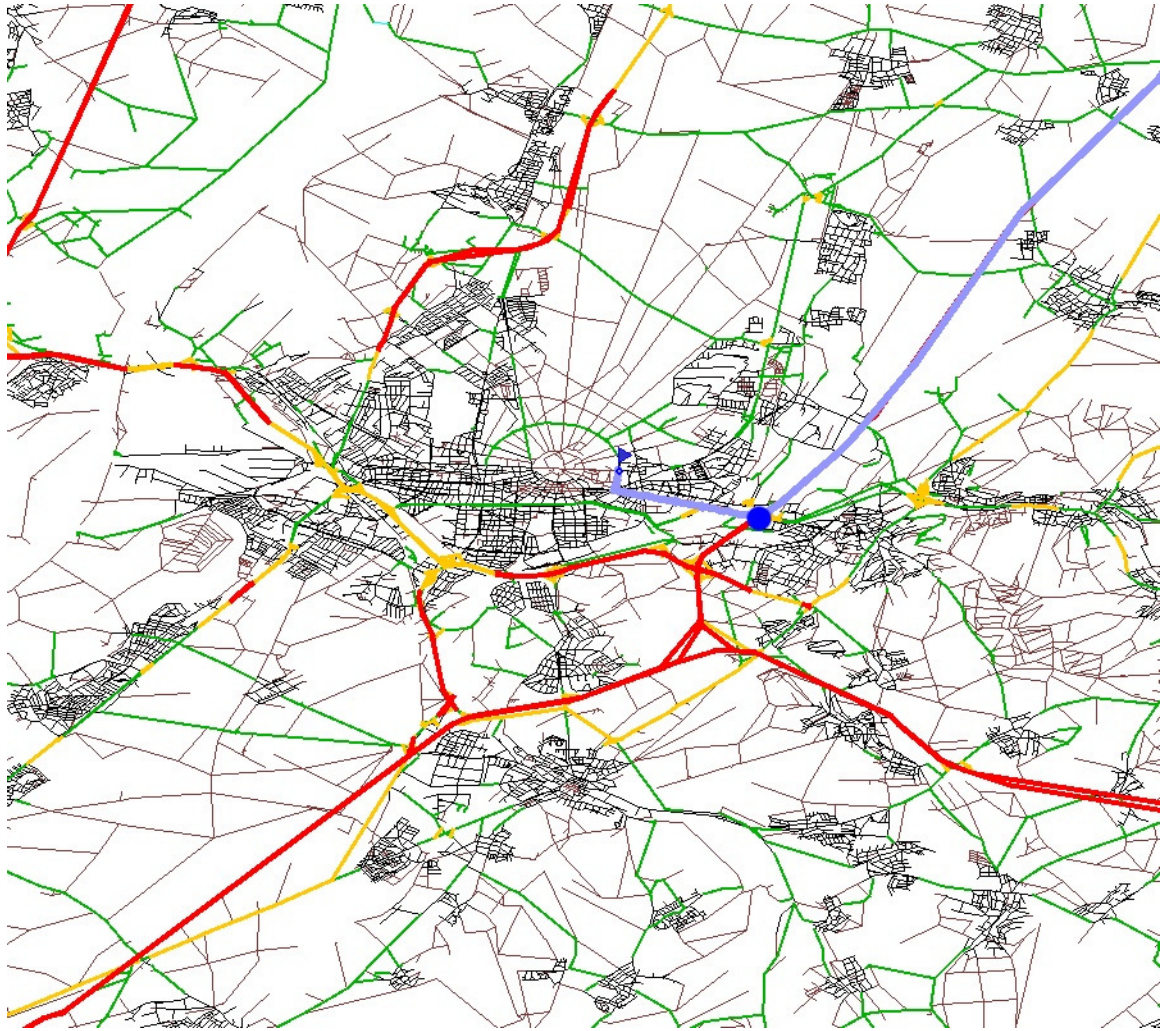
Karlsruhe → Kopenhagen

Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)



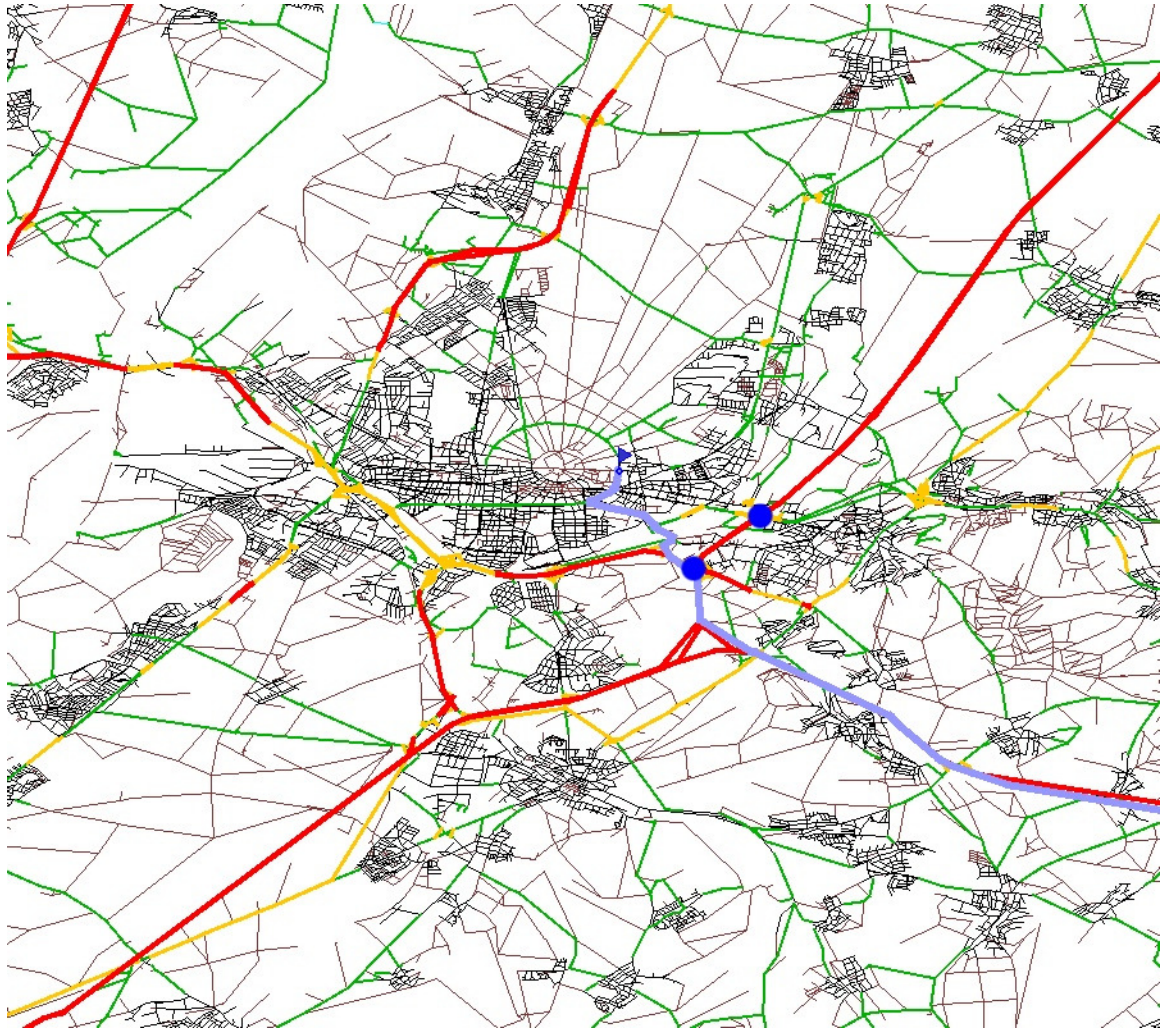
Karlsruhe $\rightarrow$ Berlin

Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)



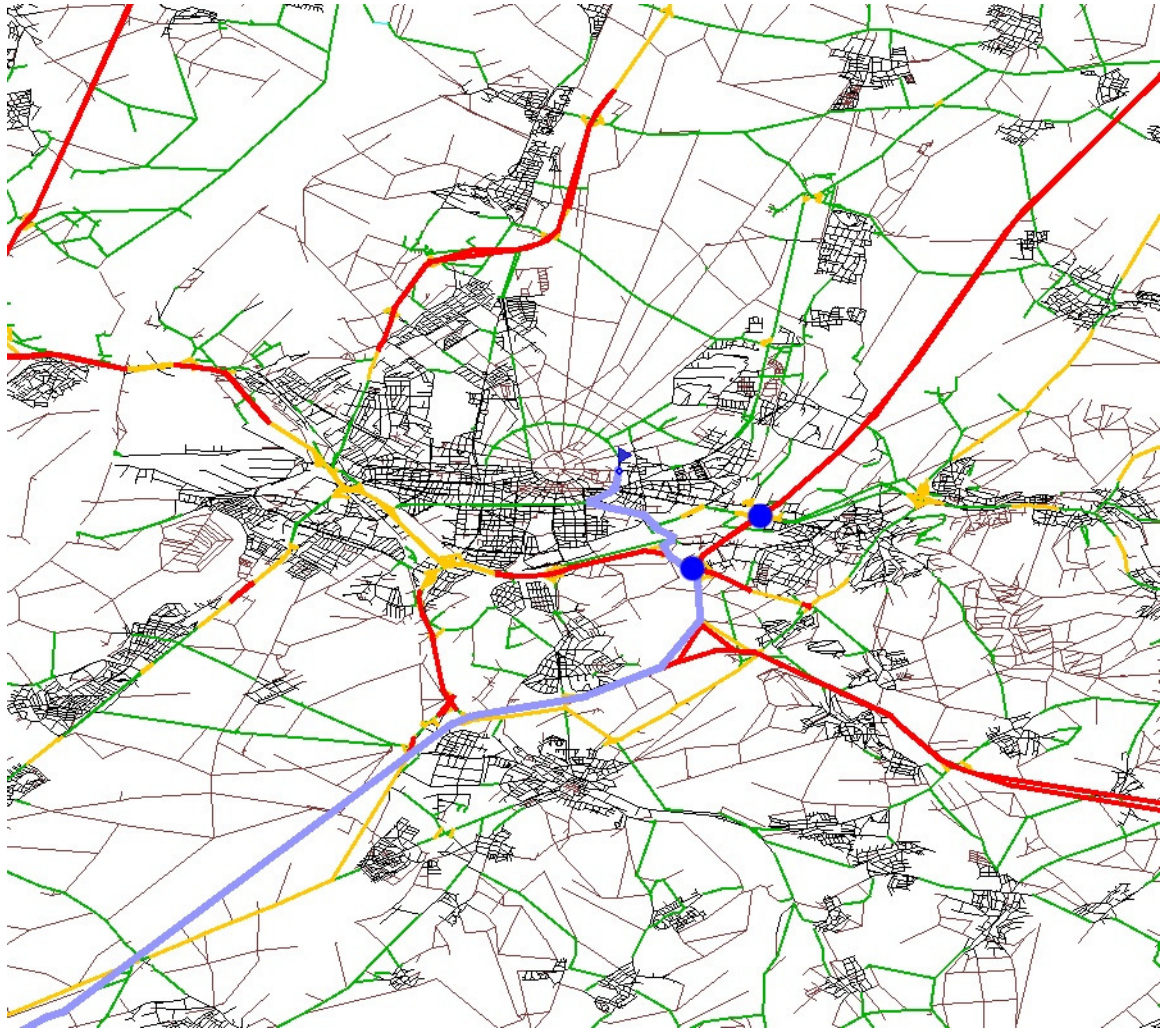
Karlsruhe → Wien

Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)



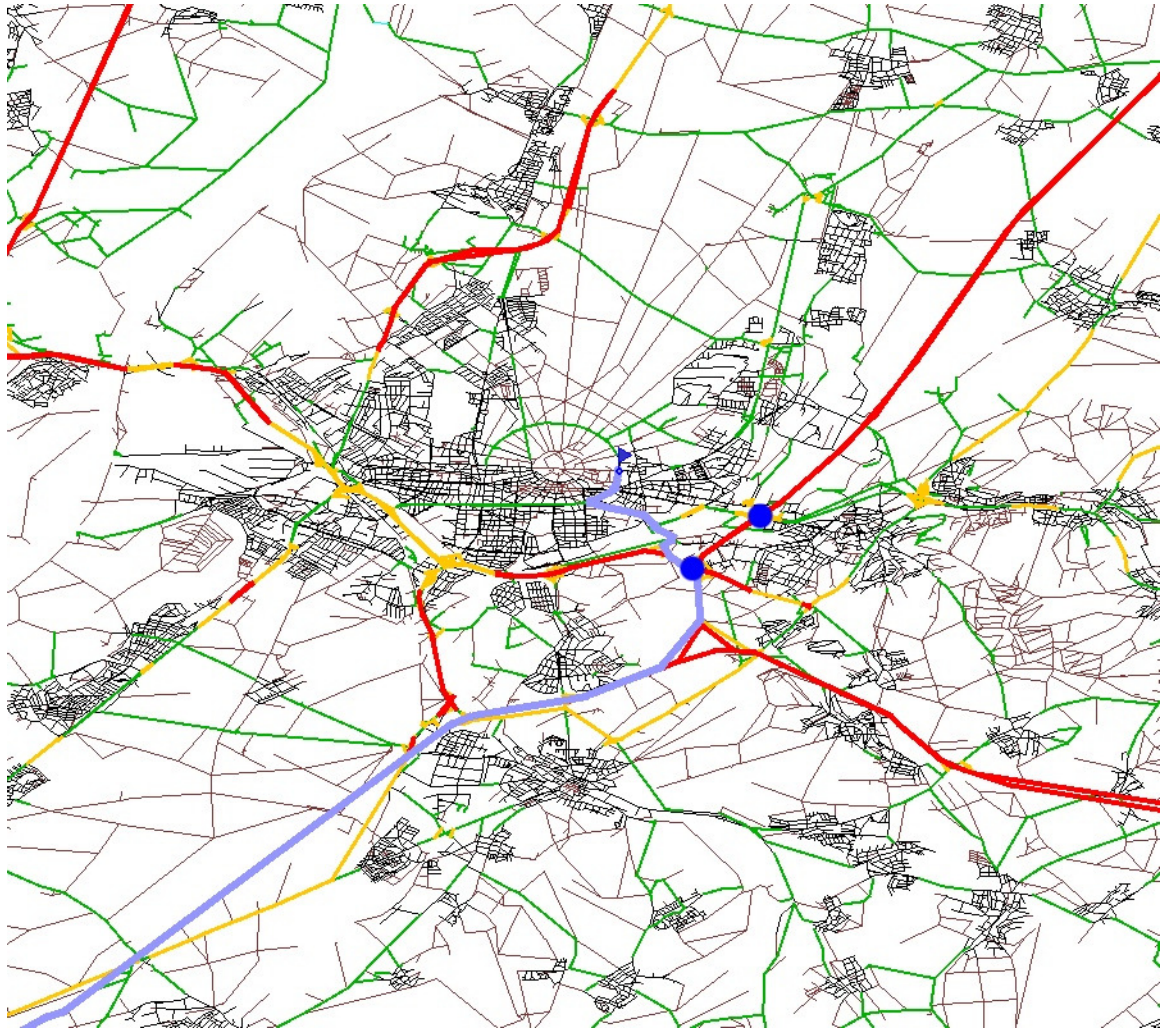
Karlsruhe $\rightarrow$ München

Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)



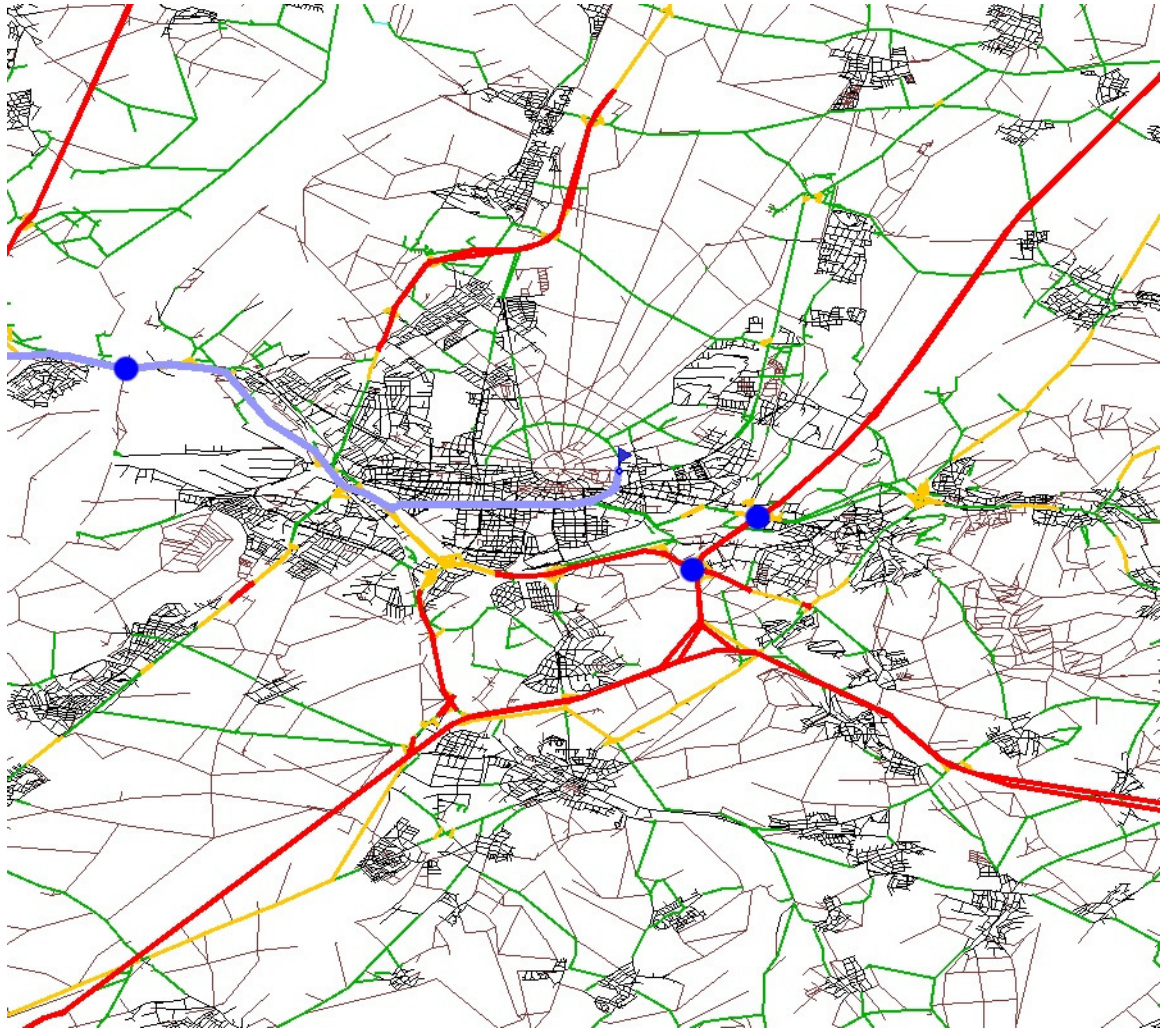
Karlsruhe → Rom

Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)



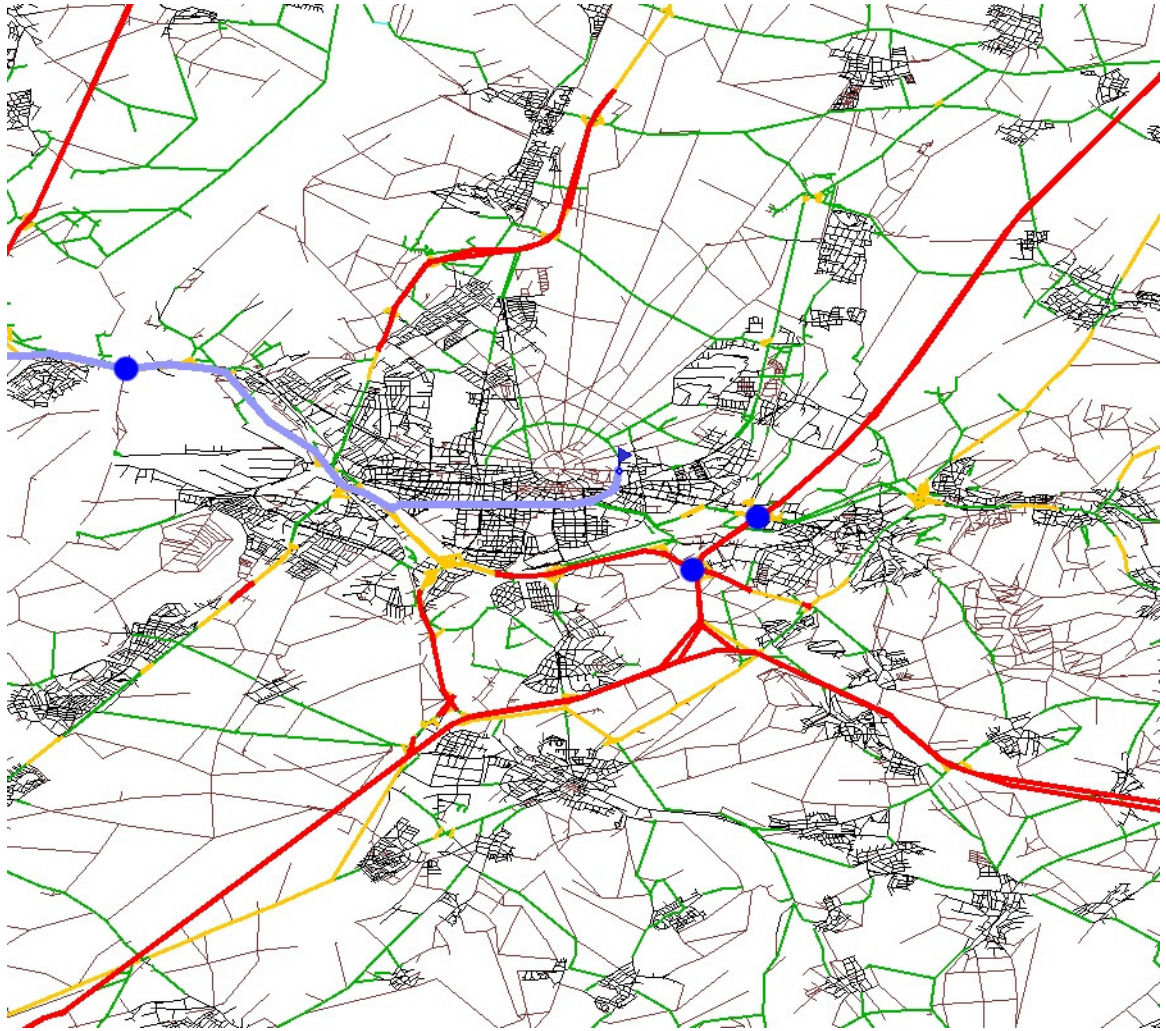
Karlsruhe $\rightarrow$ Paris

Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)



Karlsruhe → London

Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)



Karlsruhe → Brüssel

Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)

Zielgerichtetes Routing (Arc-Flags)

- manche Straßen in Karlsruhe sind nicht relevant, wenn man nach Berlin möchte
- Vorberechnung: berechne für jede Kante, ob sie für ein Ziel in Berlin relevant ist
- Anfrage: Zielknoten liegt in Berlin $\rightarrow$ Dijkstra, aber ignoriere irrelevanten Kanten

Ausnutzung von Transitknoten

- Situation: wir wollen von Karlsruhe weit weg fahren
- kürzester Weg führt dann immer erstmal auf die Autobahn
- es gibt nicht so viele Autobahnauffahrten $\rightarrow$ wenige Transitknoten

Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)

Zielgerichtetes Routing (Arc-Flags)

- manche Straßen in Karlsruhe sind nicht relevant, wenn man nach Berlin möchte
- Vorberechnung: berechne für jede Kante, ob sie für ein Ziel in Berlin relevant ist
- Anfrage: Zielknoten liegt in Berlin $\rightarrow$ Dijkstra, aber ignoriere irrelevanten Kanten

Ausnutzung von Transitknoten

- Situation: wir wollen von Karlsruhe weit weg fahren
- kürzester Weg führt dann immer erstmal auf die Autobahn
- es gibt nicht so viele Autobahnauffahrten $\rightarrow$ wenige Transitknoten
- berechne Distanzen zwischen allen Paaren von Transitkonten vor

Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)

Zielgerichtetes Routing (Arc-Flags)

- manche Straßen in Karlsruhe sind nicht relevant, wenn man nach Berlin möchte
- Vorberechnung: berechne für jede Kante, ob sie für ein Ziel in Berlin relevant ist
- Anfrage: Zielknoten liegt in Berlin $\rightarrow$ Dijkstra, aber ignoriere irrelevanten Kanten

Ausnutzung von Transitknoten

- Situation: wir wollen von Karlsruhe weit weg fahren
- kürzester Weg führt dann immer erstmal auf die Autobahn
- es gibt nicht so viele Autobahnauffahrten $\rightarrow$ wenige Transitknoten
- berechne Distanzen zwischen allen Paaren von Transitkonten vor

Anmerkungen

- es lohnt sich: bis zu $1\,000\,000$ mal schneller als Dijkstra

Ausblick: Routenplanung in der Praxis (Beispiele)

Zielgerichtetes Routing (Arc-Flags)

- manche Straßen in Karlsruhe sind nicht relevant, wenn man nach Berlin möchte
- Vorberechnung: berechne für jede Kante, ob sie für ein Ziel in Berlin relevant ist
- Anfrage: Zielknoten liegt in Berlin $\rightarrow$ Dijkstra, aber ignoriere irrelevanten Kanten

Ausnutzung von Transitknoten

- Situation: wir wollen von Karlsruhe weit weg fahren
- kürzester Weg führt dann immer erstmal auf die Autobahn
- es gibt nicht so viele Autobahnauffahrten $\rightarrow$ wenige Transitknoten
- berechne Distanzen zwischen allen Paaren von Transitkonten vor

Anmerkungen

- es lohnt sich: bis zu $1\,000\,000$ mal schneller als Dijkstra
- viele der Algorithmen wurden hier in Karlsruhe entwickelt
- mehr davon? $\rightarrow$ Vorlesung Algorithmen für Routenplanung (Master)

Kürzeste Wege – SSSP

Dijkstras Algorithmus

- vermutlich der bekannteste Graphalgorithmus (vielleicht nach BFS und DFS)
- effiziente Berechnung kürzester Wege
- Wunschzettel: eine schnelle Priority-Queue

Kürzeste Wege – SSSP

Dijkstras Algorithmus

- vermutlich der bekannteste Graphalgorithmus (vielleicht nach BFS und DFS)
- effiziente Berechnung kürzester Wege
- Wunschzettel: eine schnelle Priority-Queue

Beweistechniken

- Invariante (Algo kennt nur Pfade, die es wirklich gibt)
- Widerspruch mit minimalem Gegenbeispiel (Algo findet den kürzesten Pfad)

Kürzeste Wege – SSSP

Dijkstras Algorithmus

- vermutlich der bekannteste Graphalgorithmus (vielleicht nach BFS und DFS)
- effiziente Berechnung kürzester Wege
- Wunschzettel: eine schnelle Priority-Queue

Beweistechniken

- Invariante (Algo kennt nur Pfade, die es wirklich gibt)
- Widerspruch mit minimalem Gegenbeispiel (Algo findet den kürzesten Pfad)

Ausblick Routenplanung

- Algorithmische Technik: Vorberechnung, wenn bei vielen Anfragen auf den selben Daten
- kann Anfragen sehr beschleunigen