Maximilian Katzmann
Hans-Peter Lehmann
Stefan Walzer

Übungsblatt 10

Randomisierte Algorithmik – Wintersemester 2023/2024

Aufgaben zur Vorlesung vom 11.1.2024
Abgabe im ILIAS bis 18.1.2024, 11:30 Uhr
Besprechung am 30.01.2024, 08:00 Uhr
Achte insbesondere bei handschriftlichen Abgaben auf Lesbarkeit. Die Abgabe erfolgt über das Übungsmodul im ILIAS. Gib Deine Ausarbeitungen in *einer* PDF-Datei ab.

Diesmal sind es zwar drei Aufgaben, aber sie sind nicht so schwierig. Versprochen!

Aufgabe 1 – Rechenregeln für Varianz

Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen deren Varianz existiert. Seien ferner $s, t > 0$. Zeige, dass gilt:

(a) $\mathrm{Var}(sX) = s^2\mathrm{Var}(X)$

(b) $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

(c) $\mathrm{Var}(sX + tY) = s^2\mathrm{Var}(X) + t^2\mathrm{Var}(Y)$

Beweiszutaten: Verwende die Definition $\mathrm{Var}(Z) := \mathbb{E}[(Z-\mathbb{E}[Z])^2]$. Verwende ferner, dass für unabhängige Zufallsvariablen X, Y gilt $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$. Wenn du Lust hast, kannst du letzteres auch nochmal aus der Definition von Unabhängigkeit (für diskrete Zufallsvariablen) herleiten, die lediglich $\Pr[X = i \wedge Y = j] = \Pr[X = i] \cdot \Pr[Y = j]$ für alle i, j garantiert.

Lösung 1

Wir zeigen zunächst nochmal $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$. Seien hierfür $R_X, R_Y \subseteq \mathbb{R}$ abzählbare Mengen, die alle möglichen Werte für X und Y enthalten. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X \cdot Y] &= \sum_{(x,y) \in R_X \times R_Y} x \cdot y \cdot \Pr[X = x \wedge Y = y] \\
&\overset{\text{Unabh.}}{=} \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} x \cdot y \cdot \Pr[X = x] \Pr[Y = y] \\
&= \sum_{x \in R_X} \Big(x \cdot \Pr[X = x] \sum_{y \in R_Y} y \cdot \Pr[Y = y] \Big) \\
&= \Big(\sum_{x \in R_X} x \cdot \Pr[X = x] \Big) \Big(\sum_{y \in R_Y} y \cdot \Pr[Y = y] \Big) \\
&= \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].
\end{aligned}$$

Wir beweisen nun die drei einfachen Rechenregeln (und machen das sehr ausführlich).

(a) Hier ist neben der Definition der Varianz nur die Einsicht $\mathbb{E}[sZ] = s\mathbb{E}[Z]$ nötig (folgt aus Linearität des Erwartungswertes). Letzteres gilt für jede Zufallsvariable Z, deren Erwartungswert existiert und jedes $s \in \mathbb{R}$. Also:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(sX) &= \mathbb{E}[(sX - \mathbb{E}[sX])^2] = \mathbb{E}[(sX - s\mathbb{E}[X])^2] \\
&= \mathbb{E}[s^2(X - \mathbb{E}[X])^2] = s^2\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = s^2\mathrm{Var}(X).
\end{aligned}$$

(b) Zunächst haben zentrierte Zufallsvariablen Erwartungswert 0:

$$\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X]] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X] = 0. \tag{1}$$

Wenn zwei Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind, dann sind auch $X - c$ und $Y - d$ unabhängig für beliebige Konstanten $c, d \in \mathbb{R}$. Wenn wir $c = \mathbb{E}[X]$ und $d = \mathbb{E}[Y]$ setzen folgt, dass $X - \mathbb{E}[X]$ unabhängig von $Y - \mathbb{E}[Y]$ ist. Also folgt:

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]] \cdot \mathbb{E}[Y - \mathbb{E}[Y]] \overset{(1)}{=} 0 \cdot 0 = 0. \tag{2}$$

Wir betrachten nun den Term $(X+Y-\mathbb{E}[X+Y])^2$, dessen Erwartungswert die gesuchte Varianz ist.

$$\begin{aligned}
(X + Y - \mathbb{E}[X + Y])^2 &= (X + Y - \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y])^2 = \big((X - \mathbb{E}[X]) + (Y - \mathbb{E}[Y])\big)^2 \\
&= (X - \mathbb{E}[X])^2 + (Y - \mathbb{E}[Y])^2 + 2(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y]).
\end{aligned}$$

Wenn wir nun den Erwartungswert auf beiden Seiten nehmen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathbb{E}[(X+Y-\mathbb{E}[X+Y])^2] \\
&= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2 + (Y-\mathbb{E}[Y])^2 + 2(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] \\
&= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] + \mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}[Y])^2] + 2\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 0
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Definition von Varianz sowie Gleichung (2) verwenden.

(c) Wir verwenden, dass für unabhängige Zufallsvariablen X und Y auch sX und tY unabhängig sind. Damit folgt unmittelbar aus (a) und (b):

$$\mathrm{Var}(sX+tY) \overset{(b)}{=} \mathrm{Var}(sX) + \mathrm{Var}(tY) \overset{(a)}{=} s^2\mathrm{Var}(X) + t^2\mathrm{Var}(Y).$$

Aufgabe 2 – Die Jensensche Ungleichung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein zusammenhängender Definitionsbereich und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f heißt konvex, wenn sie „linksgekrümmt“ ist und konkav wenn sie „rechtsgekrümmt“ ist.[1] Eine Funktion ist konvex genau dann wenn ihre Negation konkav ist. Für eine formale Definition siehe: Wikipedia

(a) Entscheide (ohne Beweis) für folgende Funktionen, ob diese auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich konvex ist, konkav ist, beides ist oder weder noch.

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = x^2, \qquad f_3(x) = x^3, \qquad f_4(x) = \log(x), \qquad f_5(x) = \log^2(x).$$

(b) Sei f eine konvexe Funktion mit Definitionsbereich D. Argumentiere geometrisch, dass es für jedes $x_0 \in D$ eine lineare Funktion g gibt, sodass gilt:
   (i) $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in D$
   (ii) $f(x_0) = g(x_0)$.

(c) Schlussfolgere, dass für jede konvexe Funktion f und für jede Zufallsvariable X mit Werten im Definitionsbereich D von f gilt:

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X]).$$

Hinweis: Betrachte $x_0 = \mathbb{E}[X]$ und das zugehörige g aus der vorherigen Teilaufgabe.

(d) Zeige, dass analog für jede konkave Funktion f mit Definitionsbereich D und für jede Zufallsvariable X mit Werten in D gilt:

$$\mathbb{E}[f(X)] \leq f(\mathbb{E}[X]).$$

[1] Das „linksgekrümmt“ in Anführungszeichen lässt neben Linkskrümmungen (einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion) auch Linksknicke und geradlinige Verläufe zu.

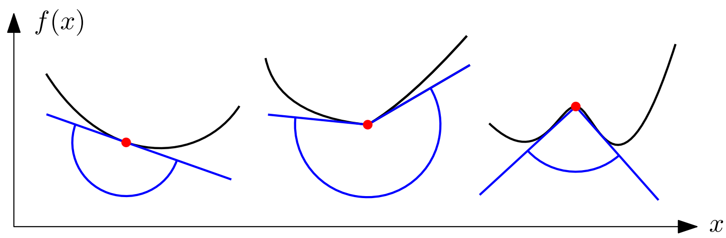
Die Ungleichung aus (c) sowie Varianten wie in (d) nennt man Jensensche Ungleichung.

Lösung 2

(a) Die Funktionen sind alle zweimal stetig differenzierbar. Wenn die zweite Ableitung überall nicht-negativ ist, dann ist die Funktion konvex, wenn sie überall nicht-positiv ist, dann ist die Funktion konkav.

- f_1 ist konvex und konkav
- f_2 ist konvex
- f_3 ist weder konvex noch konkav
- f_4 ist konkav
- f_5 ist weder konvex noch konkav

(b) Weil f linksgekrümmt ist, kann man am Funktionsgraphen von f an Stelle $(x_0, f(x_0))$ eine Tangente g anlegen, sodass f vollständig oberhalb von g verläuft.



Dass das geht sieht man folgendemaßen (illustriert im Bild): Man betrachtet unterhalb des Punktes $(x_0, f(x_0))$ (rot) auf dem Funktionsgraphen von f (schwarz) den Winkelbereich derjenigen Richtungen, die niemals über den den Funktionsgraphen hinausgehen (blau). Ist dieser Bereich kleiner als 180° (rechts im Bild), dann hat man einen Widerspruch zur Konvexität von f. Ist dieser Bereich größer 180° (Mitte) oder gleich 180° (links), dann gibt es mindestens eine Gerade durch $(x_0, f(x_0))$, die vermeidet über den Funktionsgraphen von f hinauszugehen.

(c) Sei $g(x)$ die Funktion aus (b) für $x_0 = \mathbb{E}[X]$. Dann gilt $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in D$ und $f(\mathbb{E}[X]) = g(\mathbb{E}[X])$. Weil g eine Gerade ist gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ sodass $g(x) = ax + b$. Es folgt

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq \mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b = g(\mathbb{E}[X]) = f(\mathbb{E}[X]).$$

(d) Weil $-f$ konvex ist folgt direkt aus (c):

$$\mathbb{E}[f(X)] = -\mathbb{E}[-f(X)] \overset{(c)}{\leq} -(-f(\mathbb{E}[X])) = f(\mathbb{E}[X]).$$

Aufgabe 3 – Analyse von Lossy Counting

Erinnerung: Lossy Counting ist ein einfacher Streaming Algorithmus, der die Länge m eines Streams approximativ zählt. Darin kommt ein Parameter $p \in (0,1]$ vor. Der Algorithmus selbst sowie die Art und Weise, wie er verwendet wird, ist rechts nochmal zu sehen. Beweise:

(a) $\mathbb{E}[\text{result}] = m$

(b) $\Pr[|\text{result} - m| \leq \varepsilon m] \geq 1 - 2\exp(-\varepsilon^2 pm/3)$.
Hinweis: Nutze die Chernoff-Schranke die in der Vorlesung (sowohl im Approximationsteil als auch im Streamingteil vorgekommen ist. Diese ergibt sich übrigens direkt aus zwei Korollaren von der Folie „Chernoff – Simpler Versions" des Concentration-Foliensatzes.

(c) $\mathbb{E}[\text{space}] \leq \log(1 + mp) + 1$.
Hinweis: Mit space bezeichnen wir den maximalen Speicherverbrauch, der für den Zustand Z von LossyCounting benötigt wird. Eine Zahl $i \in \mathbb{N}$ lässt sich mit $\lceil \log_2(i+1) \rceil$ Bits kodieren. Verwende die Jensensche Ungleichung aus Aufgabe 2.

```
Algorithm init:
    Z ← 0
    return Z
Algorithm update(Z, a):
    with probability p do
        Z ← Z + 1
    return Z
Algorithm result(Z):
    return Z/p
```

Verwendung:

```
Z ← init()
for i = 1 to m do
    Z ← update(Z, a_i)
return result(Z)
```

Lösung 3

(a) Seien $X_1, \ldots, X_m \sim \text{Ber}(p)$ unabhängige Zufallsvariablen, wobei X_i angibt, ob das $i$te Element des Streams zu einer Erhöhung des Zählers Z führt. Dann ist $X := \sum_{i=1}^m X_i$ der Wert von Z nach dem letzten Update. Die Schätzung des Algorithmus für m ist somit $\text{result} = X/p$. Daher gilt:

$$\mathbb{E}[\text{result}] = \mathbb{E}[X/p] = \tfrac{1}{p}\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^m X_i\Big] = \tfrac{1}{p}\sum_{i=1}^m \mathbb{E}[X_i] = \tfrac{1}{p}\sum_{i=1}^m p = m.$$

(b) Mit der genannten Chernoff Schranke ergibt sich

$$\begin{aligned}\Pr[|\text{result} - m| \geq \varepsilon m] &= \Pr[|X/p - m| \geq \varepsilon m] = \Pr[|X - mp| \geq \varepsilon mp] \\ &= \Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon \mathbb{E}[X]] \leq 2\exp(-\varepsilon^2 \mathbb{E}[X]/3) = 2\exp(-\varepsilon^2 mp/3).\end{aligned}$$

Die Behauptung ergibt sich durch Betrachten der Gegenwahrscheinlichkeit.

(c) Da Z monoton wächst ist der Speicherbedarf für Z ganz am Ende am größten, nämlich $\lceil \log_2(1 + X) \rceil$. Weil $f(x) = \log(1 + x)$ konkav auf $[0, \infty)$ ist, folgt mit der Jensenschen

Ungleichung

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{space}] = \mathbb{E}[\lceil \log_2(1+X) \rceil] &\leq \mathbb{E}[\log_2(1+X)] + 1 \\ &\overset{\text{Jensen}}{\leq} \log_2(1+\mathbb{E}[X]) + 1 = \log_2(1+mp) + 1.\end{aligned}$$