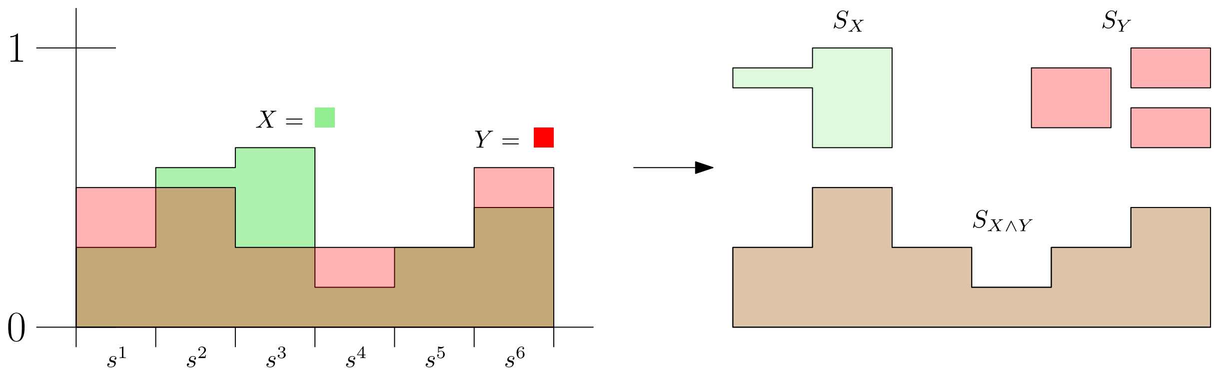
Aufgabe 3

Sei S die Grundmenge des Wahrscheinlichkeitsraums aus der X und Y stammen. Falls diese aus anderen Wahrscheinlichkeitsräumen stammen, ist S die Vereinigung der Grundmengen der einzelnen Wahrscheinlichkeitsräumen (aber dann wäre die ganze Aufgabe ziemlich trivial).

Für jedes $s \in S$ gilt entweder $\mathbb{P}[X = s] \geq \mathbb{P}[Y = s]$ oder $\mathbb{P}[X = s] < \mathbb{P}[Y = s]$. Wir definieren uns für jedes $s \in S$ ein Rechteck $s_{X \wedge Y}$ der Größe $1 \times \min(\mathbb{P}[X = s], \mathbb{P}[Y = s])$. Falls $\mathbb{P}[X = s] > \mathbb{P}[Y = s]$, so definieren wir uns zusätzlich s_X als Rechteck der Größe $1 \times \mathbb{P}[X = s] - \mathbb{P}[Y = s]$ ansonsten ist $s_X = \emptyset$. Analog auch s_Y.

Insgesamt definieren wir uns dann

$$S_{X \wedge Y} = \bigcup s_{X \wedge Y}$$
$$S_X = \bigcup s_X$$
$$S_Y = \bigcup s_Y$$



Dann definieren wir uns die Zufallsvariablen X' und Y' und ziehen deren Werte wie folgt:

Wir ziehen einen zufälligen Punkt p in $S_X \cup S_{X \wedge Y}$. Sollte der Punkt in $S_{X \wedge Y}$ landen, dann landet er vor allen Dingen in einem $s_{X \wedge Y}$ und in diesem Fall setzen wir $X' = Y' = s$. Landet der Punkt in S_X, so landet er in einem s_X und wir setzen $X' = s$ und wählen einen zufälligen Punkt in S_Y und setzen $Y' = s$ für das zugehörige getroffene s_Y.

Dann gilt

$$\mathbb{P}[X' = s] = \mathbb{P}[p \in s_{X \wedge Y} \cup s_X] = \frac{\mathrm{vol}(s_{X \wedge Y}) + \mathrm{vol}(s_X)}{\mathrm{vol}(S_{X \wedge Y}) + \mathrm{vol}(S_X)} = \frac{\mathbb{P}[X = s]}{1} = \mathbb{P}[X = s]$$

Für $\mathbb{P}[Y' = s]$ machen wir eine Fallunterscheidung, ob $\mathbb{P}[Y = s] > \mathbb{P}[X = s]$ oder nicht :

- Fall 1: $\mathbb{P}[Y = s] \leq \mathbb{P}[X = s]$ Dann kann $\mathbb{P}[Y' = s]$ nur erreicht werden, indem unser Punkt in $s_{X \wedge Y}$ landet. Also

$$\mathbb{P}[Y' = s] = \mathbb{P}[p \in s_{X \wedge Y}] = \frac{\mathrm{vol}(s_{X \wedge Y})}{\mathrm{vol}(S_{X \wedge Y}) + \mathrm{vol}(S_X)} = \frac{\mathbb{P}[Y = s]}{1} = \mathbb{P}[Y = s]$$

- Fall 2: $\mathbb{P}[Y = s] > \mathbb{P}[X = s]$ Dann kann $\mathbb{P}[Y' = s]$ erreicht werden, indem unser Punkt entweder in $s_{X \wedge Y}$ landet oder in S_X landet und der zweite Punkt in s_Y landet. Also

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[Y' = s] &= \mathbb{P}[(p \in s_{X \wedge Y}) \vee (p \in S_X \wedge \overline{p} \in s_Y)] \\
&= \mathbb{P}[p \in s_{X \wedge Y}] + \mathbb{P}[p \in S_X \wedge \overline{p} \in s_Y] \\
&= \frac{\mathrm{vol}(s_{X \wedge Y})}{\mathrm{vol}(S_{X \wedge Y}) + \mathrm{vol}(S_X)} + \frac{\mathrm{vol}(S_X)}{\mathrm{vol}(S_{X \wedge Y}) + \mathrm{vol}(S_X)} \cdot \frac{\mathrm{vol}(s_Y)}{\mathrm{vol}(S_Y)} \\
{\scriptstyle \mathrm{vol}(S_X) = \mathrm{vol}(S_Y) = 1 - \mathrm{vol}(S_{X \wedge Y})} &= \frac{\mathrm{vol}(s_{X \wedge Y})}{\mathrm{vol}(S_{X \wedge Y}) + \mathrm{vol}(S_X)} + \frac{\mathrm{vol}(s_Y)}{\mathrm{vol}(S_{X \wedge Y}) + \mathrm{vol}(S_X)} \\
&= \frac{\mathbb{P}[X = s]}{1} + \frac{\mathbb{P}[Y = s] - \mathbb{P}[X = S]}{1} = \mathbb{P}[Y = s]
\end{aligned}
$$

Also sind X' und Y' jeweils Kopplungen von X und Y. Nun gilt ebenfalls, dass $X' = Y'$ genau dann gilt, wenn $p \in S_{X \wedge Y}$. Da ansonsten in jeweils S_X oder S_Y gezogen wird und für ein gegebenes $s \in S$ entweder s_X oder s_Y leer ist (da entweder $\mathbb{P}[X = s] \geq \mathbb{P}[Y = s]$ oder $\mathbb{P}[X = s] < \mathbb{P}[Y = s]$).

Nun gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[X' = Y'] = \mathbb{P}[p \in S_{X \wedge Y}] &= \frac{\mathrm{vol}(S_{X \wedge Y})}{\mathrm{vol}(S_{X \wedge Y}) + \mathrm{vol}(S_X)} \\
&= \frac{\sum_{s \in S} \min(\mathbb{P}[X = s], \mathbb{P}[Y = s])}{1} = \sum_{s \in S} \min(\mathbb{P}[X = s], \mathbb{P}[Y = s])
\end{aligned}
$$

Sei nun $S^X = \{s \in S \mid \mathbb{P}[X = s] > \mathbb{P}[Y = s]\}$ und $S^Y = S \setminus S^X$ wie in der Vorlesung.

$$
\begin{aligned}
2d_{\mathrm{TV}} &= \sum_{s \in S} |\mathbb{P}[X' = s] - \mathbb{P}[Y' = s]| \\
&= \underbrace{\sum_{s \in S^X} \mathbb{P}[X' = s] - \mathbb{P}[Y' = s]}_{\text{grün}} + \underbrace{\sum_{s \in S^Y} \mathbb{P}[Y' = s] - \mathbb{P}[X' = s]}_{\text{rot}} \\
{\scriptstyle \text{“grün + rot = alles - beige“}} &= \underbrace{\sum_{s \in S^X} \mathbb{P}[X' = s] + \sum_{s \in S^Y} \mathbb{P}[Y' = s]}_{\text{alles}} - \underbrace{\sum_{s \in S} \min(\mathbb{P}[X' = s], \mathbb{P}[Y' = s])}_{\text{beige}} \\
{\scriptstyle \text{“beige ist genau } \mathbb{P}[X' = Y']\text{“}} &= \left(1 - \sum_{s \in S^Y} \mathbb{P}[X' = s]\right) + \left(1 - \sum_{s \in S^X} \mathbb{P}[Y' = s]\right) - \mathbb{P}[X' = Y'] \\
&= 2 - \underbrace{\left(\sum_{s \in S^Y} \mathbb{P}[X' = s] + \sum_{s \in S^X} \mathbb{P}[Y' = s]\right)}_{\text{auch beige!}} - \mathbb{P}[X' = Y'] \\
&= 2 - 2\mathbb{P}[X' = Y'] \\
&= 2(1 - \mathbb{P}[X' = Y']) \\
&= 2(\mathbb{P}[X' \neq Y'])
\end{aligned}
$$

und damit $d_{\mathrm{TV}} = \mathbb{P}[X' \neq Y']$.