

Übungsblatt 06

Randomisierte Algorithmik – Wintersemester 2023/2024

Aufgaben zur Vorlesung vom 30.11.2023
Abgabe im ILIAS bis 14.12.2023, 11:30 Uhr
Besprechung am 19.12.2023, 08:00 Uhr

Achte insbesondere bei handschriftlichen Abgaben auf Lesbarkeit. Die Abgabe erfolgt über das Übungsmodul im ILIAS. Gib Deine Ausarbeitungen in *einer* PDF-Datei ab.

Aufgabe 1 – Unbegrenzte Macht Varianz!

Am Ende des Foliensatzes zu kontinuierlichen Wahrscheinlichkeiten wird die Pareto-Verteilung eingeführt. Verwende deren Dichtefunktion, um herzuleiten für welche Werte α eine Zufallsvariable $X \sim \text{Par}(\alpha, x_{\min})$ endlichen Erwartungswert aber unendliche Varianz hat.

Aufgabe 2 – Memory

In der Vorlesung haben wir die Exponentialverteilung kennengelernt und gesehen, dass diese gedächtnislos ist.

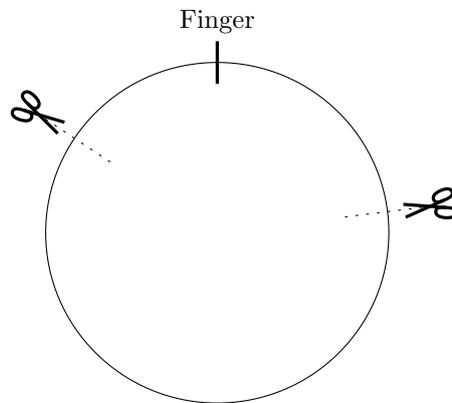
- a) Zeige, dass auch die geometrische Verteilung gedächtnislos ist. Also dass für eine Zufallsvariable $X \sim \text{Geo}(p)$ gilt, dass $\Pr[X = n + k \mid X > n] = \Pr[X = k]$.
Hinweis: Zur Erinnerung: $\text{Geo}(p)$ ist eine Verteilung auf $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ wobei für $X \sim \text{Geo}(p)$ gilt, dass $\Pr[X = i] = p(1 - p)^{i-1}$.

Wir wollen uns nun klar machen, dass die Exponentialverteilung das kontinuierliche Gegenstück zur geometrischen Verteilung ist. Seien dazu $X_n \sim \text{Geo}(\lambda/n)$, $Y_n = X_n/n$ und $Z \sim \text{Exp}(\lambda)$.

- b) Zeige, dass für alle $t > 0$ gilt, dass $\Pr[Y_n > t] \rightarrow \Pr[Z > t]$ wenn $n \rightarrow \infty$.

Aufgabe 3 – Bonus – Zirkelschluss

Du hast den Einheitskreis auf 12 Uhr zwischen den Fingern eingeklemmt. Nun werden unabhängig und uniform gleichverteilt auf dem Kreis zwei Schnitte gesetzt, die den Kreis in zwei Teile teilen.



- Bestimme den erwarteten Winkelabstand (der kleinere Winkel) zwischen den Schnitten.
- Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass du nach dem Schnitt das größere Teilstück in der Hand hast.

Hinweis: Du kannst davon ausgehen, dass deine Finger beliebig dünn sind.