BLATT 7

1a) Wir betrachten für die Teilfolge nur Zeichen, bei denen B_1 und B_2 an der gleichen Position gleich sind. Offensichtlich ist das eine untere Schranke an beliebige Teilfolgen.

$$\mathbb{E}(L) \geq \mathbb{E}(\#\text{Positionen mit } B_1[i] = B_2[i])$$

$$= n \cdot \mathbb{E}(B_1[0] = B_2[0]) = n \cdot \frac{1}{2} = n/2$$

1b) Wir wollen die Methode beschränkter Differenzen anwenden. Wähle Funktion

$$f(B_1, B_2) = f(B_{1,1} \dots, B_{1,n}, B_{2,1} \dots B_{2,n})$$

so, dass sie L ausrechnet, also die Länge der längsten Teilfolge.

Ändert sich 1 Bit in einem der Bitstrings, wird die Teilsequenz im schlimmsten Fall 1 kürzer (ohne dieses Bit). Im besten Fall wird sie 1 länger (würde sie 2 länger werden, hätte es vorher schon eine längere Sequenz gegeben). Keine Änderung ist auch möglich (z.B. $10, 01 \; L=1 \Rightarrow 11, 01 \; L=1$).

Also gilt $\Delta_i = 1$ und $\Delta = \sum_i \Delta_i^2 = 2n$

Methode der beschränkten Differenzen:

$$P(|f(B_1, B_2) - \mathbb{E}(f)| \geq \overbrace{cn}^{t}) \leq 2e^{\frac{-2(cn)^2}{\Delta}} = 2e^{-c^2 n}$$

schrumpft exponentiell in n.

1c) Der genaue Wert von $\mathbb{E}(L)$ ist nicht bekannt. Es gibt upper bound und lower bound, die nahe beieinander liegen.

$0.77391 \leq \frac{\mathbb{E}(L)}{n} \leq 0.83763$ (empirisch $\frac{\mathbb{E}(L)}{n} \approx 0.812$)

Aber der exakte Wert ist unbekannt.

Mit 2 (bzw. konstant) Eingabesequenzen lösbar über dynamic programming, für beliebige Anzahl NP-schwer.

2a) Für eine Konstante $k > 50$ teile das Glücksrad in k Felder auf. $(k-1)$ Felder haben Gewinn $0€$ und das letzte Feld hat Gewinn $k€$. Sei X die Auszahlung nach einem Drehen. Dann ist

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{k} \cdot \left(0€ \cdot (k-1) + k€ \cdot 1 \right) = 1€$$

Aber

$$q = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 50 \right) = \mathbb{P}\left(\text{alle } X_i = 0 \right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{100} \to 1 \quad \text{für } k \to \infty$$

2b) Verwende für die Funktion f in der Methode der beschränkten Differenzen die Summationsfunktion.

Weil die Zufallsvariablen zwischen a_i und b_i liegen, kann sich durch Verändern einer Variable die Summe (also f) maximal um $b_i - a_i$ ändern, also $\Delta_i = b_i - a_i$

Dadurch ist $\Delta = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2$

Daraus folgt direkt die Hoeffding-Ungleichung.

2c) Sei X_i die Zufallsvariable, die den Gewinn des i-ten Drehens annimmt.
Da der maximale Gewinn 5€ ist, gilt $X_i \in [0,5]$. Sei $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$
Mit der Hoeffding-Ungleichung und $t = 50$ erhalten wir:

$$q \leq \mathbb{P}\left[|X - \mathbb{E}(X)| \geq t\right] = \mathbb{P}\left[|X - 100| \geq 50\right]$$

$$\leq 2\exp\left(-\frac{2 \cdot 50^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right) = 2\exp\left(-\frac{2 \cdot 50^2}{100 \cdot 5^2}\right)$$

$$= 2\exp(-2) \approx 0{,}27$$

(mit der Variante ohne Betrag lässt sich nochmal ein Faktor 2 rausholen)