BLATT 2:

1)

Werkzeuge

(1) $a < 1: \quad a^n < 1 \quad n > 0$

(2) $\sum_{i=0}^{t/2} \binom{t}{i} \leq 2^t$

(3) $1 + x \leq e^x$ für $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(fail) = \sum_{i=0}^{t/2} \binom{t}{i} p^i (1-p)^{t-i}$$

$\mathbb{P}(\text{richtige Ausgabe}) = (\frac{1}{2} + \varepsilon)$

$\leq$ Hälfte sind richtig

$$= \sum_{i=0}^{t/2} \binom{t}{i} p^{t/2} \left(\frac{1-p}{p}\right)^{t/2-i} (1-p)^{t/2}$$

$$= \frac{1-(1/2+\varepsilon)}{1/2+\varepsilon} = \frac{1/2-\varepsilon}{1/2+\varepsilon} < 1$$

$$\overset{(1)}{\leq} \sum_{i=0}^{t/2} \binom{t}{i} p^{t/2} (1-p)^{t/2}$$

$$= (p(1-p))^{t/2} \cdot \sum_{i=0}^{t/2} \binom{t}{i}$$

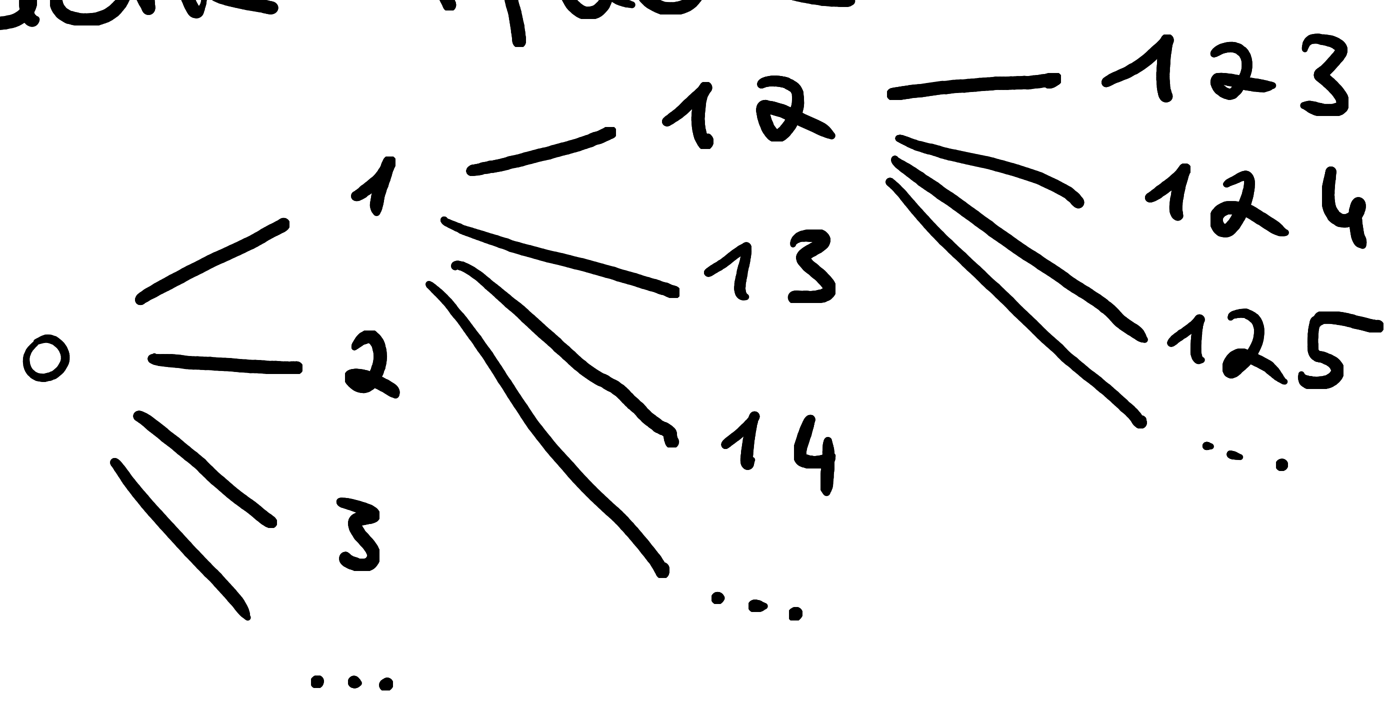
$$\overset{(2)}{\leq} (p(1-p))^{t/2} \cdot 2^t$$

$$= (p(1-p)4)^{t/2} = ((\tfrac{1}{2}+\varepsilon)(1/2-\varepsilon)4)^{t/2}$$

$$= ((1+2\varepsilon)(1-2\varepsilon))^{t/2} = (1^2 - 4\varepsilon^2)^{t/2}$$

$$\overset{(3)}{\leq} e^{-4\varepsilon^2 \cdot t/2} = e^{-2t\varepsilon^2}$$

2) Naiver Algorithmus: Tiefensuche über mögliche Pfade:



$$(n)(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = n^k + O(n^{k-1})$$
$$\in O(n^k)$$

a) Einseitiger Fehler:

□ : two-sided err

: one-sided err

		Richtige Antwort	
Algo output		✗	✓
	✗	neg	false neg
	✓	false pos	true pos

wenn da kein Pfad ist, hilft auch Umbenennen nichts

Pech beim Nummerieren

one-sided

geht nicht, Algo kann keine neuen Kanten erfinden

Wenn es d. Pfad gibt und er entsprechend nummeriert wird

Erfolgswahrscheinlichkeit: Im schlimmsten Fall gibt es genau einen solchen Pfad (+rückwärts)

⇒ Knoten brauchen aufsteigende Labels

$$\Rightarrow \underbrace{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{richtige Zahl}}}{\left(\frac{1}{k}\right)}\cdot\left(\frac{1}{k}\right)\cdots\left(\frac{1}{k}\right)}_{\text{alle Knoten}} = \left(\frac{1}{k}\right)^k$$

2b) Laut Vorlesung:

$$\mathbb{P}(\text{success}) = \mathbb{P}(\text{eine der } t \text{ Ausf. liefert Erg.})$$

$$= 1 - \mathbb{P}(\text{keine liefert Ergebnis})$$

$$= 1 - (1-p)^t \underset{\text{lt. VL}}{\geq} 1 - e^{-pt}$$

$p = \frac{1}{k^k}$ aus Teilaufg. a

$$1 - e^{-\frac{1}{k^k}t} \overset{!}{=} 1 - \frac{1}{n}$$

$$e^{-\frac{1}{k^k}t} \overset{!}{=} \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{k^k}t \overset{!}{=} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$t = k^k \ln(n)$$

3a)

$$\mathcal{M}_= := \{ x \in \{0,1\}^n \mid \Delta(x, x^*) = \frac{n}{2} \}$$
$$\mathcal{M}_< := \{ x \in \{0,1\}^n \mid \Delta(x, x^*) < \frac{n}{2} \}$$
$$\mathcal{M}_> := \{ x \in \{0,1\}^n \mid \Delta(x, x^*) > \frac{n}{2} \}$$

Bijektion $\mathcal{M}_< \longleftrightarrow \mathcal{M}_> \rightsquigarrow |\mathcal{M}_>| = |\mathcal{M}_<|$

$\mathcal{M}_s$ disjunkt $\rightsquigarrow$ $|\{0,1\}^n| = |\mathcal{M}_=| + |\mathcal{M}_<| + |\mathcal{M}_>|$

$$\mathbb{P}\left(\Delta(x, x^*) \leq \frac{n}{2}\right) = \frac{|\mathcal{M}_=| + |\mathcal{M}_<|}{|\mathcal{M}_=| + |\mathcal{M}_<| + |\mathcal{M}_>|}$$

$$= \frac{|\mathcal{M}_=| + |\mathcal{M}_<|}{2|\mathcal{M}_<| + |\mathcal{M}_=|} \geq \frac{|\mathcal{M}_=| + |\mathcal{M}_<|}{2(|\mathcal{M}_=| + |\mathcal{M}_<|)} = \frac{1}{2}$$

3b)

In einer nicht-erfüllten Klausel sind alle 3 Belegungen falsch. In x^* ist also mindestens einer der 3 Werte invertiert. Invertiert der Algo also einen Wert in einer nicht erfüllbaren Klausel, erwischt er mit Wahrsch. mindestens 1/3 das (bzw. eines der) Literale, die in x^* anders sind. Dadurch reduziert sich $\Delta(x, x^*)$.

3c)

Algo output \ Richtige Antwort	×	✓
×	neg	false neg
✓	false pos	true pos

Klar, Algo kann sowieso immer Pech haben und jede Stelle ist genau invertiert

Könnte ja z.B. auch direkt richtig raten

Nicht erfüllbar, egal wie Algo die Variablen bearbeitet gibt es keine Lösung

$\Rightarrow$ Monte-Carlo mit einseitigem Fehler

$$\mathbb{P}(\text{Algo succes}) = \mathbb{P}\left(\Delta(x, x^*) \leq \frac{n}{2} \text{ und } k \text{ Modifikationen lösen Problem}\right)$$

$$\geq \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(k \text{ mod. lösen Problem})$$

$$\geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k =: p$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{Boosted succes}) = 1 - (1-p)^t \geq 1 - e^{-pt} \overset{!}{=} 1 - \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow t = 2 \cdot 3^{n/2} \cdot \ln(n)$$