Maximilian Katzmann
Hans-Peter Lehmann
Stefan Walzer

Übungsblatt 03

Randomisierte Algorithmik – Wintersemester 2023/2024

Aufgaben zur Vorlesung vom 09.11.2023
Abgabe im ILIAS bis 16.11.2023, 11:30 Uhr
Besprechung am 21.11.2023, 08:00 Uhr

Achte insbesondere bei handschriftlichen Abgaben auf Lesbarkeit. Die Abgabe erfolgt über das Übungsmodul im ILIAS. Gib Deine Ausarbeitungen in *einer* PDF-Datei ab.

Aufgabe 1 – Niemand wird zurückgelassen!

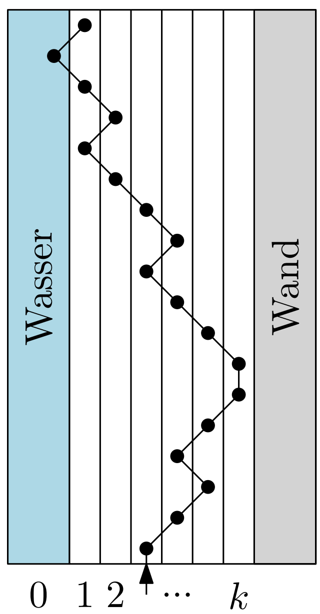
Wir betrachten Erdős-Rényi Graphen $G(n, p)$ und interessieren uns für das Ereignis $\mathcal{E}_p$, dass ein solcher Graph zusammenhängend ist, also dass es von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten einen Pfad gibt.

Benutze die Kopplung-Technik, um zu zeigen, dass $\Pr[\mathcal{E}_p]$ monoton in p ist. Also, dass für $p \leq p'$ gilt $\Pr[\mathcal{E}_p] \leq \Pr[\mathcal{E}_{p'}]$.

Aufgabe 2 – Let me entertain you...

In einem Erlebnispark hat man festgestellt, dass die größte Attraktion eine ist, die man nicht selbst erlebt. Nein, man schaut zu, wie andere dies tun. Der Ausgang einer schwindelerregenden Achterbahn führt über einen Steg der in k Spuren eingeteilt ist. Auf einer Seite des Steges (neben der k-ten Spur) ist eine Wand, die einen in der Bahn hält. Auf der anderen Seite (neben der 1. Spur) ist ein Wasserbecken. Nach einer Fahrt taumeln die Fahrgäste über den Steg und wechseln in jedem Schritt jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/2 in eine der benachbarten Spuren. Gibt es nur eine benachbarte Spur (an der Wand oder im Wasser), gilt auch die eigene Spur als benachbart. Einige Gäste machen den ganzen Tag nichts anderes, als dieses Spektakel zu beobachten.

Sei X_i die Spur in der sich eine Person im i-ten Schritt befindet. Für $s \in [k]$ ist $\Pr[X_t = 0 \mid X_0 = s]$ die Wahrscheinlichkeit in Schritt t im Wasser zu sein wenn man in Spur s gestartet ist. Benutze die Kopplung-Technik, um zu zeigen, dass für $1 \leq s \leq s' \leq k$ gilt: $\Pr[X_t = 0 \mid X_0 = s] \geq \Pr[X_t = 0 \mid X_0 = s']$.



Aufgabe 3 – Bonus – Tightness

In der Vorlesung haben wir die Coupling Inequality kennen gelernt, die besagt, dass die Total Variation Distance zweier diskreter Zufallsvariablen X und Y beschränkt ist durch $d_{TV}(X, Y) \leq \Pr[X' \neq Y']$ für ein beliebiges Coupling (X', Y') von X und Y.

Zeige, dass es ein Coupling (X', Y') gibt, sodass $d_{TV}(X, Y) = \Pr[X' \neq Y']$.
Hinweis: Ggf. hilft es, sich mal die Verteilungen zweier Zufallsvariablen aufzuzeichnen und sich vor Augen zu führen, was die Total Variation Distance genau misst.