Karlsruher Institut für Technologie

Maximilian Katzmann
Hans-Peter Lehmann
Stefan Walzer

Übungsblatt 01

Randomisierte Algorithmik – Wintersemester 2023/2024

Aufgaben zur Vorlesung vom 24.10.2023
Abgabe im ILIAS bis 02.11.2023, 11:30 Uhr
Besprechung am 07.11.2023, 08:00 Uhr

Achte insbesondere bei handschriftlichen Abgaben auf Lesbarkeit. Die Abgabe erfolgt über das Übungsmodul im ILIAS. Gib Deine Ausarbeitungen in *einer* PDF-Datei ab.

Aufgabe 1 – Alle guten Dinge sind $2\,{}^2\!/\!_3$

In dieser Aufgabe wollen wir uns mit Algorithmen beschäftigen, die vergleichsbasiert drei Zahlen sortieren.

a) Zeige, dass es für jeden deterministischen Algorithmus eine Eingabe gibt, bei der 3 Vergleiche benötigt werden, um die Zahlen korrekt zu sortieren.

b) Zeige, dass es einen randomisierten Algorithmus gibt, der für jede Eingabe im Erwartungswert $2\,{}^2\!/\!_3$ Vergleiche benötigt, um die Zahlen korrekt zu sortieren.

Aufgabe 2 – Magic: The Shuffling

Eine Erweiterung deines Lieblingskartenspiels ist herausgekommen! Sofort hast du die neuen Karten in dein Deck von Basiskarten gemischt und drauf los gespielt, nur um dann festzustellen, dass es ohne die Erweiterung viel mehr Spaß gemacht hat. Deine Freunde schlagen Folgendes vor: Wir sortieren die neuen Karten einfach aus, mischen den Stapel der Basiskarten und spielen eine neue Runde. Dein Gegenvorschlag: Wir sparen etwas Zeit, indem wir den Stapel *inklusive der neuen Karten* mischen und diese erst in dem Moment aussortieren, wenn sie gezogen werden.

Deine Freunde sind skeptisch: Ist erst aussortieren und dann mischen das gleiche wie erst mischen und dann aussortieren?

Formal sei S die Menge aller Karten und $S' \subseteq S$ die Menge der Basiskarten. Eine Mischmaschine A nimmt eine Menge von Karten und gibt aus allen möglichen Permutationen gleichverteilt eine aus. Sei $A(S')$ eine Permutation, die A auf Eingabe S' liefert und $A(S)|_{S'}$ eine Permutation die man erhält, wenn man A die Menge S gibt und in der resultierenden Permutation nur die Elemente behält die auch in S' sind. Zeige, dass für jede Permutation π von S' gilt: $\Pr[A(S') = \pi] = \Pr[A(S)|_{S'} = \pi]$.

Aufgabe 3 – Tic-Tac-2.0

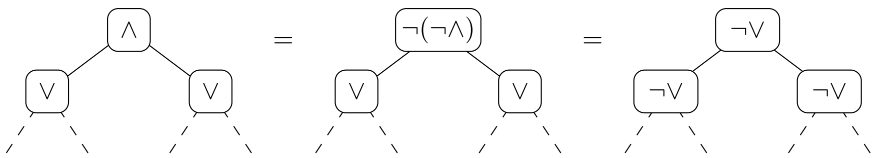
Erneut spielen wir eine etwas spannendere Variante von Tic-Tac-Toe. Wie im Original wird diesmal wieder abwechselnd gespielt, wobei **X** beginnt. In einem Zug wird dabei unter den aktuell noch verfügbaren Feldern zufällig gleichverteilt eines ausgewählt und das zugehörige Symbol eingetragen. Sobald es eine Reihe aus **X** oder **O** gibt (drei horizontal, vertikal oder diagonal), hat die zugehörige Person gewonnen. Kommt keine Reihe zustande, bleibt das Spiel unentschieden.

Gib die Wahrscheinlichkeiten an, mit denen **X** und **O** jeweils gewinnen.

Hinweis: Es kann hilfreich sein, hier einen Computer rechnen zu lassen.

Aufgabe 4 – Die Wälder NORwegens

In der Vorlesung haben wir bereits UND/ODER-Bäume kennengelernt. Durch Anwendung der de-morganschen Regel können diese einfach in NOR-Bäume überführt werden:



Mit Werten von 0 oder 1 in den Blättern findet die Auswertung dann Analog zur Vorlesung statt. Wie zuvor gehen wir davon aus, dass jeder innere Knoten des Baumes genau zwei Kinder hat und alle Blätter in der gleichen Tiefe $2k$ hängen.

Im Folgenden betrachten wir einen solchen Baum, bei dem die Werte in den Blättern unabhängige Zufallsvariablen sind. Insbesondere sei für $p \in [0, 1]$ der Wert des i-ten Blattes $X_i \sim \mathrm{Ber}(p)$ für $i \in [4^k]$. Wir interessieren uns nun für die Zufallsvariable X_r die den Wert der Wurzel des Baumes repräsentiert.

a) Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_r für den Fall $p = 0$ und für den Fall $p = 1$ an.

b) Angenommen, die Tiefe des Baumes ist $2k = 2$. Seien X_a und X_b die Indikatorzufallsvariablen für die beiden Knoten mit Tiefe 1. Für welche p gilt $\Pr[X_a = 1] = \Pr[X_b = 1] = p$?

c) Wie in Teilaufgabe b) nehmen wir an, dass $2k = 2$. Für welche Werte von p gilt für die Wurzel des Baumes jeweils $\Pr[X_r = 1] < p$, $\Pr[X_r = 1] = p$ und $\Pr[X_r = 1] > p$?

d) Bestimme $\lim_{k\to\infty} \Pr[X_r = 1]$ in Abhängigkeit von p.