Karlsruher Institut für Technologie

Maximilian Katzmann
Hans-Peter Lehmann
Stefan Walzer

# Übungsblatt 01

## Randomisierte Algorithmik – Wintersemester 2023/2024

Aufgaben zur Vorlesung vom 02.11.2023
**Abgabe im ILIAS bis 09.11.2023, 11:30 Uhr**
Besprechung am 21.11.2023, 08:00 Uhr

Achte insbesondere bei handschriftlichen Abgaben auf Lesbarkeit. Die Abgabe erfolgt über das Übungsmodul im ILIAS. Gib Deine Ausarbeitungen in *einer* PDF-Datei ab.

## Aufgabe 1 – Doppelt Falsch

Wir betrachten einen Monte-Carlo Algorithmus mit zweiseitigem Fehler, der ein Entscheidungsproblem mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit von höchstens $1/2-\varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ löst. Durch „Verringerung der Fehlerwahrscheinlichkeit" (Probability Amplification) wollen wir den Fehler reduzieren, indem wir uns nach $t$ unabhängigen Ausführungen für die Antwort entscheiden, die am häufigsten ausgegeben wurde.

Zeige, dass die Fehlerwahrscheinlichkeit höchstens $e^{-2t\varepsilon^2}$ ist.
*Hinweis*: $\sum_{i=0}^{t/2} \binom{t}{i} \leq 2^t$.

## Aufgabe 2 – Pfadfinder

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G$ mit $n$ Knoten. Gesucht ist ein Pfad der Länge $k$, der keinen Knoten mehrfach besucht. Der naive Brute-Force Ansatz hat eine Laufzeit von $O(n^k)$. Wir betrachten einen einfachen, randomisierten Ansatz, der wie folgt funktioniert. Im ersten Schritt wird jedem Knoten $v$ ein Label $L(v)$ zufällig gleichverteilt aus $[k]$ zugewiesen. Im zweiten Schritt wird von jedem Knoten $v$ mit $L(v) = 1$ eine modifizierte Breitensuche gestartet, die nur Pfade $(v = v_1, v_2, ..., v_k)$ verfolgt bei denen Knoten $v_i$ das Label $L(v_i) = i$ hat.

a) Zeige, dass es sich dabei um einen Monte-Carlo Algorithmus mit einseitigem Fehler und einer Erfolgswahrscheinlichkeit von mindestens $1/k^k$ handelt.

b) Wende „Verringerung der Fehlerwahrscheinlichkeit" an, um eine Erfolgswahrscheinlichkeit von $1 - 1/n$ zu erhalten.

## Aufgabe 3 – Bonus: Ein SATz mit $x$...

Gegeben sei eine aussagenlogische Formel $\varphi$ mit $n$ Variablen und in konjunktiver Normalform, bei der jede Klausel genau 3 Literale enthält. Gesucht ist eine Belegung $x \in \{0,1\}^n$, sodass $\varphi$ zu 1 ausgewertet wird ($\varphi(x) = 1$).

Wir wollen einen einfachen, randomisierten Algorithmus entwerfen der effizienter ist, als der triviale $2^n \text{poly}(n)$ Ansatz, wenn auch nur mit einer gewissen Erfolgswahrscheinlichkeit.

Der Algorithmus wählt zufällig gleichverteilt ein $x \in \{0,1\}^n$ und gibt es aus, falls $\varphi(x) = 1$. Andernfalls wird eine *Modifikation* durchgeführt, wobei eine beliebige von $x$ nicht erfüllte Klausel gewählt, zufällig gleichverteilt eines ihrer 3 Literale bestimmt und $x$ so angepasst wird, dass es dieses Literal erfüllt. Falls nun $\varphi(x) = 1$ so wird $x$ ausgegeben. Andernfalls wird $x$ weiter modifiziert. Nach $k$ erfolglosen Modifikation wird ausgegeben, dass die Formel nicht erfüllbar ist.

Im Folgenden soll nun die Erfolgswahrscheinlichkeit des Algorithmus beschränkt werden. Wenn $\varphi$ nicht erfüllbar ist, liefert der Algorithmus die korrekte Antwort. Andernfalls sei $x^*$ eine Belegung sodass $\varphi(x^*) = 1$ und für jedes $x \in \{0,1\}^n$ sei $\Delta(x, x^*)$ die Anzahl an Variablen die von $x$ und $x^*$ verschieden belegt sind.

a) Zeige, dass mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1/2$ gilt, dass $\Delta(x, x^*) \leq n/2$ für ein zufällig gleichverteiltes $x \in \{0,1\}^n$.
   *Hinweis*: Wenn $\Delta(x, x^*) > n/2$, was weißt du über $\bar{x}$, das man erhält, wenn man die Belegung jeder Variable in $x$ invertiert?

b) Zeige, dass für alle nicht-erfüllenden $x$ und alle erfüllenden $x^*$ jede Modifikation mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1/3$ den Wert von $\Delta(x, x^*)$ um 1 verringert.

c) Wir setzen $k = n/2$. Wende „Verringerung der Fehlerwahrscheinlichkeit“ an, um eine Erfolgswahrscheinlichkeit von $1 - 1/n$ zu erhalten.