BLATT 5

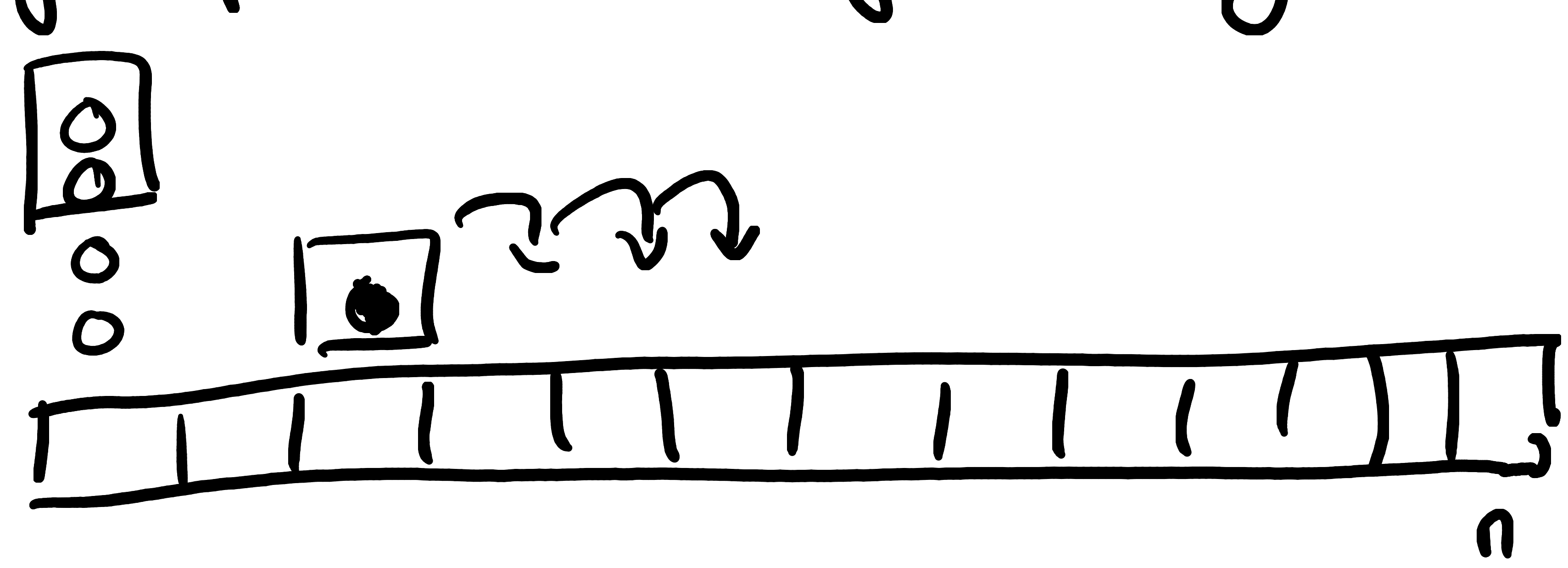
1a) Halbiere immer die Menge der Steine. Da es n Schritte gibt und $\geq 2^n$ Steine, bleibt am Ende mindestens einer übrig, der im letzten Feld landet.

1b) Änderungen zur Aufgabe

- Gewinnbedingung: Alice: ≥ 1 Stein auf n
  Bob: keine Kugeln mehr übrig.
- Alice wählt 2 disjunkte Mengen, nicht beide leer.
- Jede Menge kann von verschiedenen Positionen kommen

- Keine Kugeln übrig $\Rightarrow$ Bob gewinnt
  Kugeln übrig 1 hinten $\Rightarrow$ Alice gewinnt
  0 hinten $\Rightarrow$ Spiel geht weiter

Nicht funktionierende Strategie:
Immer größere Menge weg:



Alice gewinnt

1b) Analyse

Alice spielt so lange weiter bis alle Kugeln weg oder bei n sind
(ändert Gewinn nicht)

Bobs Strategie: Wähle Menge zufällig

Suchen uns eine Kugel aus.

Gesucht: $\mathbb{P}$(diese Kugel erreicht n)

Spiel geht immer weiter, heißt irgendwann ist die Kugel ausgewählt. Mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ geht sie weiter.

$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{erreicht } n) = \frac{1}{2^n}$

$\mathbb{E}(\#\text{Kugeln in } n) = k \cdot \mathbb{P}(\text{erreicht } n) = k \cdot \frac{1}{2^n} < 1$

$\Rightarrow$ Gibt Strategie, sodass $\#$Kugeln in $n < 1$

$\Rightarrow$ Gibt Strategie mit Bob gewinnt.

2) Wähle alle Farben zufällig aus jew. Mengen.

Wir wollen zeigen, dass

$$\mathbb{P}\left[\bigcap \neg A_{uvc}\right] > 0$$

„Invalide" Events (uv nicht verbunden, $c \notin C(u)$, $c \notin C(v)$)

sind leer, heißt die interessieren uns nicht.

Nehme bestimmte Farbe in $C(u) \cap C(v)$, $u \in N(v)$

$$\mathbb{P}[A_{uvc}] = \frac{1}{8k} \cdot \frac{1}{8k} = \frac{1}{64k^2}$$

zufällig gefärbt

$$\Rightarrow \max \mathbb{P}[A_{uvc}] = \frac{1}{64k^2} =: p$$

A_{uvc} ist abhängig von

$$\{A_{uv'c'} \mid v' \in N(u) \wedge \underbrace{c' \in C(u)}_{8k \text{ Möglichk.}} \cap \underbrace{C(v')}_{\le k \text{ Mögl.}}\}$$

$$\cup \{A_{u'vc} \mid \text{analog}\}$$

Doppelt

$\rightsquigarrow$ abhängig von $\le 2 \cdot 8k \cdot k = 16k^2 =: d$

$4dp = 1 \le 1$

$\rightsquigarrow$ Lovász Local Lemma $\Rightarrow \mathbb{P}\left[\bigcap \neg A_{uvc}\right] > 0$