Karlsruher Institut für Technologie

Maximilian Katzmann
Hans-Peter Lehmann
Stefan Walzer

Übungsblatt 07

Randomisierte Algorithmik – Wintersemester 2023/2024

Aufgaben zur Vorlesung vom 07.12.2023
Abgabe im ILIAS bis 14.12.2023, 11:30 Uhr
Besprechung am 19.12.2023, 08:00 Uhr

Achte insbesondere bei handschriftlichen Abgaben auf Lesbarkeit. Die Abgabe erfolgt über das Übungsmodul im ILIAS. Gib Deine Ausarbeitungen in *einer* PDF-Datei ab.

Aufgabe 1 – Nicht klar, was man da erwarten soll...

Wir betrachten zwei Bitstrings B_1 und B_2, welche jeweils aus n unabhängigen und gleichverteilten Zufallsbits bestehen. Sei L die Länge einer längsten Teilfolge an Bits die die beiden Bitstrings gemein haben. Uns interessiert also die Länge eines längsten Bitstrings, den man sowohl aus B_1 als auch aus B_2 erhält indem man jeweils beliebige Bits entfernt.

Beispielsweise ist bei $B_1 = \texttt{01101011}$ und $B_2 = \texttt{01010101}$ eine längste gemeinsame Teilfolge `0101011` mit Länge 7, weil man bei B_1 das dritte Bit und bei B_2 das 7. Bit löschen kann, um jeweils diesen String zu erhalten.

a) Zeige, dass $\mathbb{E}[L] \geq n/2$.

b) Sei $c < 1$ eine beliebige Konstante. Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, dass sich L um mehr als $c \cdot n$ vom Erwartungswert unterscheidet, mindestens exponentiell in n schrumpft.

c) Recherchiere online, was über die erwartete Länger einer solchen „Longest Common Subsequence" bekannt ist.

Aufgabe 2 – Seh ich nicht...

An deinem Geburtstag wirst du mit einer Party überrascht. Essen, Getränke und Gesellschaft sind gut und mithilfe eines Glücksrades wurde sogar für Unterhaltung gesorgt.

Leider macht dir dein neu-errungenes Alter zu schaffen und du kannst gar nicht erkennen, welche Preise auf den Feldern des Rades vermerkt sind. Dir wurde jedoch versichert, dass jeder Dreh mit einem nicht-negativen Geldpreis einhergeht bei dem man 1€ erwarten kann.

Diesen Spaß möchtest du dir nicht entgehen lassen und planst das Rad 100 mal zu drehen. Um rauszufinden, ob sich das Ganze auch lohnt, möchtest du abschätzen, wie wahrscheinlich es ist, dass du am Ende nur 50€ oder weniger bekommst. Sei q die zugehörige Wahrscheinlichkeit.

a) Zeige, dass q Werte beliebig nahe an 1 annehmen kann, insofern wir nichts weiter über das Rad wissen.

Inzwischen wurde dir nun zumindest einmal verraten, dass der maximale Gewinn bei 5€ liegt.

b) Benutze, die Methode der beschränkten Differenzen, um die *Hoeffding-Ungleichung* herzuleiten, welche folgendes besagt. Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ mit $X_i \in [a_i, b_i]$ für alle $i \in [n]$ gilt für $X = \sum_{i=1}^n X_i$ und alle $t > 0$, dass

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq 2 \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)$$

c) Benutze die Hoeffding-Ungleichung, um eine obere Schranke an die Wahrscheinlichkeit q zu bestimmen.

Aufgabe 3 – Bonus – Average-Case Analyse

Um das *Minimum Vertex Cover* Problem zu lösen, kommen in der Praxis häufig *Reduktionsregeln* zum Einsatz, die einem helfen die Eingabe zu vereinfachen. Eine einfache Reduktionsregel sagt beispielsweise Folgendes: Statt einen Grad-1-Knoten v ins Cover aufzunehmen, ist es immer mindestens genau so gut, den einen Nachbarn u von v zu nehmen (beide decken die Kante $\{u, v\}$ ab, Knoten u aber ggf. noch mehr). Somit können iterativ Nachbarn von Grad-1-Knoten ins Cover aufgenommen und zusammen mit ihren inzidenten Kanten aus der Eingabe entfernt werden, wodurch die Instanz vereinfacht wird.

Eine Verallgemeinerung dieser Regel ist die *Dominanzregel*. Ein Knoten u *dominiert* einen Nachbarn v, wenn $N(v) \setminus \{u\} \subseteq N(u)$, also wenn alle Nachbarn von v auch welche von u sind. Bei der Dominanzreduktion werden nun iterativ alle dominierenden Knoten ins Vertex Cover aufgenommen und zusammen mit ihren inzidenten Kanten aus der Eingabe entfernt.

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass diese Reduktionsregel auf eindimensionalen GIRGs mit hoher Wahrscheinlichkeit alle hochgradigen Knoten entfernt. (Wie auch in der Vorlesung befassen wir uns aber mit Gewichten statt Graden.)

Zur Erinnerung: Wir erhalten einen 1D-GIRG, indem wir für jeden der n Knoten unabhängig eine Position $x_v \sim \mathcal{U}([0, 1])$ und ein Gewicht $w_v \sim \mathrm{Par}(\tau - 1, 1)$ ($\tau \in (2, 3)$) ziehen und zwei Knoten $u = (x_u, w_u), v = (x_v, w_v)$ genau dann mit einer Kante verbinden, wenn $\min\{|x_u - x_v|, 1 - |x_u - x_v|\} \leq \lambda w_u w_v / n$, für eine Konstante $\lambda > 0$.

a) Sei u ein Knoten mit Gewicht $w_u \geq n/(2\lambda)$. Zeige, dass deterministisch gilt: $\deg(u) = n - 1$, um anschließend schlussfolgern zu können, dass u dominierend ist.

Sei $u = (x_u, w_u)$ nun ein Knoten mit $w_u < n/(2\lambda)$ und $v = (x_v, w_v)$ ein Knoten mit $w_v \leq w_u$. Dann ist der Nachbarschaftsbereich von v komplett in dem von u enthalten, solange $\mathrm{dist}(x_u, x_v) \leq \lambda(w_u - w_v)/n$. In diesem Fall dominiert u also Nachbar v.

b) Zeige, dass u erwartet einen konstanten Anteil seiner Nachbarn dominiert, also dass die erwartete Anzahl dominierter Nachbarn in $\Theta(w_u)$ ist.

c) Zeige, dass mit Wahrscheinlichkeit $1 - O(1/n)$ alle Knoten u mit Gewicht $w_u \in \omega(\log(n))$ dominieren.