BLATT 4

1a) Sagen wir zuerst einmal, alle X_i kommen aus gleicher Verteilung $X_i \sim Ber(p)$

$\Rightarrow p = \frac{\mathbb{E}(X)}{n}$

Fall 1: $f(n) > n$

$$\mathbb{P}(X \geq (1+\varepsilon) f(n)) \leq \mathbb{P}(X \geq n) = 0 \leq e^{-\frac{\varepsilon^2}{3} f(n)}$$ ✓

Fall 2: $f(n) \leq n$

Wähle $q = \frac{f(n)}{n}$, dann gilt $q \in [\underset{f(n) > \mathbb{E}(X)}{p}, \underset{f(n) \leq n}{1}]$

Definiere $X_i' \sim Ber(q)$ und $X' = \sum X_i'$

Dann: $\mathbb{E}(X') = f(n)$

Benutze Coupling von X_i, X_i' und X, X'

Dann gilt:

$$\mathbb{P}(X \geq (1+\varepsilon) f(n)) \overset{\text{coupling}}{\leq} \mathbb{P}(X' \geq (1+\varepsilon) f(n))$$
$$= \mathbb{P}(X' \geq (1+\varepsilon)\mathbb{E}(X')) \underset{\text{Chernoff}}{\leq} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{3} \cdot \mathbb{E}(X')\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{3} \cdot f(n)\right)$$ ✓

1a) Erweiterung, weil nicht explizit dran steht, dass alle X_i gleiche Verteilung haben.

$\Rightarrow$ Studis in Übung live machen lassen

Fall 1: $f(n) > n$ (wie vorher) ✓

Fall 2: $f(n) \leq n$

$$X_i \sim \mathrm{Ber}(p_i), \quad \sum p_i = \mathbb{E}(X)$$

Bestimme $q_i \in [p_i, 1]$ sodass

$\sum q_i = f(x)$ durch lineares

„Auffüllen" der q_i. Das geht, weil

$f(n) \leq n$.

Definiere wieder $X_i' \sim \mathrm{Ber}(q_i)$ und $X' = \sum X_i'$

Coupling und gleiche Abschätzung wie vorher liefert Ergebnis.

(siehe Text unter den chernoff bounds auf Folien: works for different success probabilities)

1b)

$x \in O(f(n)) \Rightarrow x \le k f(n)$ ffa. n

$f(n) \in \Omega(\log n) \Rightarrow f(n) \ge \ell \cdot \log(n)$ ffa. n

sucht sich Nutzer implizit aus, wenn er f aussucht

können wir uns aussuchen, abhängig von allem außer n

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(x \in O(f(n))) &= \mathbb{P}(x \le k \cdot f(n)) \\
&\ge \mathbb{P}(x < k \cdot f(n)) \\
&= 1 - \mathbb{P}(x \ge k f(n)) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(x \ge (1+1)\tfrac{k}{2} f(n)\right) \\
&\overset{\text{Chernoff}}{\ge} 1 - e^{-\frac{1^2}{3}\frac{k}{2} f(n)} \\
&\ge 1 - e^{-\frac{1}{3}\frac{k}{2}\ell \log(n)} \\
&= 1 - n^{-\frac{1}{3}\frac{k}{2}\ell} \\
&\overset{!}{\ge} 1 - n^{-c}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ wähle $k = \max\left(\frac{6c}{\ell}, \underbrace{2}_{\text{damit Chernoff geht}}\right)$

2) Wenn nie etwas ausgebremst wird, dauert es n/m Schritte.

Alle Jobs, die ausgebremst werden, brauchen mit Wahrscheinlichkeit p zusätzlich noch $(k-1)$.

Seien X_i die Zufallsvariablen, die zeigen, ob Job i ausgebremst wird.

Zu zeigen: Es sind meißtens weniger als $\log(nm)$, die ausgebremst werden.

$$X = \sum_{i=1}^{n/m} X_i \qquad \mathbb{E}(X) = \frac{n}{m} \cdot \mathbb{E}(X_i) = \frac{n}{m} \cdot p = \frac{\log(nm)}{6}$$

$$\mathbb{P}(\text{alle fertig}) = 1 - \mathbb{P}\Big(\bigvee_m \text{Maschine nicht fertig}\Big)$$

Union bound

$$\geq 1 - m \cdot \mathbb{P}(\text{Maschine nicht fertig})$$

$$= 1 - m \cdot \mathbb{P}(X \geq \underbrace{\log(nm)}_{t = 6\,\mathbb{E}(X)})$$

Chernoff

$$\geq 1 - m \cdot 2^{-\log(nm)}$$

$$= 1 - \frac{1}{n}$$