Karlsruher Institut für Technologie

Maximilian Katzmann
Hans-Peter Lehmann
Stefan Walzer

Übungsblatt 05

Randomisierte Algorithmik – Wintersemester 2023/2024

Aufgaben zur Vorlesung vom 23.11.2023
Abgabe im ILIAS bis 30.11.2023, 11:30 Uhr
Besprechung am 05.12.2023, 08:00 Uhr

Achte insbesondere bei handschriftlichen Abgaben auf Lesbarkeit. Die Abgabe erfolgt über das Übungsmodul im ILIAS. Gib Deine Ausarbeitungen in *einer* PDF-Datei ab.

Aufgabe 1 – Ein Kinderspiel

Alice und Bob spielen ein Spiel auf einer Reihe von Feldern $0, 1, 2, ..., n$. Zu Beginn liegen k Steine auf Feld 0. Dann wird abwechselnd gespielt, wobei Alice beginnt. In einem Zug bestimmt sie zwei disjunkte Teilmengen der Steine (die zusammen nicht alle Steine umfassen müssen). Danach ist Bob am Zug, der eine der beiden Teilmengen auswählt und die zugehörigen Steine entfernt. Die Steine der anderen Teilmenge werden jeweils um ein Feld vorwärts gerückt. Alice gewinnt, wenn ein Stein das Feld n erreicht. Bob gewinnt, wenn nur noch ein Stein übrig bleibt, der nicht auf Feld n liegt.

a) Gib eine Gewinnstrategie für Alice an, wenn $k \geq 2^n$.

b) Benutze die probabilistische Methode, um zu zeigen, dass es eine Gewinnstrategie für Bob gibt wenn $k < 2^n$.

Aufgabe 2 – Jetzt wird es mir zu bunt!

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Für jeden Knoten $v \in V$ gibt es eine Palette an Farben $C(v)$, wobei $|C(v)| = 8k$ für ein $k \geq 1$. Zudem wissen wir, dass für jeden Knoten $v \in V$ und jede Farbe $c \in C(v)$ gilt, dass höchstens k Nachbarn auch c in ihrer Palette haben. Also, $|\{u \in N(v) \mid c \in C(u)\}| \leq k$.

Benutze Lovász Local Lemma, um zu zeigen, dass eine Knotenfärbung von G existiert, die die Paletten der Knoten berücksichtigt (jeder Knoten bekommt eine Farbe aus seiner Palette zugewiesen) und keinen zwei Endpunkten einer Kante die gleiche Farbe zuweist. *Hinweis*: Für eine Kante $\{u, v\} \in E$ möchte man sich vielleicht das Ereignis $A_{u,v,c}$ anschauen, was besagt, dass sowohl u als auch v die Farbe c haben.

Aufgabe 3 – Bonus – Unabhängigkeitserklärung

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit n Knoten. Wir wollen mit Hilfe der probabilistischen Methode zeigen, dass G ein Independent Set der Größe $\sum_{v \in V} 1/(\deg(v) + 1)$ enthält.

a) Wir starten mit einer zufällig gleichverteilten Permutation der Knoten. Beschreibe, wie man daraus ein Independent Set ablesen kann.

b) Verwende die probabilistische Methode, um zu zeigen, dass G ein Independent Set der gewünschten Größe enthält.
Hinweis: Blatt 01 Aufgabe 2 (Magic: The Shuffling) könnte sich hier als nützlich erweisen.