Algorithmische Geometrie
Wintersemester 2023/2024
Thomas Bläsius & Wendy Yi

Karlsruher Institut für Technologie

Übungsblatt 7

Abgabe bis 15. Februar 2024

Aufgabe 1: Schöne Zerlegung — 5 Punkte

Gegeben seien zwei vertikale Strecken der Längen 2^{ℓ_L} und 2^{ℓ_R}. Zudem sei eine Menge S mit n überschneidungsfreien Strecken zwischen den beiden vertikalen Strecken gegeben. Zeigt, dass man $\mathcal{O}(b)$ Strecken $s_0, s_1, \dots \in S$ so wählen kann, dass (1) und (2) gelten.

(1) Für jedes i gilt mindestens eine der folgenden Aussagen:

- (a) zwischen s_i und s_{i+1} liegen maximal n/b Strecken;
- (b) die linken Endpunkte von s_i und s_{i+1} liegen auf einem Teilintervall der Länge $2^{\ell_L - h}$;
- (c) die rechten Endpunkte von s_i und s_{i+1} liegen auf einem Teilintervall der Länge $2^{\ell_R - h}$.

(2) Es gibt Strecken $\tilde{s}_0, \tilde{s}_2, \dots$ zwischen den zwei vertikalen Strecken, sodass:

- (a) $s_0 \prec \tilde{s}_0 \prec s_2 \prec \tilde{s}_2 \prec \cdots$;
- (b) die Distanzen zwischen linken Endpunkten der $\tilde{s}_i$ sind Vielfache von $2^{\ell_L - h}$;
- (c) die Distanzen zwischen den rechten Endpunkten der $\tilde{s}_i$ Vielfache von $2^{\ell_R - h}$.

Aufgabe 2: „Parallelen“ — 1 Punkt

Zeichnet eine Ursprungsgerade und für eine Distanz d die Menge aller Punkte, die Abstand d zu dieser Geraden haben. Benutzt dazu das Poincaré Disk Modell.

Aufgabe 3: Abkürzung? — 3 Punkte

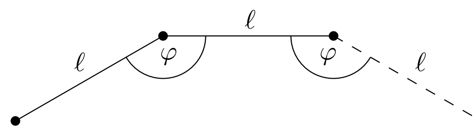
Für zwei Punkte A und B sei $b_{A,B}$ die Translation, die durch den Strahl AB^+ definiert ist und A auf B abbildet. Beweist oder widerlegt für die absolute Ebene, dass die Konkatenation von $b_{A,B}$ und $b_{B,C}$ die Translation $b_{A,C}$ ergibt.

Aufgabe 4: Teufelskreis — 1 Punkt

Gegeben seien drei nicht-kollineare Punkte. In der euklidischen Ebene gibt es genau einen Kreis, auf dem diese liegen. Beweist oder widerlegt, dass dasselbe auch in der hyperbolischen Ebene gilt.

Aufgabe 5: Da beißt sich die Katze in den Schwanz $2 + 3 = 5$ **Punkte**

Gegeben sei ein unendlicher langer Polygonzug P, bei dem die Länge jeder Strecke $\ell > 0$ ist. Des Weiteren sei der Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Strecken $\varphi \in (0, \pi)$ immer auf der gleichen Seite von P.



Teilaufgabe (a) Beweist oder widerlegt, dass sich P in der euklidischen Ebene für jede Wahl von ℓ und φ selbst schneidet.

Teilaufgabe (b) Beweist oder widerlegt, dass sich P in der hyperbolischen Ebene für jede Wahl von ℓ und φ selbst schneidet.

Aufgabe 6: So viele Disks! $3 + 3$ **Punkte**

Gegeben sei eine Menge D von Disks, wobei jede Disk durch ihren Mittelpunkt und ihren Radius definiert ist. Gesucht ist eine totale z-Ordnung auf allen Disks (also ein Stacking), sodass der minimal sichtbare Rand unter allen Disks maximiert wird. Aus der Vorlesung wissen wir bereits, dass eine optimale Lösung in polynomieller Zeit berechenbar ist.

Teilaufgabe (a) Wir betrachten zuerst nur eine (beliebige) Disk $d \in D$ und ihre Nachbarn $\{d' \mid d \cap d' \neq \emptyset\} \subseteq D$. Gebt einen Algorithmus an, der für d den sichtbaren Rand berechnet, wenn d *unter* allen seinen Nachbarn eingeordnet wird. Gebt die Laufzeit des Algorithmus an.

Teilaufgabe (b) Gebt einen Algorithmus an, der ein optimales Stacking berechnet und gebt die Laufzeit des Algorithmus an.

Tipp: Welche Disk befindet sich in einer optimalen Lösung ganz unten?