# BLATT 0

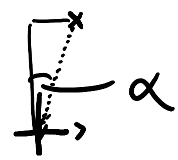
1a) Ergebnismenge: $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1 \}$

Wahrscheinlichkeitsmaß: $\mathbb{P}(z \in A) = \frac{|A|}{\pi}$

b)

- $d = \sqrt{x^2+y^2}$ ist Zufallsvariable, lebt aber immernoch im ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsraum $\Rightarrow$ Ereignis z.B. $\{d < 1/2\} \subseteq \Omega$

- $$pkt = \begin{cases} 1 \text{ falls } y > 0, \operatorname{atan}\left(\frac{x}{y}\right) \in (-\pi/6, \cancel{+}\pi/6) \\ 4 \text{ falls } y > 0, \operatorname{atan}\left(\frac{x}{y}\right) > \pi/6 \\ 6 \text{ falls } y > 0, \operatorname{atan}\left(\frac{x}{y}\right) \cancel{<} -\pi/6 \\ 2 \text{ falls } y < 0, \operatorname{atan}\left(\frac{x}{-y}\right) \in (-\pi/6, +\pi/6) \\ 3 \text{ falls } y < 0, \operatorname{atan}\left(\frac{x}{-y}\right) > \pi/6 \\ 5 \text{ falls } y < 0, \operatorname{atan}\left(\frac{x}{-y}\right) < -\pi/6 \end{cases}$$



$\tan\alpha = \frac{x}{y}$

ist Zufallsvariable

- $\{pkt \text{ ist gerade}\} \subseteq \Omega$ ist Ereignis im ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsraum

Alternative: Zufallsvariable $q = \begin{cases} 1 \text{ falls pkt gerade} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$

$= \mathbb{1}_{\text{pkt gerade}}$

Dann Ereignis: $\{q=1\} \subseteq \Omega$

1c) $F(x) = \mathbb{P}(d < x)$

$$= \frac{\text{Fläche innen}}{\text{Fläche gesamt}} = \frac{\pi x^2}{\pi} = x^2$$

1d) $\{1, \dots, 6\}$ Ergebnismenge

$\mathbb{P}(\{x\}) = 1/6$ Wahrsch.maß $\leadsto$ diskret reicht Angabe aller Elementarereignisse

1e) • $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 \dots = \frac{21}{6} = 3{,}5$

• $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{6} \cdot (1-3.5)^2 + \frac{1}{6}(2-3{,}5)^2 + \dots$

$\approx 2{,}916$

• Neue Zufallsvariable

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 1 \\ 3 & \text{falls } x = 3 \\ 5 & \text{falls } x = 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 0 + \dots$

$= 1{,}5$

• Allgemein: $\mathbb{E}(X \mid E) = \mathbb{E}(X \cdot \mathbb{1}_E) / \mathbb{P}(E)$

$\mathbb{E}(X \mid X \text{ ungerade})$

$$= \frac{\mathbb{E}(\overbrace{X \cdot \mathbb{1}_{\text{ungerade}}}^{=Y})}{\mathbb{P}(X \text{ ungerade})} = \frac{1{,}5}{(1/2)} = 3$$

2a) $> \frac{1n}{5}$ rote gesehen → sicher

$> \frac{1n}{5}$ blaue gesehen → sicher

$\Rightarrow \; > \frac{1n}{5} + \frac{1n}{5} \rightsquigarrow \; \geq \frac{2n}{5} + 1$ gesehen → sicher

b) gleich viele rote/blaue ist da noch möglich, dann wissen wir nichts sicher

c) Nehme Handvoll und entscheide nach Mehrheit

Pillen in Tonne:

seltenere, welche auch immer das sind

1 0..1 0 ...1 0 1 1 0..

1/5 1en

4/5 0en

nehme k heraus => ← sagen k gerade, sonst hässlich

$B_i \dots B_k$ ← in Hand

Falsch beantwortet, falls mehr als k/2 der $B_i = 1$. Problem: $B_i$ korelliert

$$\mathbb{P}(\text{beantworte falsch})$$

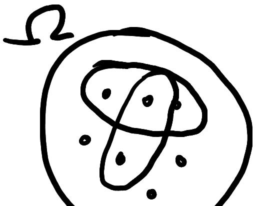
$$= \mathbb{P}\left(\exists S \subseteq \{1,\dots,k\},\ |S| = k/2 : \forall i \in S : B_i = 1\right)$$

Formal: Vereinigung von Ereignissen

$$= \mathbb{P}\Big(\bigvee_{\substack{S \subseteq \{1,\dots,k\} \\ |S| = k/2}} \forall i \in S : B_i = 1\Big)$$

union bound

z.B. 111..1 wird oben nur 1x gezählt, unten mehrmals



Ergebnis-menge

$$\le \sum_{\substack{S \subseteq \{1,\dots,k\} \\ |S| = k/2}} \mathbb{P}(\forall i \in S : B_i = 1)$$

Alle mischen, entspr. Positionen anschauen

$$= \sum_{\substack{S \subseteq \{1,\dots,k\} \\ |S| = k/2}} \underbrace{\mathbb{P}(b_1 = 1, \dots B_{k/2} = 1)}$$

Einschub

$$= \frac{n/5}{n} \cdot \frac{n/5 - 1}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n/5 - k/2 + 1}{n - k/2 + 1}$$

weil Zähler kleiner Nenner, also macht „-1" im Zähler mehr aus

$$\le \frac{n/5}{n} \cdot \frac{n/5}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n/5}{n}$$

$$= \left(1/5\right)^{k/2}$$

$$= \sum_{\substack{S \subseteq \{1,\dots,k\} \\ |S| = k/2}} \overbrace{\left(1/5\right)^{k/2}}$$

$$\leq \sum_{S \subseteq \{1, \dots, k\}} (1/5)^{k/2}$$

$$= 2^k (1/5)^{k/2} = 4^{k/2} (1/5)^{k/2}$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^{k/2} \overset{!}{\leq} \rho$$

Umformen:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{k/2} \leq \rho$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{k/2} \geq \frac{1}{\rho}$$

$$\Leftrightarrow \log\left(\left(\frac{5}{4}\right)^{k/2}\right) \geq \log\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2} \log\left(\frac{5}{4}\right) \geq \log\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad k \geq \frac{2}{\log(5/4)} \log(1/\rho) \in \Theta(\log(1/\rho))$$

3a) Ereignisraum $\Omega = \{x, 0\}^9$

$\mathbb{P}(\omega) = \left(\frac{1}{2}\right)^9$ Wahrsch. maß

b) Alle aufzählen, schauen

wo X gewinnt aber Y nicht

→ z.B. Python