

Algorithmische Geometrie

Geometrische Graphen – euklidisch und hyperbolisch



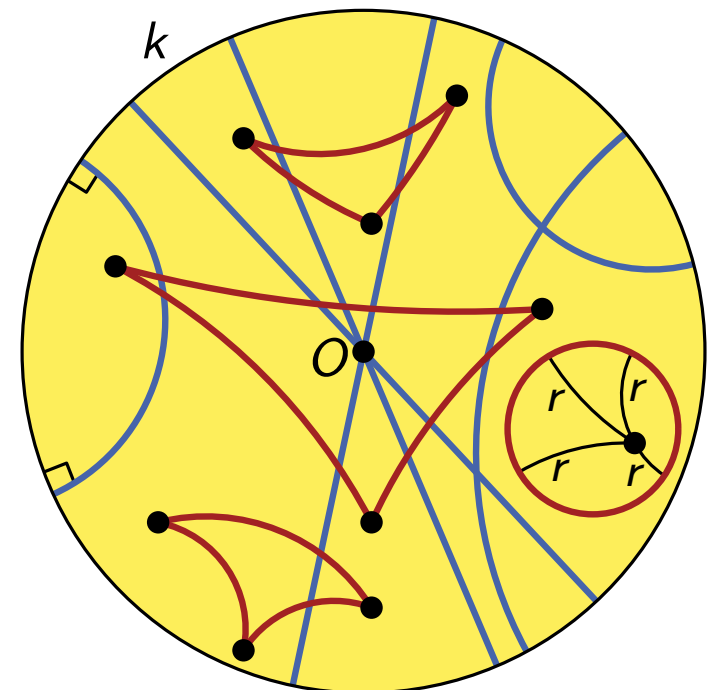
Wiederholung: Poincaré Disk

Punkte

- betrachte einen (euklidischen) Kreis k mit Radius 1 um den Punkt O
- sei \mathcal{P} die Menge der Punkte im Inneren des Kreises

Geraden

- sei \mathcal{G} die Vereinigung von:
 - Menge der offenen Strecken durch O mit Endpunkten auf k
 - Menge der offenen Kreisbögen in k , die senkrecht auf k stehen



Wiederholung: Poincaré Disk

Punkte

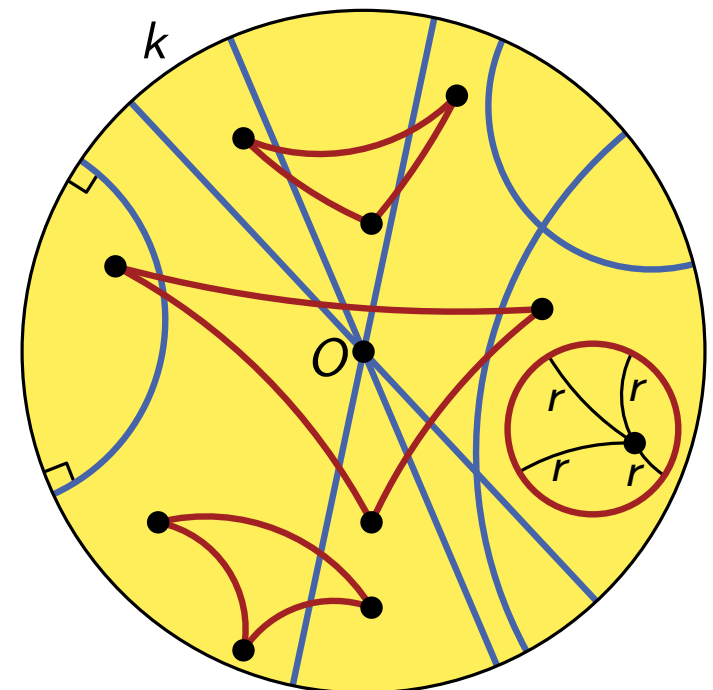
- betrachte einen (euklidischen) Kreis k mit Radius 1 um den Punkt O
- sei \mathcal{P} die Menge der Punkte im Inneren des Kreises

Geraden

- sei \mathcal{G} die Vereinigung von:
 - Menge der offenen Strecken durch O mit Endpunkten auf k
 - Menge der offenen Kreisbögen in k , die senkrecht auf k stehen

Beobachtung

- nah an O : sehr ähnlich zum Euklidischen
- um die Besonderheiten der hyperbolischen Ebene zu nutzen müssen wir weit von O weg



Wiederholung: Poincaré Disk

Punkte

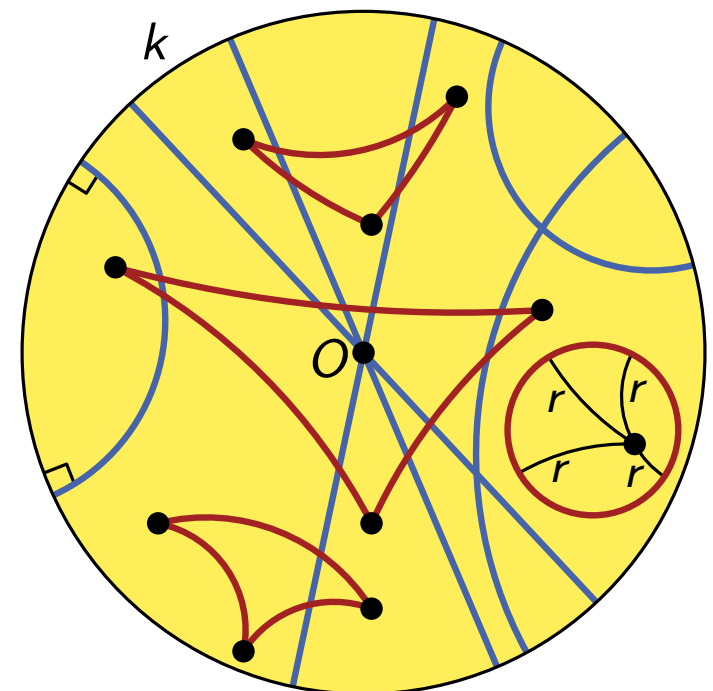
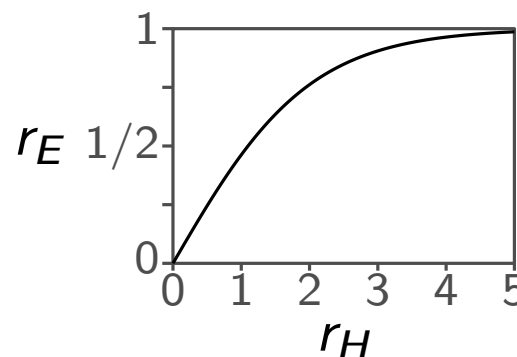
- betrachte einen (euklidischen) Kreis k mit Radius 1 um den Punkt O
- sei \mathcal{P} die Menge der Punkte im Inneren des Kreises

Geraden

- sei \mathcal{G} die Vereinigung von:
 - Menge der offenen Strecken durch O mit Endpunkten auf k
 - Menge der offenen Kreisbögen in k , die senkrecht auf k stehen

Beobachtung

- nah an O : sehr ähnlich zum Euklidischen
- um die Besonderheiten der hyperbolischen Ebene zu nutzen müssen wir weit von O weg
- Problem: wir sind dann sehr schnell sehr nah am Rand von k
- unterschiedliche Radien optisch dann nicht mehr unterscheidbar



(Native) Polarkoordinaten

Polarkoordinaten

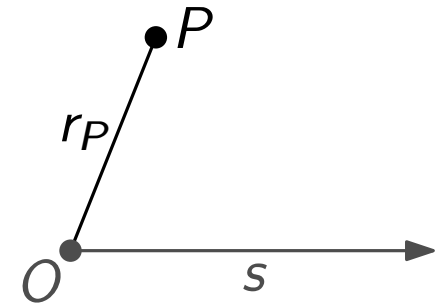
- Referenz: Ursprung O , Strahl s mit Anfangspunkt O



(Native) Polarkoordinaten

Polarkoordinaten

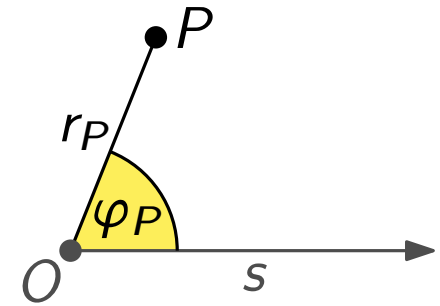
- Referenz: Ursprung O , Strahl s mit Anfangspunkt O
- **Radius** r_P von P : $d(O, P)$



(Native) Polarkoordinaten

Polarkoordinaten

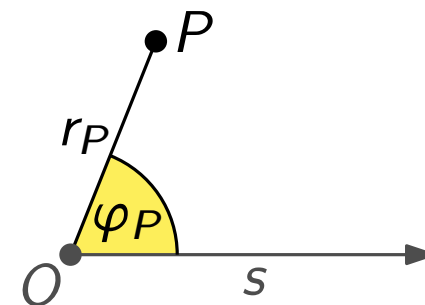
- Referenz: Ursprung O , Strahl s mit Anfangspunkt O
- **Radius** r_P von P : $d(O, P)$
- **Winkel** φ_P von P : Winkel zwischen s und OP



(Native) Polarkoordinaten

Polarkoordinaten

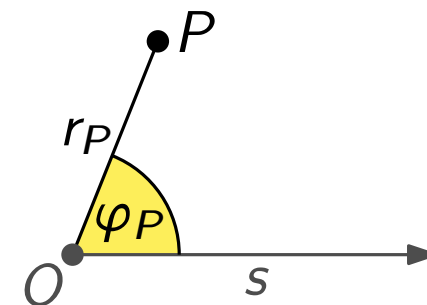
- Referenz: Ursprung O , Strahl s mit Anfangspunkt O
- **Radius** r_P von P : $d(O, P)$
- **Winkel** φ_P von P : Winkel zwischen s und OP
- (r_P, φ_P) sind die **Polarkoordinaten** von P



(Native) Polarkoordinaten

Polarkoordinaten

- Referenz: Ursprung O , Strahl s mit Anfangspunkt O
- **Radius** r_P von P : $d(O, P)$
- **Winkel** φ_P von P : Winkel zwischen s und OP
- (r_P, φ_P) sind die **Polarkoordinaten** von P



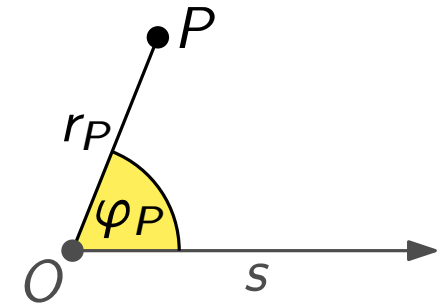
Native Polarkoordinaten

- d ist die hyperbolische Distanz

(Native) Polarkoordinaten

Polarkoordinaten

- Referenz: Ursprung O , Strahl s mit Anfangspunkt O
- **Radius** r_P von P : $d(O, P)$
- **Winkel** φ_P von P : Winkel zwischen s und OP
- (r_P, φ_P) sind die **Polarkoordinaten** von P



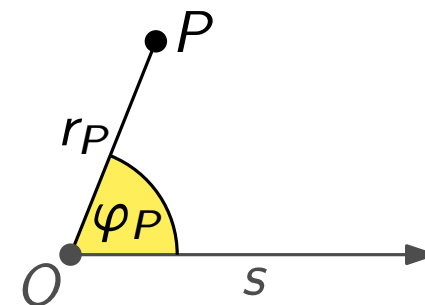
Native Polarkoordinaten

- d ist die hyperbolische Distanz
- insbesondere ist d **nicht** die euklidische Distanz in der Poincaré Disk

(Native) Polarkoordinaten

Polarkoordinaten

- Referenz: Ursprung O , Strahl s mit Anfangspunkt O
- **Radius** r_P von P : $d(O, P)$
- **Winkel** φ_P von P : Winkel zwischen s und OP
- (r_P, φ_P) sind die **Polarkoordinaten** von P



Native Polarkoordinaten

- d ist die hyperbolische Distanz
- insbesondere ist d **nicht** die euklidische Distanz in der Poincaré Disk

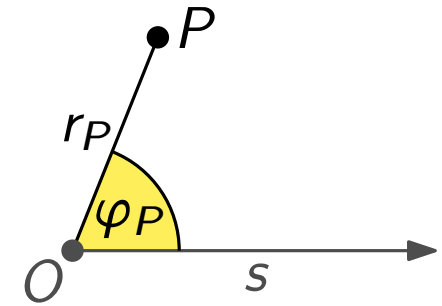
Distanz zwischen Punkten in Polarkoordinaten

- betrachte zwei Punkte (in nativen Polarkoordinaten)
 $A = (r_A, \varphi_A)$ und $B = (r_B, \varphi_B)$

(Native) Polarkoordinaten

Polarkoordinaten

- Referenz: Ursprung O , Strahl s mit Anfangspunkt O
- **Radius** r_P von P : $d(O, P)$
- **Winkel** φ_P von P : Winkel zwischen s und OP
- (r_P, φ_P) sind die **Polarkoordinaten** von P



Native Polarkoordinaten

- d ist die hyperbolische Distanz
- insbesondere ist d **nicht** die euklidische Distanz in der Poincaré Disk

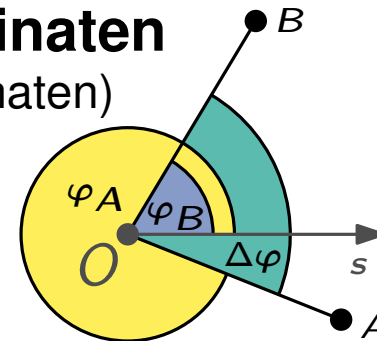
Distanz zwischen Punkten in Polarkoordinaten

- betrachte zwei Punkte (in nativen Polarkoordinaten)

$$A = (r_A, \varphi_A) \text{ und } B = (r_B, \varphi_B)$$

- sei $\Delta\varphi$ ihre Winkeldistanz:

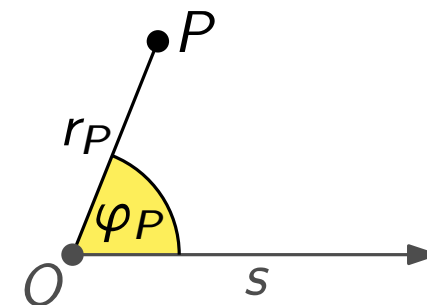
$$\Delta\varphi = \min\{|\varphi_A - \varphi_B|, 2\pi - |\varphi_A - \varphi_B|\}$$



(Native) Polarkoordinaten

Polarkoordinaten

- Referenz: Ursprung O , Strahl s mit Anfangspunkt O
- **Radius** r_P von P : $d(O, P)$
- **Winkel** φ_P von P : Winkel zwischen s und OP
- (r_P, φ_P) sind die **Polarkoordinaten** von P



Native Polarkoordinaten

- d ist die hyperbolische Distanz
- insbesondere ist d **nicht** die euklidische Distanz in der Poincaré Disk

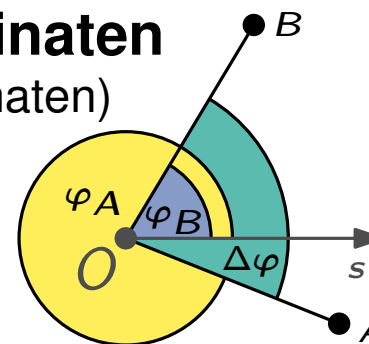
Distanz zwischen Punkten in Polarkoordinaten

- betrachte zwei Punkte (in nativen Polarkoordinaten)
 $A = (r_A, \varphi_A)$ und $B = (r_B, \varphi_B)$

- sei $\Delta\varphi$ ihre Winkeldistanz:

$$\Delta\varphi = \min\{|\varphi_A - \varphi_B|, 2\pi - |\varphi_A - \varphi_B|\}$$

- dann: $d(A, B) = \operatorname{arcosh} [\cosh(r_A) \cosh(r_B) - \sinh(r_A) \sinh(r_B) \cos(\Delta\varphi)]$



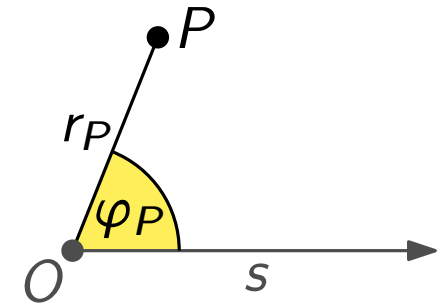
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(Native) Polarkoordinaten

Polarkoordinaten

- Referenz: Ursprung O , Strahl s mit Anfangspunkt O
- **Radius** r_P von P : $d(O, P)$
- **Winkel** φ_P von P : Winkel zwischen s und OP
- (r_P, φ_P) sind die **Polarkoordinaten** von P



Native Polarkoordinaten

- d ist die hyperbolische Distanz
- insbesondere ist d **nicht** die euklidische Distanz in der Poincaré Disk

Distanz zwischen Punkten in Polarkoordinaten

- betrachte zwei Punkte (in nativen Polarkoordinaten)

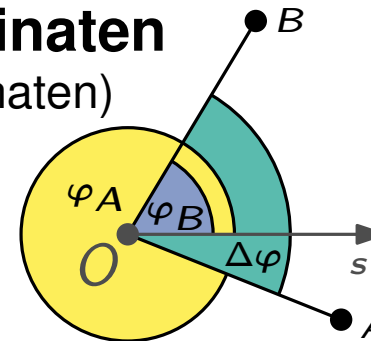
$$A = (r_A, \varphi_A) \text{ und } B = (r_B, \varphi_B)$$

- sei $\Delta\varphi$ ihre Winkeldistanz:

$$\Delta\varphi = \min\{|\varphi_A - \varphi_B|, 2\pi - |\varphi_A - \varphi_B|\}$$

- dann: $d(A, B) = \operatorname{arcosh} [\cosh(r_A) \cosh(r_B) - \sinh(r_A) \sinh(r_B) \cos(\Delta\varphi)]$

$$\approx \log [2 \cdot (e^{r_A} / 2 \cdot e^{r_B} / 2 - e^{r_A} / 2 \cdot e^{r_B} / 2 \cdot \cos(\Delta\varphi))]]$$



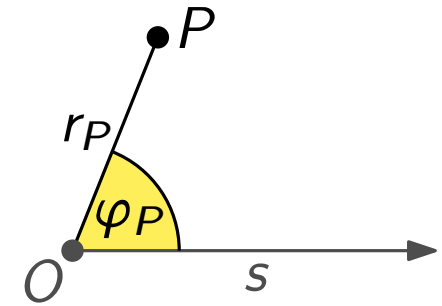
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(Native) Polarkoordinaten

Polarkoordinaten

- Referenz: Ursprung O , Strahl s mit Anfangspunkt O
- **Radius** r_P von P : $d(O, P)$
- **Winkel** φ_P von P : Winkel zwischen s und OP
- (r_P, φ_P) sind die **Polarkoordinaten** von P



Native Polarkoordinaten

- d ist die hyperbolische Distanz
- insbesondere ist d **nicht** die euklidische Distanz in der Poincaré Disk

Distanz zwischen Punkten in Polarkoordinaten

- betrachte zwei Punkte (in nativen Polarkoordinaten)

$$A = (r_A, \varphi_A) \text{ und } B = (r_B, \varphi_B)$$

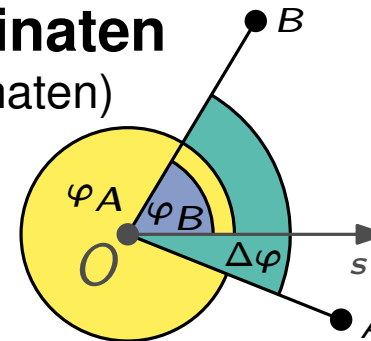
- sei $\Delta\varphi$ ihre Winkeldistanz:

$$\Delta\varphi = \min\{|\varphi_A - \varphi_B|, 2\pi - |\varphi_A - \varphi_B|\}$$

- dann: $d(A, B) = \operatorname{arcosh} [\cosh(r_A) \cosh(r_B) - \sinh(r_A) \sinh(r_B) \cos(\Delta\varphi)]$

$$\approx \log [2 \cdot (e^{r_A} / 2 \cdot e^{r_B} / 2 - e^{r_A} / 2 \cdot e^{r_B} / 2 \cdot \cos(\Delta\varphi))]$$

$$= \log [e^{r_A+r_B} \cdot (1 - \cos(\Delta\varphi)) / 2]$$



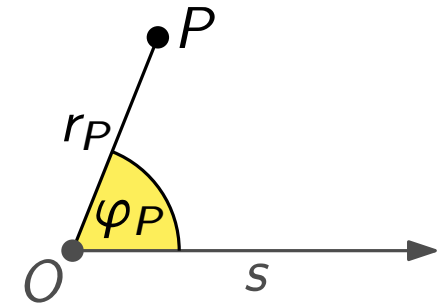
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(Native) Polarkoordinaten

Polarkoordinaten

- Referenz: Ursprung O , Strahl s mit Anfangspunkt O
- **Radius** r_P von P : $d(O, P)$
- **Winkel** φ_P von P : Winkel zwischen s und OP
- (r_P, φ_P) sind die **Polarkoordinaten** von P



Native Polarkoordinaten

- d ist die hyperbolische Distanz
- insbesondere ist d **nicht** die euklidische Distanz in der Poincaré Disk

Distanz zwischen Punkten in Polarkoordinaten

- betrachte zwei Punkte (in nativen Polarkoordinaten)
 $A = (r_A, \varphi_A)$ und $B = (r_B, \varphi_B)$

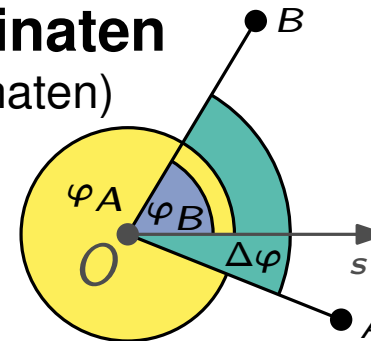
- sei $\Delta\varphi$ ihre Winkeldistanz:

$$\Delta\varphi = \min\{|\varphi_A - \varphi_B|, 2\pi - |\varphi_A - \varphi_B|\}$$

- dann: $d(A, B) = \operatorname{arcosh} [\cosh(r_A) \cosh(r_B) - \sinh(r_A) \sinh(r_B) \cos(\Delta\varphi)]$

$$\approx \log [2 \cdot (e^{r_A} / 2 \cdot e^{r_B} / 2 - e^{r_A} / 2 \cdot e^{r_B} / 2 \cdot \cos(\Delta\varphi))]$$

$$= \log [e^{r_A+r_B} \cdot (1 - \cos(\Delta\varphi)) / 2] = r_A + r_B - \log \left[\frac{2}{1 - \cos(\Delta\varphi)} \right]$$



$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Das native Modell

Natives Modell

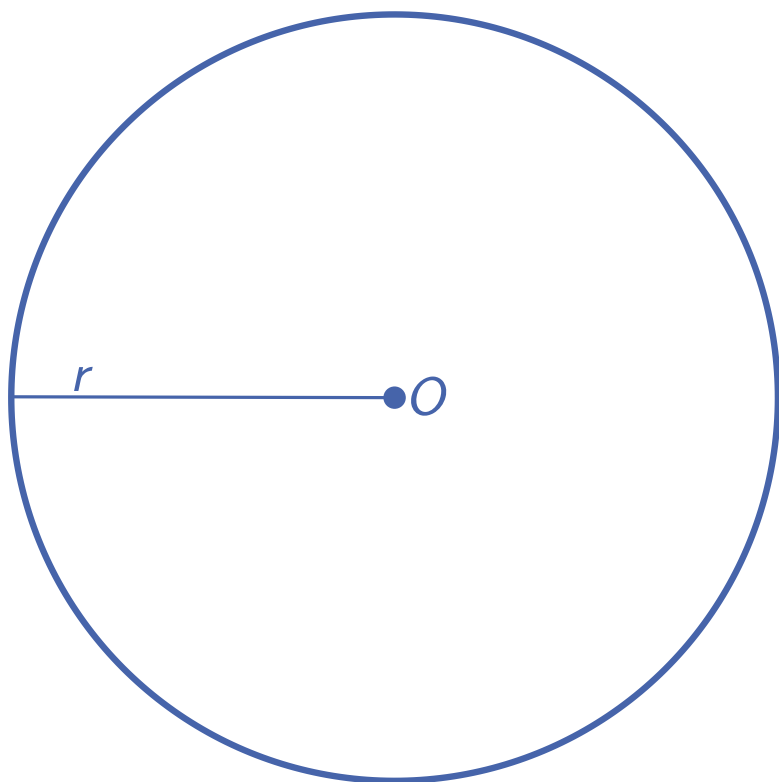
- nutze nativen Polarkoordinaten für jeden Punkt der hyperbolischen Ebene
- tu so, als wären das ganz normale euklidische Polarkoordinaten

$$d(A, B) \approx r_A + r_B - \log \left[\frac{2}{1 - \cos(\Delta\varphi)} \right]$$

Das native Modell

Natives Modell

- nutze nativen Polarkoordinaten für jeden Punkt der hyperbolischen Ebene
- tu so, als wären das ganz normale euklidische Polarkoordinaten
- **Kreise um den Ursprung** sind Kreise



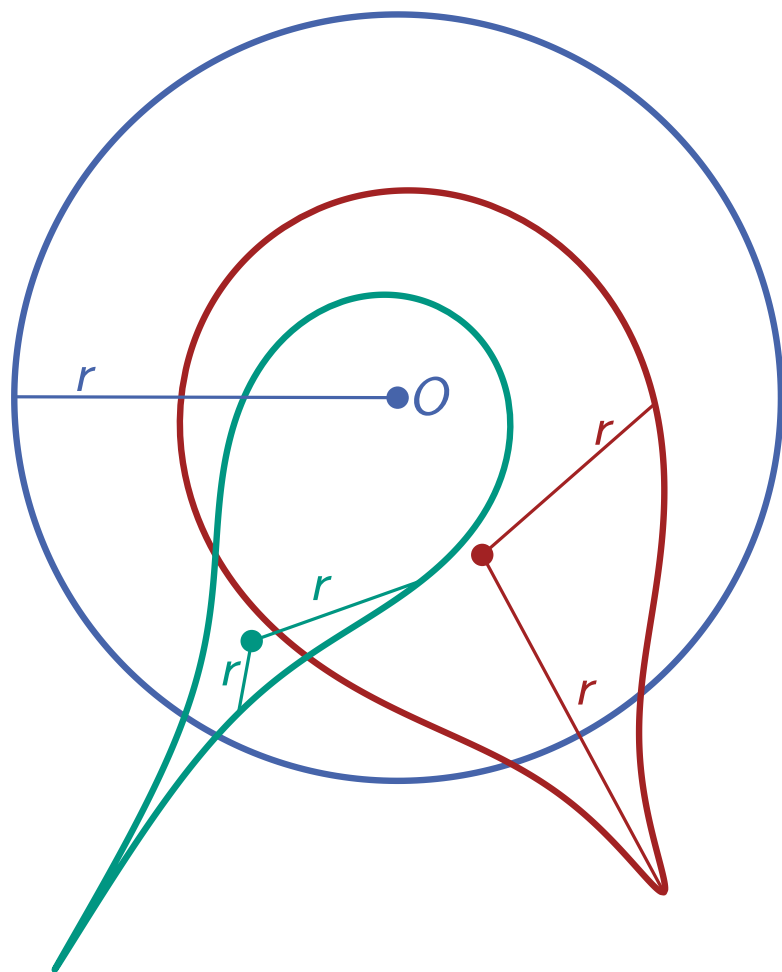
$$d(A, B) \approx r_A + r_B - \log \left[\frac{2}{1 - \cos(\Delta\varphi)} \right]$$

Das native Modell

Natives Modell

- nutze nativen Polarkoordinaten für jeden Punkt der hyperbolischen Ebene
- tu so, als wären das ganz normale euklidische Polarkoordinaten

- Kreise um den Ursprung sind Kreise
- Kreise mit anderen Mittelpunkten sehen Tränenförmig aus

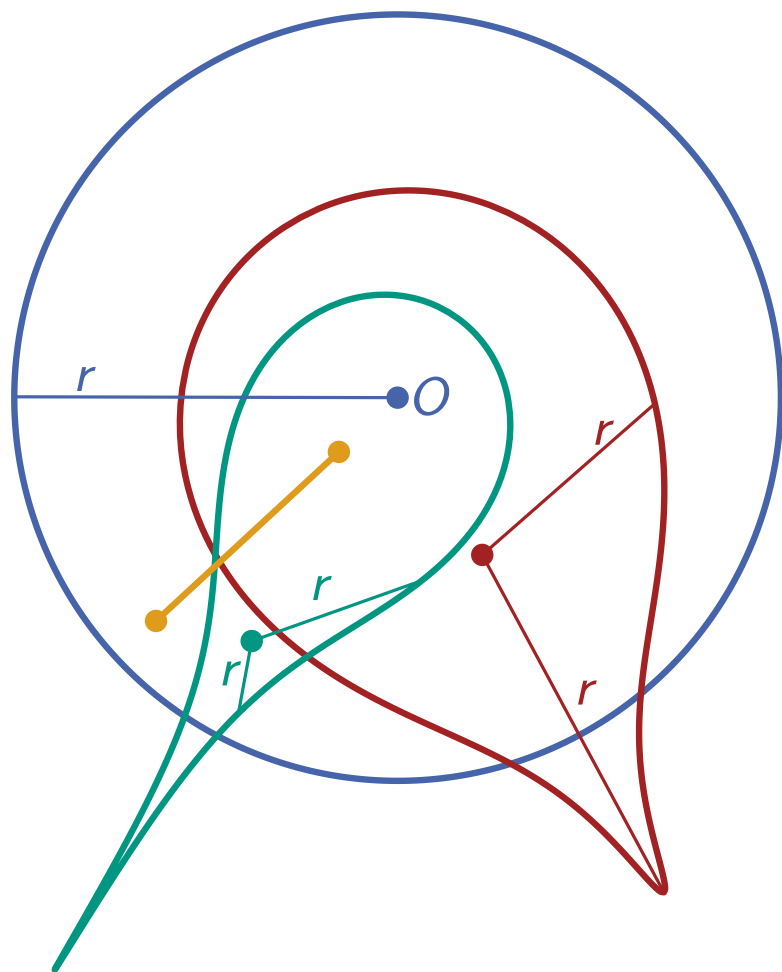


$$d(A, B) \approx r_A + r_B - \log \left[\frac{2}{1 - \cos(\Delta\varphi)} \right]$$

Das native Modell

Natives Modell

- nutze nativen Polarkoordinaten für jeden Punkt der hyperbolischen Ebene
- tu so, als wären das ganz normale euklidische Polarkoordinaten



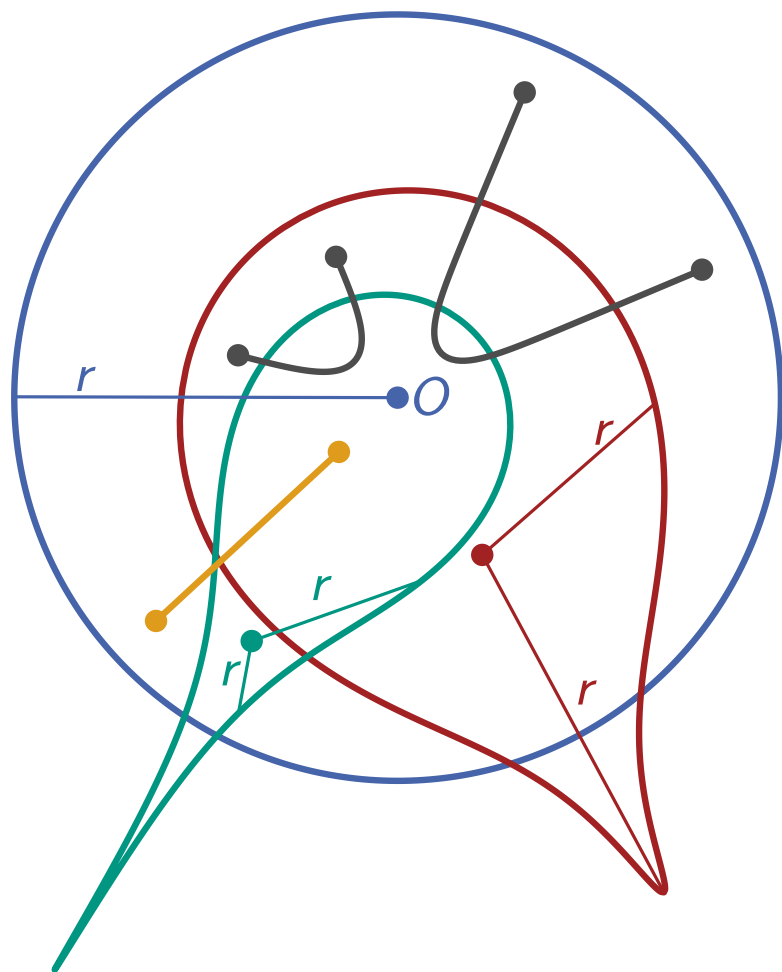
- Kreise um den Ursprung sind Kreise
- Kreise mit anderen Mittelpunkten sehen Tränenförmig aus
- Strecken auf Ursprungsger. sind Strecken
- ihre zu sehende Länge ist die korrekte hyperbolische Länge

$$d(A, B) \approx r_A + r_B - \log \left[\frac{2}{1 - \cos(\Delta\varphi)} \right]$$

Das native Modell

Natives Modell

- nutze nativen Polarkoordinaten für jeden Punkt der hyperbolischen Ebene
- tu so, als wären das ganz normale euklidische Polarkoordinaten



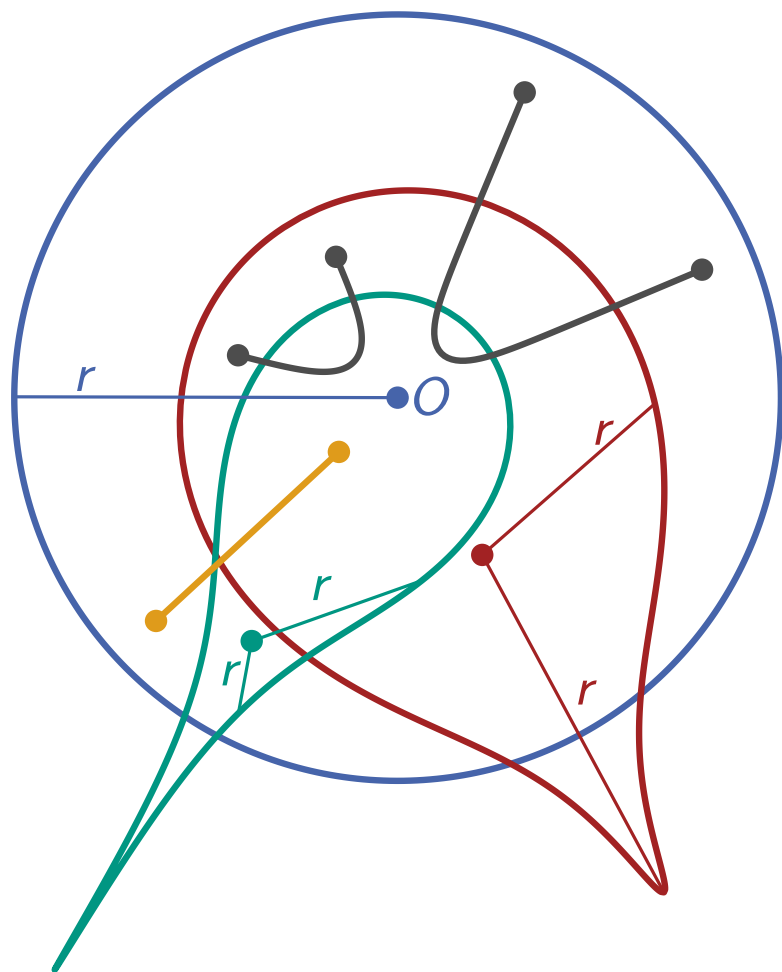
- Kreise um den Ursprung sind Kreise
- Kreise mit anderen Mittelpunkten sehen Tränenförmig aus
- Strecken auf Ursprungsger. sind Strecken
- ihre zu sehende Länge ist die korrekte hyperbolische Länge
- andere Strecken sind Richtung Ursprung gekrümmt

$$d(A, B) \approx r_A + r_B - \log \left[\frac{2}{1 - \cos(\Delta\varphi)} \right]$$

Das native Modell

Natives Modell

- nutze nativen Polarkoordinaten für jeden Punkt der hyperbolischen Ebene
- tu so, als wären das ganz normale euklidische Polarkoordinaten



- Kreise um den Ursprung sind Kreise
- Kreise mit anderen Mittelpunkten sehen Tränenförmig aus
- Strecken auf Ursprungsger. sind Strecken
- ihre zu sehende Länge ist die korrekte hyperbolische Länge
- andere Strecken sind Richtung Ursprung gekrümmt
- Darstellung ist **nicht** Winkelerhaltend

$$d(A, B) \approx r_A + r_B - \log \left[\frac{2}{1 - \cos(\Delta\varphi)} \right]$$

Poincaré vs. nativ

Vorteile der Poincaré Disk

- Darstellung ist Winkelerhaltend
- Geraden sind euklidische Kreisbögen, Kreise sind euklidische Kreise
→ das sind uns vertraute Objekten

Poincaré vs. nativ

Vorteile der Poincaré Disk

- Darstellung ist Winkelerhaltend
- Geraden sind euklidische Kreisbögen, Kreise sind euklidische Kreise
→ das sind uns vertraute Objekten
- wir können unsere euklidische Intuition bemühen, um Einsichten über die hyperbolische Ebene zu zeigen

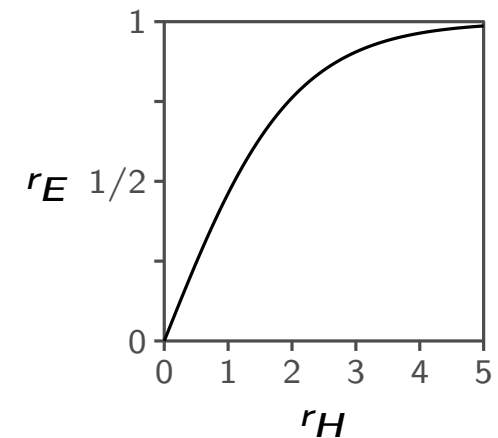
Poincaré vs. nativ

Vorteile der Poincaré Disk

- Darstellung ist Winkelerhaltend
- Geraden sind euklidische Kreisbögen, Kreise sind euklidische Kreise
→ das sind uns vertraute Objekten
- wir können unsere euklidische Intuition bemühen, um Einsichten über die hyperbolische Ebene zu zeigen

Nachteile der Poincaré Disk

- die (euklidische) Distanz vom Ursprung geht sehr schnell gegen 1 für wachsende hyperbolische Distanz



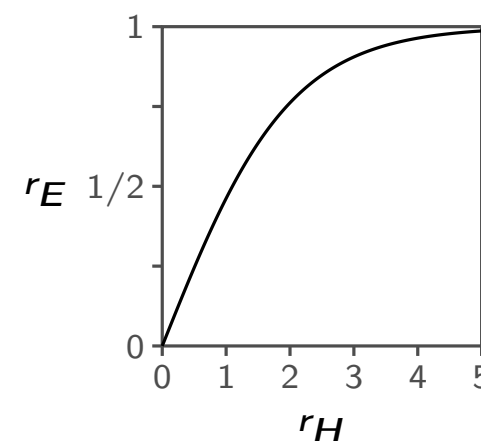
Poincaré vs. nativ

Vorteile der Poincaré Disk

- Darstellung ist Winkelerhaltend
- Geraden sind euklidische Kreisbögen, Kreise sind euklidische Kreise
→ das sind uns vertraute Objekten
- wir können unsere euklidische Intuition bemühen, um Einsichten über die hyperbolische Ebene zu zeigen

Nachteile der Poincaré Disk

- die (euklidische) Distanz vom Ursprung geht sehr schnell gegen 1 für wachsende hyperbolische Distanz
- möchte man etwas hyperbolisches anschauen, das nicht sehr nah am Ursprung liegt, so liegt alles auf dem Rand der Disk und man sieht nichts mehr



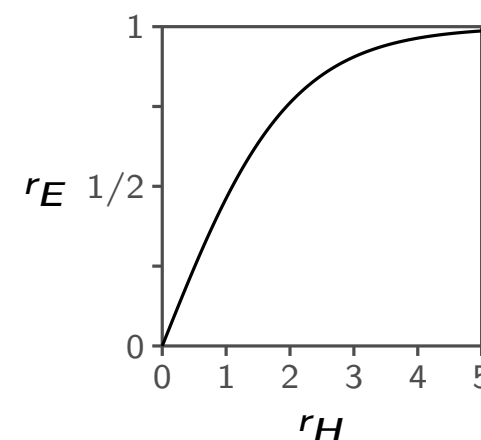
Poincaré vs. nativ

Vorteile der Poincaré Disk

- Darstellung ist Winkelerhaltend
- Geraden sind euklidische Kreisbögen, Kreise sind euklidische Kreise
→ das sind uns vertraute Objekten
- wir können unsere euklidische Intuition bemühen, um Einsichten über die hyperbolische Ebene zu zeigen

Nachteile der Poincaré Disk

- die (euklidische) Distanz vom Ursprung geht sehr schnell gegen 1 für wachsende hyperbolische Distanz
- möchte man etwas hyperbolisches anschauen, das nicht sehr nah am Ursprung liegt, so liegt alles auf dem Rand der Disk und man sieht nichts mehr
- anfälliger für numerische Probleme



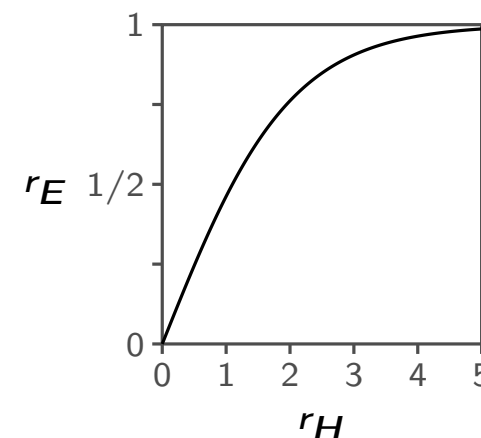
Poincaré vs. nativ

Vorteile der Poincaré Disk

- Darstellung ist Winkelerhaltend
- Geraden sind euklidische Kreisbögen, Kreise sind euklidische Kreise
→ das sind uns vertraute Objekten
- wir können unsere euklidische Intuition bemühen, um Einsichten über die hyperbolische Ebene zu zeigen

Nachteile der Poincaré Disk

- die (euklidische) Distanz vom Ursprung geht sehr schnell gegen 1 für wachsende hyperbolische Distanz
- möchte man etwas hyperbolisches anschauen, das nicht sehr nah am Ursprung liegt, so liegt alles auf dem Rand der Disk und man sieht nichts mehr
- anfälliger für numerische Probleme



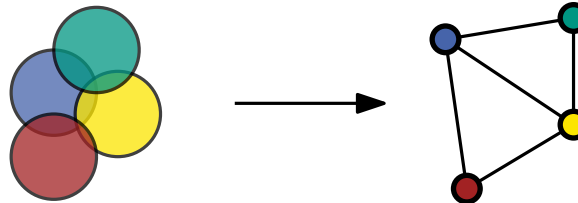
Heuristik zur Wahl des Modells

- visuelle Darstellung von hyperbolischen Daten → natives Modell
- Berechnungen auf Koordinaten → natives Modell (oder auch: Hyperboloid)
- Verständnisfragen/Beweise → Poincaré Disk

Unit-Disk Graphen

Definition

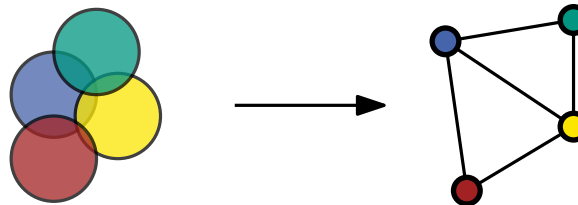
Ein Graph ist ein **Unit-Disk Graph**, wenn er der geometrische Schnittgraph einer Menge von Disks mit Radius 1 ist.



Unit-Disk Graphen

Definition

Ein Graph ist ein **Unit-Disk Graph**, wenn er der geometrische Schnittgraph einer Menge von Disks mit Radius 1 ist.



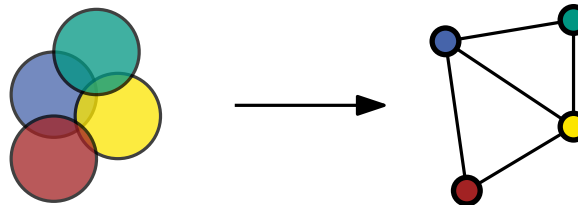
Jetzt hyperbolisch

- kann man im Prinzip erstmal analog definieren

Unit-Disk Graphen

Definition

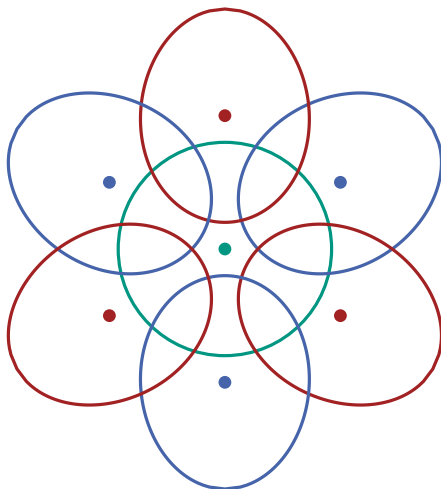
Ein Graph ist ein **Unit-Disk Graph**, wenn er der geometrische Schnittgraph einer Menge von Disks mit Radius 1 ist.



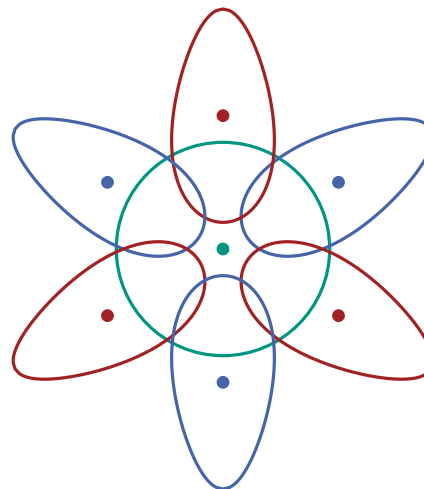
Jetzt hyperbolisch

- kann man im Prinzip erstmal analog definieren
- Achtung: der Radius macht auf einmal einen Unterschied

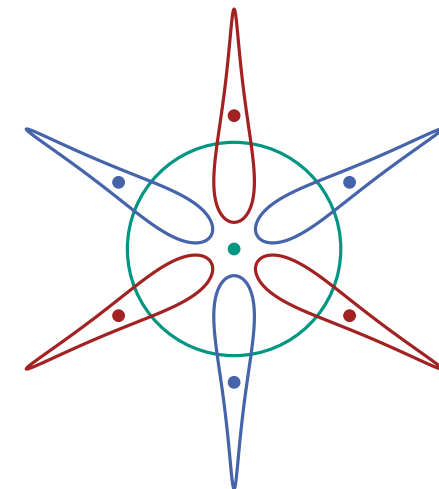
Kreisradius 1



Kreisradius 2



Kreisradius 4



Hyperbolische Unit-Disk Graphen

Definition

Beachte: die Disks der Schnittrepräsentation haben also Radius $R/2$

$G = (V, E)$ ist ein **hyperbolischer Unit-Disk Graph** wenn er eine hyperbolische Unit-Disk Repräsentation hat: ein Abbildung $p: V \rightarrow \mathbb{H}^2$ zusammen mit einem Radius R , sodass $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow d(p(u), p(v)) \leq R$.

Hyperbolische Unit-Disk Graphen

Definition

Beachte: die Disks der Schnittrepräsentation haben also Radius $R/2$

$G = (V, E)$ ist ein **hyperbolischer Unit-Disk Graph** wenn er eine hyperbolische Unit-Disk Repräsentation hat: ein Abbildung $p: V \rightarrow \mathbb{H}^2$ zusammen mit einem Radius R , sodass $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow d(p(u), p(v)) \leq R$.

Warum der Name *Unit-Disk Graph*?

- der Begriff *Unit* ist hier als „einheitlich“ statt als „Länge = 1“ zu verstehen

Hyperbolische Unit-Disk Graphen

Definition

Beachte: die Disks der Schnittrepräsentation haben also Radius $R/2$

$G = (V, E)$ ist ein **hyperbolischer Unit-Disk Graph** wenn er eine hyperbolische Unit-Disk Repräsentation hat: ein Abbildung $p: V \rightarrow \mathbb{H}^2$ zusammen mit einem Radius R , sodass $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow d(p(u), p(v)) \leq R$.

Warum der Name *Unit-Disk Graph*?

- der Begriff *Unit* ist hier als „einheitlich“ statt als „Länge = 1“ zu verstehen
- man erhält das gleiche, wenn man $R = 2$ fordert, aber die Krümmung der hyperbolischen Ebene nicht auf -1 festhält

Hyperbolische Unit-Disk Graphen

Definition

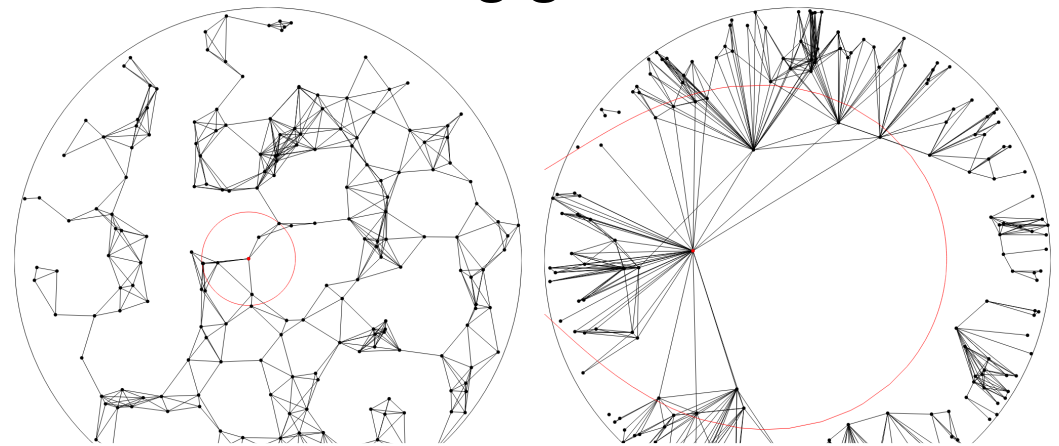
Beachte: die Disks der Schnittrepräsentation haben also Radius $R/2$

$G = (V, E)$ ist ein **hyperbolischer Unit-Disk Graph** wenn er eine hyperbolische Unit-Disk Repräsentation hat: ein Abbildung $p: V \rightarrow \mathbb{H}^2$ zusammen mit einem Radius R , sodass $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow d(p(u), p(v)) \leq R$.

Warum der Name *Unit-Disk Graph*?

- der Begriff *Unit* ist hier als „einheitlich“ statt als „Länge = 1“ zu verstehen
- man erhält das gleiche, wenn man $R = 2$ fordert, aber die Krümmung der hyperbolischen Ebene nicht auf -1 festhält

Bekomme ich unterschiedliche Strukturen abhängig von R ?



<https://thobl.github.io/hyperbolic-unit-disk-graph/>

Hyperbolische Unit-Disk Graphen

Definition

Beachte: die Disks der Schnittrepräsentation haben also Radius $R/2$

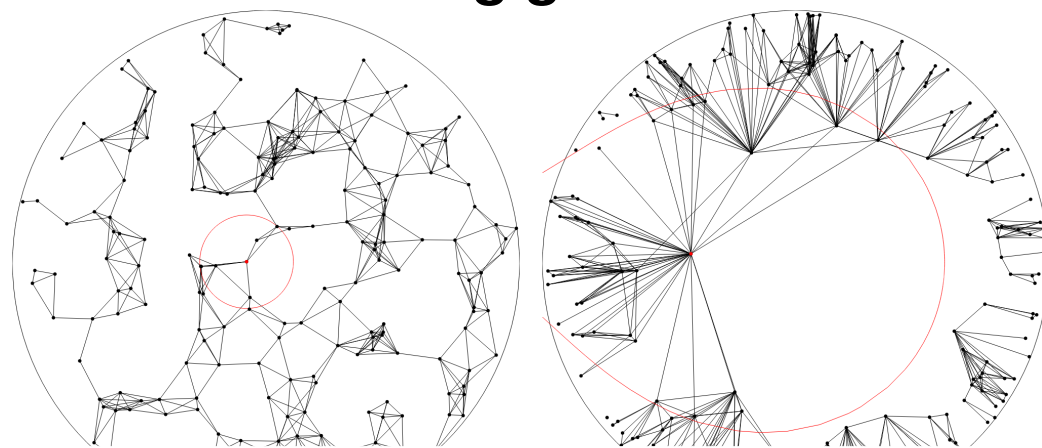
$G = (V, E)$ ist ein **hyperbolischer Unit-Disk Graph** wenn er eine hyperbolische Unit-Disk Repräsentation hat: ein Abbildung $p: V \rightarrow \mathbb{H}^2$ zusammen mit einem Radius R , sodass $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow d(p(u), p(v)) \leq R$.

Warum der Name *Unit-Disk Graph*?

- der Begriff *Unit* ist hier als „einheitlich“ statt als „Länge = 1“ zu verstehen
- man erhält das gleiche, wenn man $R = 2$ fordert, aber die Krümmung der hyperbolischen Ebene nicht auf -1 festhält


Bekomme ich unterschiedliche Strukturen abhängig von R ?

- kleines R
 - wie im Euklidischen
 - regelmäßig / homogen
 - gitterartig
- großes R
 - unregelmäßig / inhomogen
 - hierarchisch



<https://thobl.github.io/hyperbolic-unit-disk-graph/>

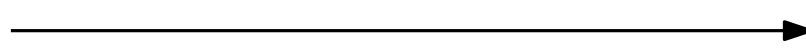
Wie hyperbolisch darfs sein?

kleiner Radius R  großer Radius R

hyperbolische Unit-Disk Graphen

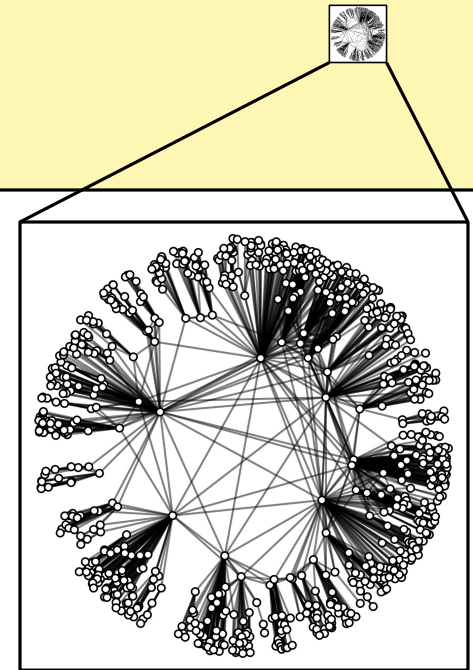
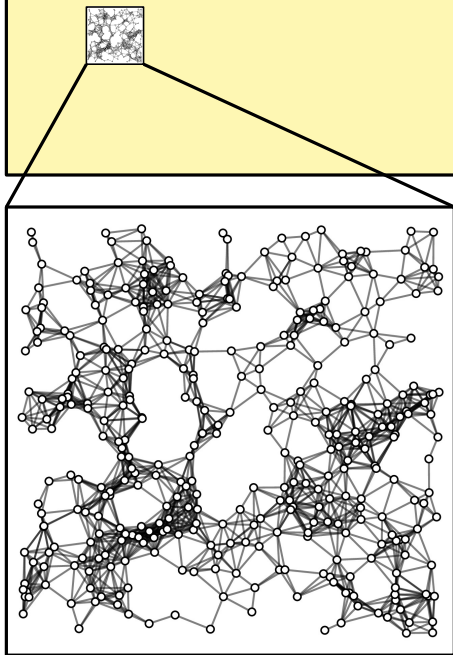
Wie hyperbolisch darfs sein?

kleiner Radius R



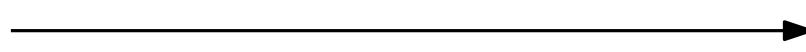
großer Radius R

hyperbolische Unit-Disk Graphen



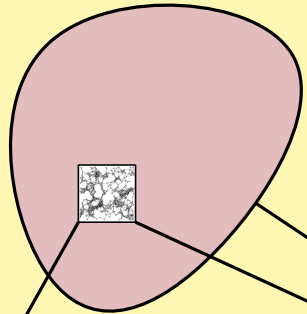
Wie hyperbolisch darfs sein?

kleiner Radius R

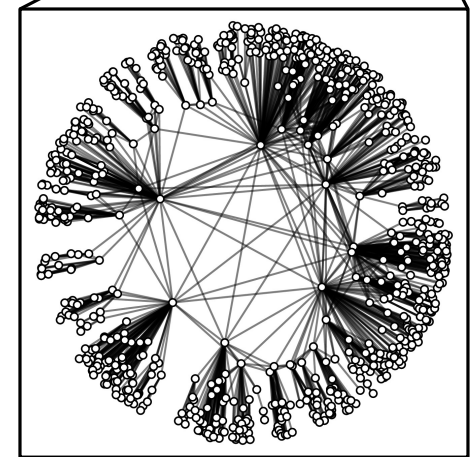
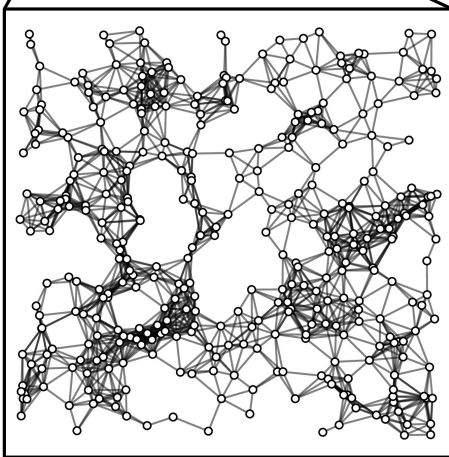


großer Radius R

hyperbolische Unit-Disk Graphen



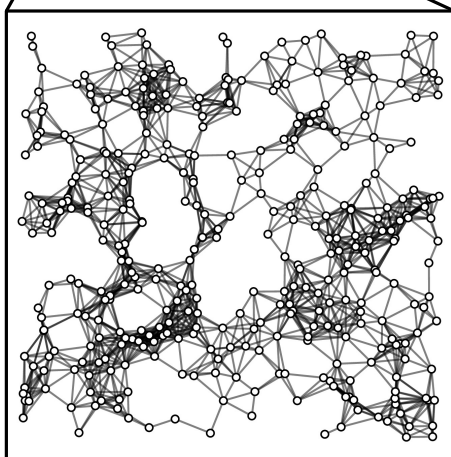
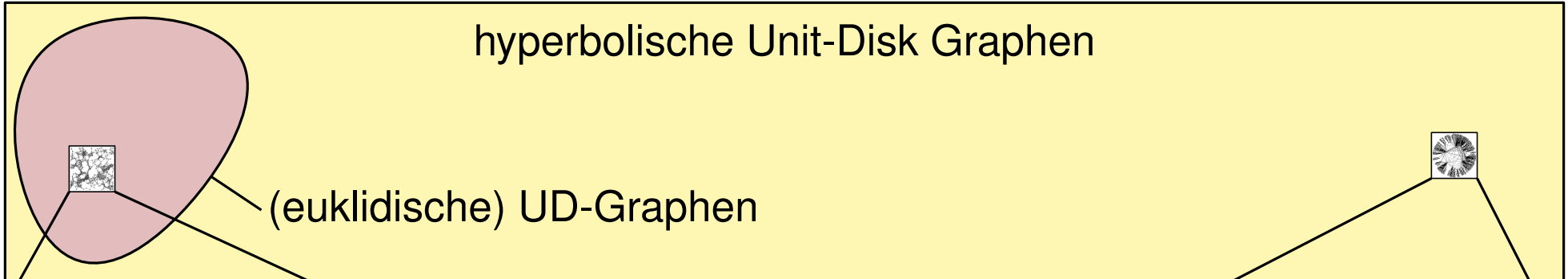
(euklidische) UD-Graphen



Wie hyperbolisch darfs sein?

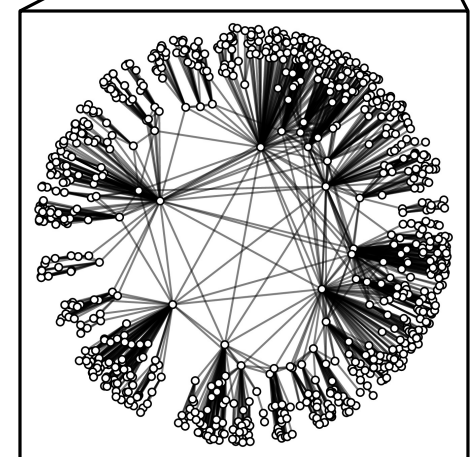
kleiner Radius R \longrightarrow großer Radius R

hyperbolische Unit-Disk Graphen



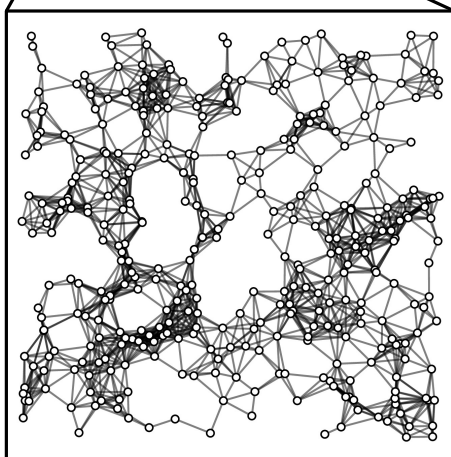
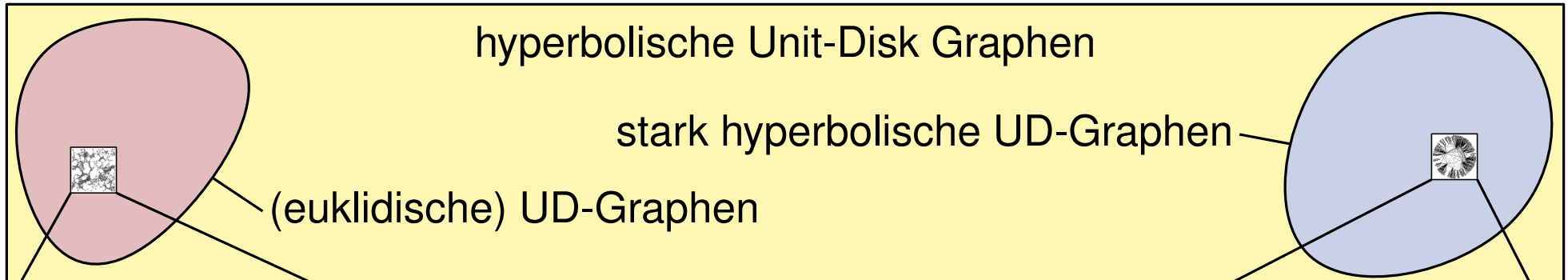
Situation

- euklidische UD-Graphen sind eine Teilklasse von hyperbolischen
- viele hyperbolische UD-Graphen sind nicht sehr hyperbolisch



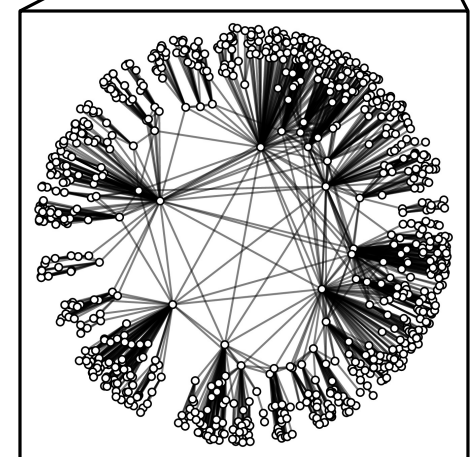
Wie hyperbolisch darfs sein?

kleiner Radius R \longrightarrow großer Radius R



Situation

- euklidische UD-Graphen sind eine Teilklasse von hyperbolischen
- viele hyperbolische UD-Graphen sind nicht sehr hyperbolisch



Stark hyperbolische Unit-Disk Graphen

- Ziel: Gegenstück zu euklidischen UD-Graphen
- mit hierarchischer / heterogener Struktur
- Wie formalisieren wir das? Wie groß ist groß genug für R ?

Stark hyperbolisch

Definition

$G = (V, E)$ ist ein **hyperbolischer Unit-Disk Graph** wenn er eine hyperbolische Unit-Disk Repräsentation hat: ein Abbildung $p: V \rightarrow \mathbb{H}^2$ zusammen mit einem Radius R , sodass $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow d(p(u), p(v)) \leq R$.

Definition

G ist ein **stark hyperbolischer Unit-Disk Graph**, wenn p alle Knoten in eine Disk mit Radius R abbildet.

<https://thobl.github.io/hyperbolic-unit-disk-graph/>

Stark hyperbolisch

Definition

$G = (V, E)$ ist ein **hyperbolischer Unit-Disk Graph** wenn er eine hyperbolische Unit-Disk Repräsentation hat: ein Abbildung $p: V \rightarrow \mathbb{H}^2$ zusammen mit einem Radius R , sodass $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow d(p(u), p(v)) \leq R$.

Definition

G ist ein **stark hyperbolischer Unit-Disk Graph**, wenn p alle Knoten in eine Disk mit Radius R abbildet.

<https://thobl.github.io/hyperbolic-unit-disk-graph/>

Darstellung

- wähle Zentrum dieser Disk als Ursprung für die nativen Polarkoordinaten
- **Achtung:** nicht mit der Poincaré Disk verwechseln

Stark hyperbolisch

Definition

$G = (V, E)$ ist ein **hyperbolischer Unit-Disk Graph** wenn er eine hyperbolische Unit-Disk Repräsentation hat: ein Abbildung $p: V \rightarrow \mathbb{H}^2$ zusammen mit einem Radius R , sodass $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow d(p(u), p(v)) \leq R$.

Definition

G ist ein **stark hyperbolischer Unit-Disk Graph**, wenn p alle Knoten in eine Disk mit Radius R abbildet.

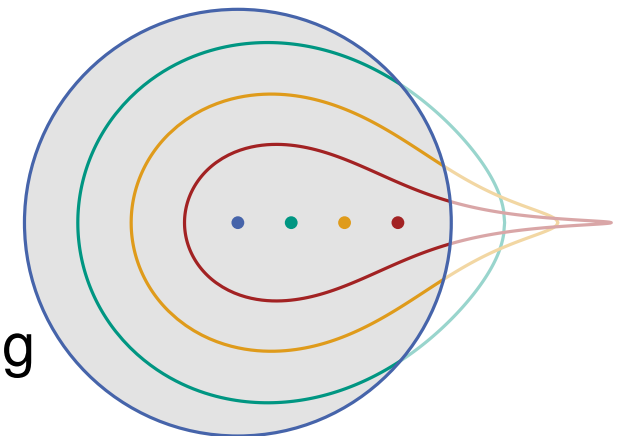
<https://thobl.github.io/hyperbolic-unit-disk-graph/>

Darstellung

- wähle Zentrum dieser Disk als Ursprung für die nativen Polarkoordinaten
- **Achtung:** nicht mit der Poincaré Disk verwechseln

Beobachtungen

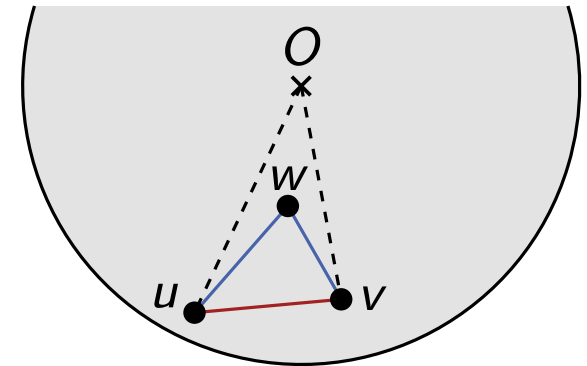
- Knoten im Ursprung: mit allen anderen benachbart
- je weiter außen ein Knoten, desto kleiner sein Einflussbereich
- maximale Heterogenität: jede Distanz vom Ursprung liefert unterschiedlich großen Einflussbereich



Erzwungene Kanten (stark hyperbolisch)

Situation

- stark hyperbolische UD-Repräsentation
- w liegt bezüglich Winkel zwischen u und v
- w liegt weiter innen als u und v



Erzwungene Kanten (stark hyperbolisch)

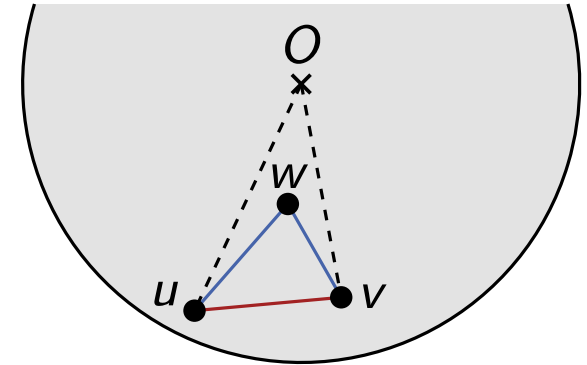
Situation

- stark hyperbolische UD-Repräsentation
- w liegt bezüglich Winkel zwischen u und v
- w liegt weiter innen als u und v

Theorem

Wenn $\{u, v\} \in E$, dann auch $\{u, w\}, \{v, w\} \in E$.

Beweis



Erzwungene Kanten (stark hyperbolisch)

Situation

- stark hyperbolische UD-Repräsentation
- w liegt bezüglich Winkel zwischen u und v
- w liegt weiter innen als u und v

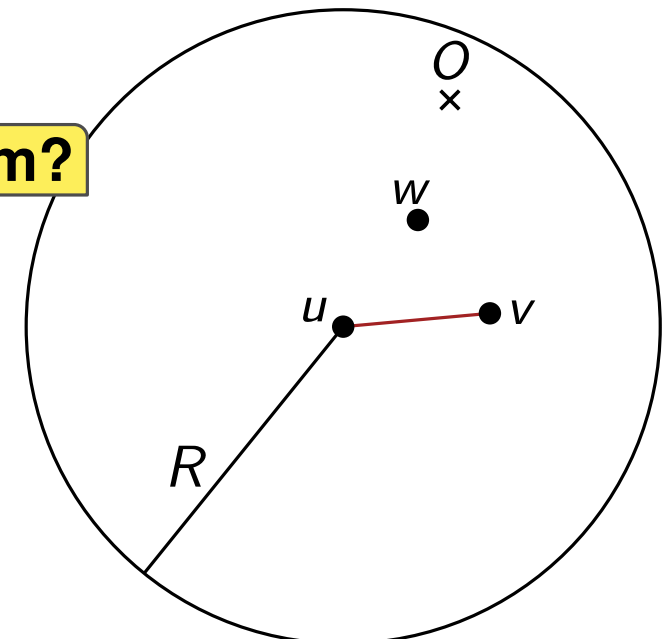
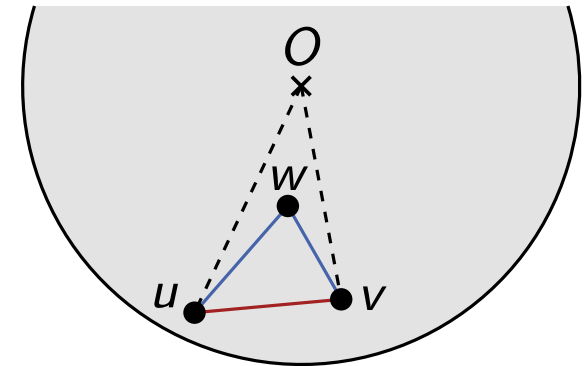
Theorem

Wenn $\{u, v\} \in E$, dann auch $\{u, w\}, \{v, w\} \in E$.

Beweis

- Kreis um u mit Radius R enthält v und O

Warum?



(schematische Darstellung)

Erzwungene Kanten (stark hyperbolisch)

Situation

- stark hyperbolische UD-Repräsentation
- w liegt bezüglich Winkel zwischen u und v
- w liegt weiter innen als u und v

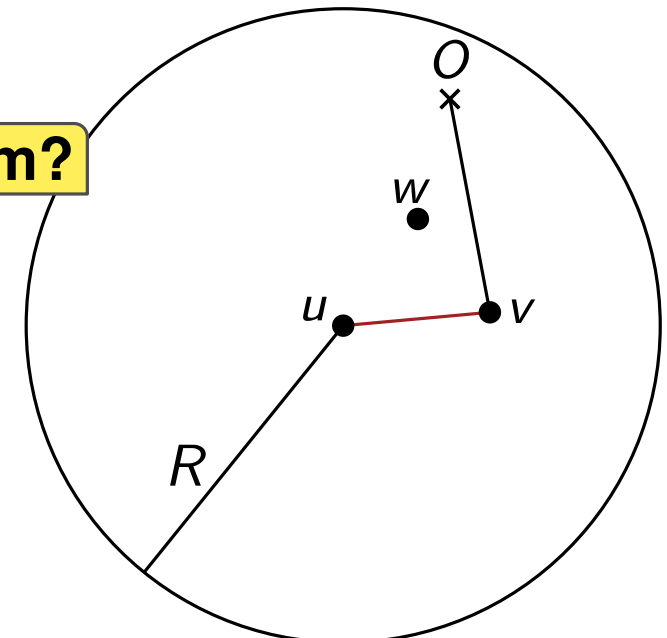
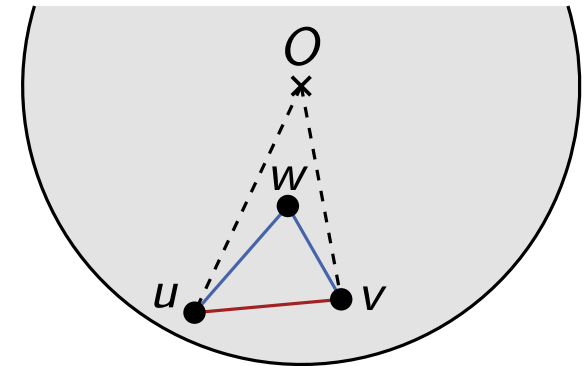
Theorem

Wenn $\{u, v\} \in E$, dann auch $\{u, w\}, \{v, w\} \in E$.

Beweis

- Kreis um u mit Radius R enthält v und O
- Kreis sind konvex \Rightarrow Strecke \overline{vO} liegt im Kreis

Warum?



(schematische Darstellung)

Erzwungene Kanten (stark hyperbolisch)

Situation

- stark hyperbolische UD-Repräsentation
- w liegt bezüglich Winkel zwischen u und v
- w liegt weiter innen als u und v

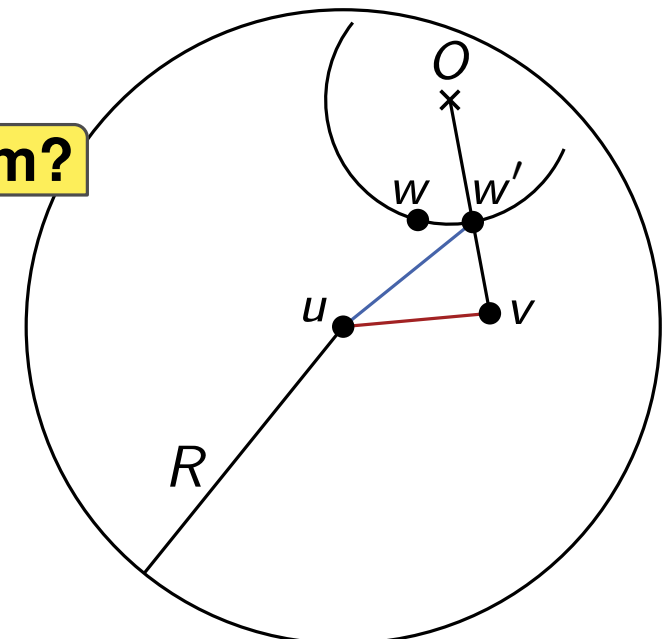
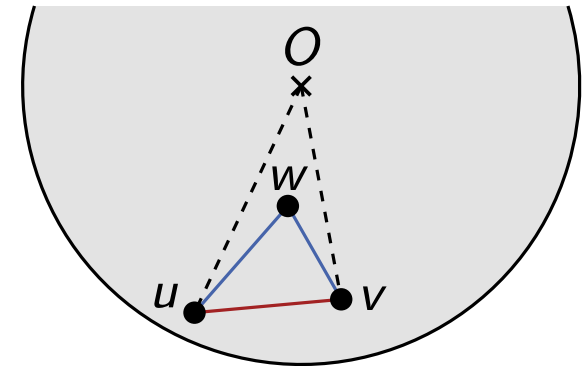
Theorem

Wenn $\{u, v\} \in E$, dann auch $\{u, w\}, \{v, w\} \in E$.

Beweis

- Kreis um u mit Radius R enthält v und O
- Kreis sind konvex \Rightarrow Strecke \overline{vO} liegt im Kreis
- w' liegt in dem Kreis $\Rightarrow d(u, w') \leq R$

Warum?



(schematische Darstellung)

Erzwungene Kanten (stark hyperbolisch)

Situation

- stark hyperbolische UD-Repräsentation
- w liegt bezüglich Winkel zwischen u und v
- w liegt weiter innen als u und v

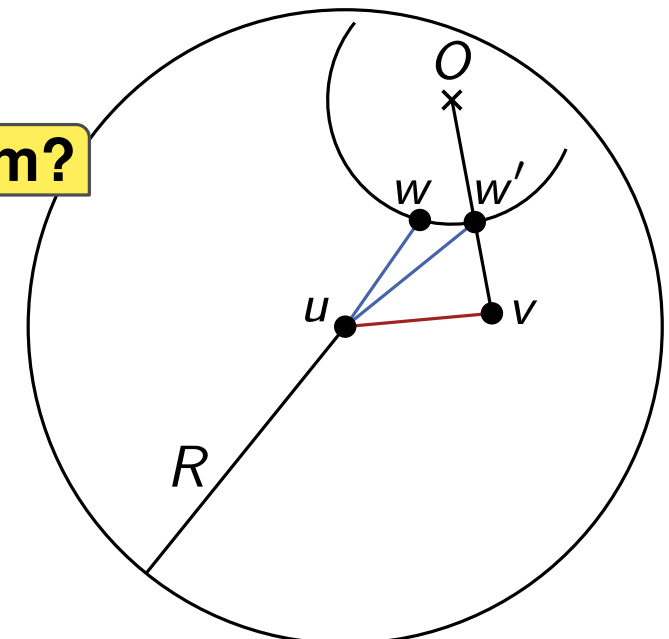
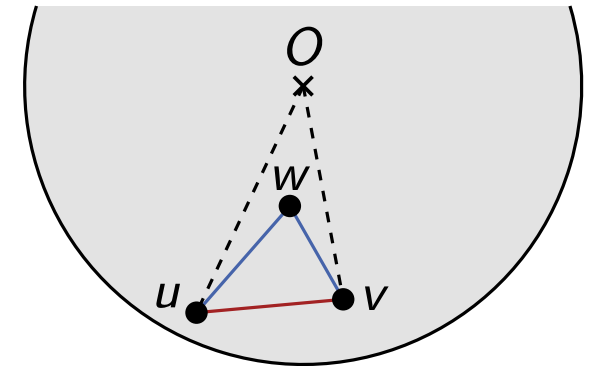
Theorem

Wenn $\{u, v\} \in E$, dann auch $\{u, w\}, \{v, w\} \in E$.

Beweis

- Kreis um u mit Radius R enthält v und O
- Kreis sind konvex \Rightarrow Strecke \overline{vO} liegt im Kreis
- w' liegt in dem Kreis $\Rightarrow d(u, w') \leq R$
- Distanz ist monoton bzgl. Winkeldifferenz
 $\Rightarrow d(u, w) \leq R$

Warum?



(schematische Darstellung)

Erzwungene Kanten (stark hyperbolisch)

Situation

- stark hyperbolische UD-Repräsentation
- w liegt bezüglich Winkel zwischen u und v
- w liegt weiter innen als u und v

Theorem

Wenn $\{u, v\} \in E$, dann auch $\{u, w\}, \{v, w\} \in E$.

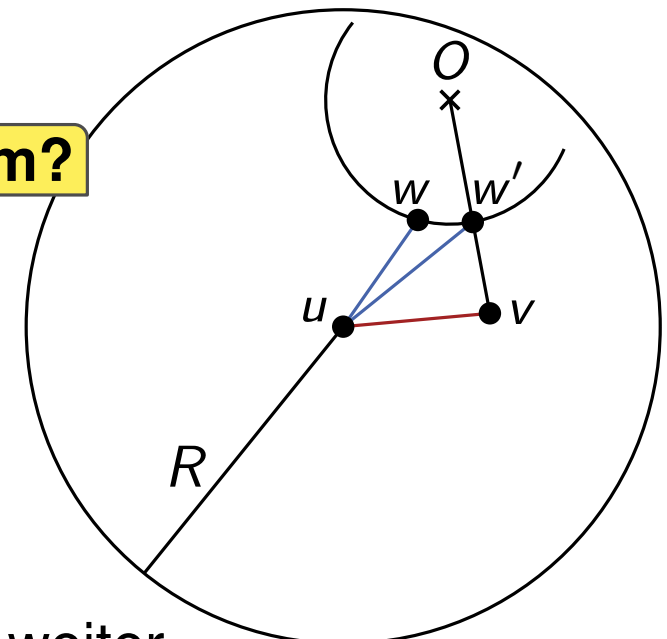
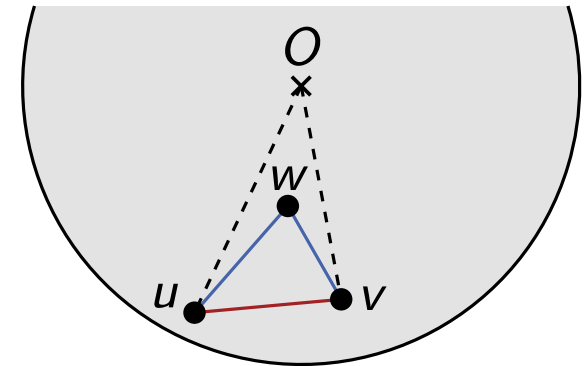
Beweis

- Kreis um u mit Radius R enthält v und O
- Kreis sind konvex \Rightarrow Strecke \overline{vO} liegt im Kreis
- w' liegt in dem Kreis $\Rightarrow d(u, w') \leq R$
- Distanz ist monoton bzgl. Winkeldifferenz
 $\Rightarrow d(u, w) \leq R$

Warum?

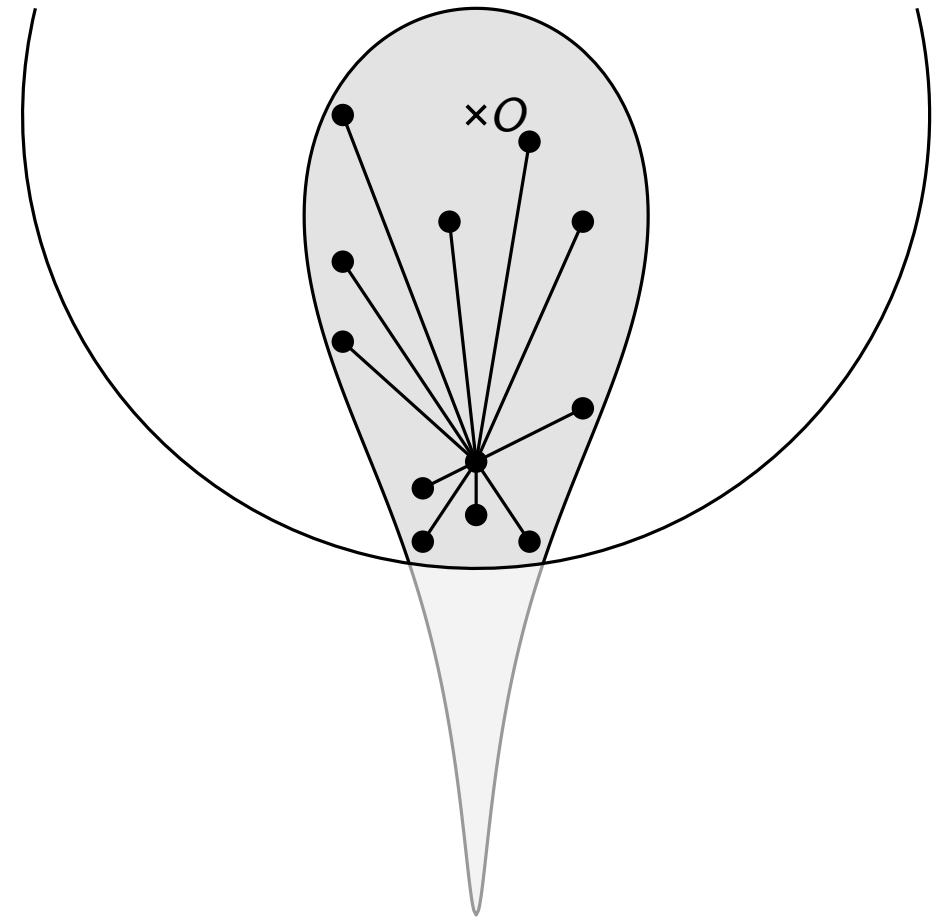
Anmerkung

- man kann also nicht unbemerkt außen an einem weiter innen liegenden Knoten vorbeilaufen
- hierarchische Strukturen: je weiter innen desto höher in der Hierarchie

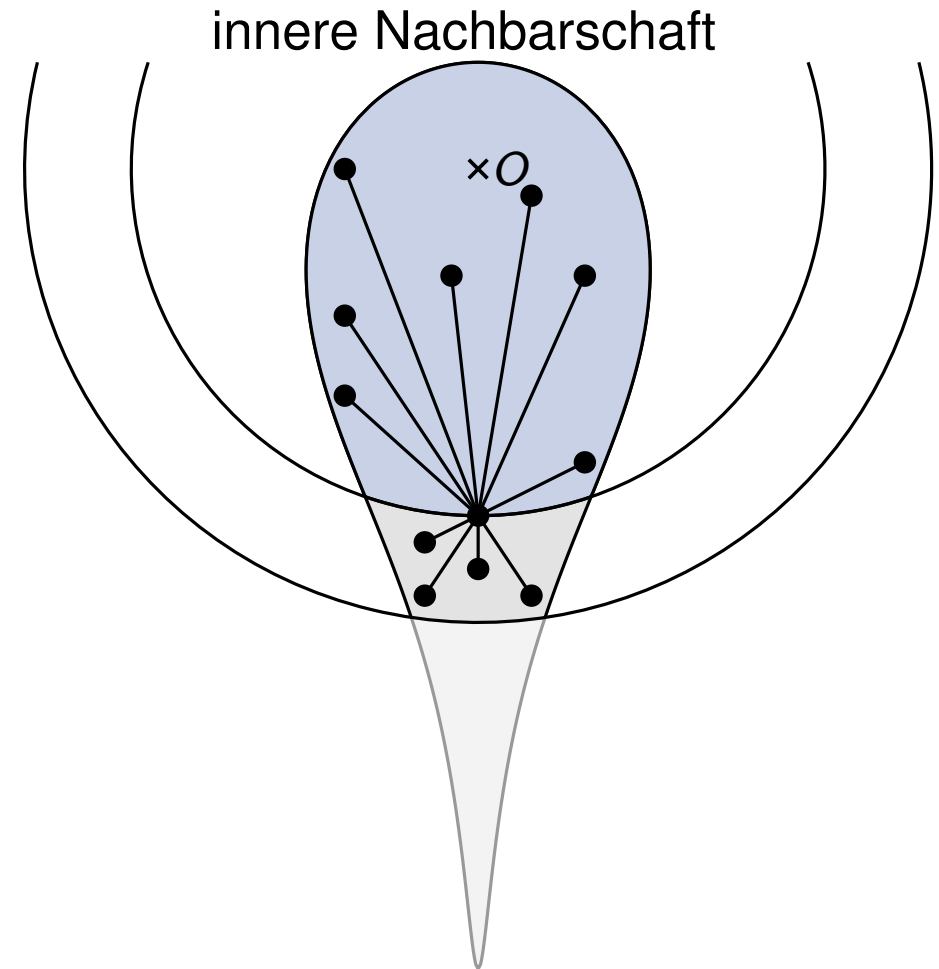


(schematische Darstellung)

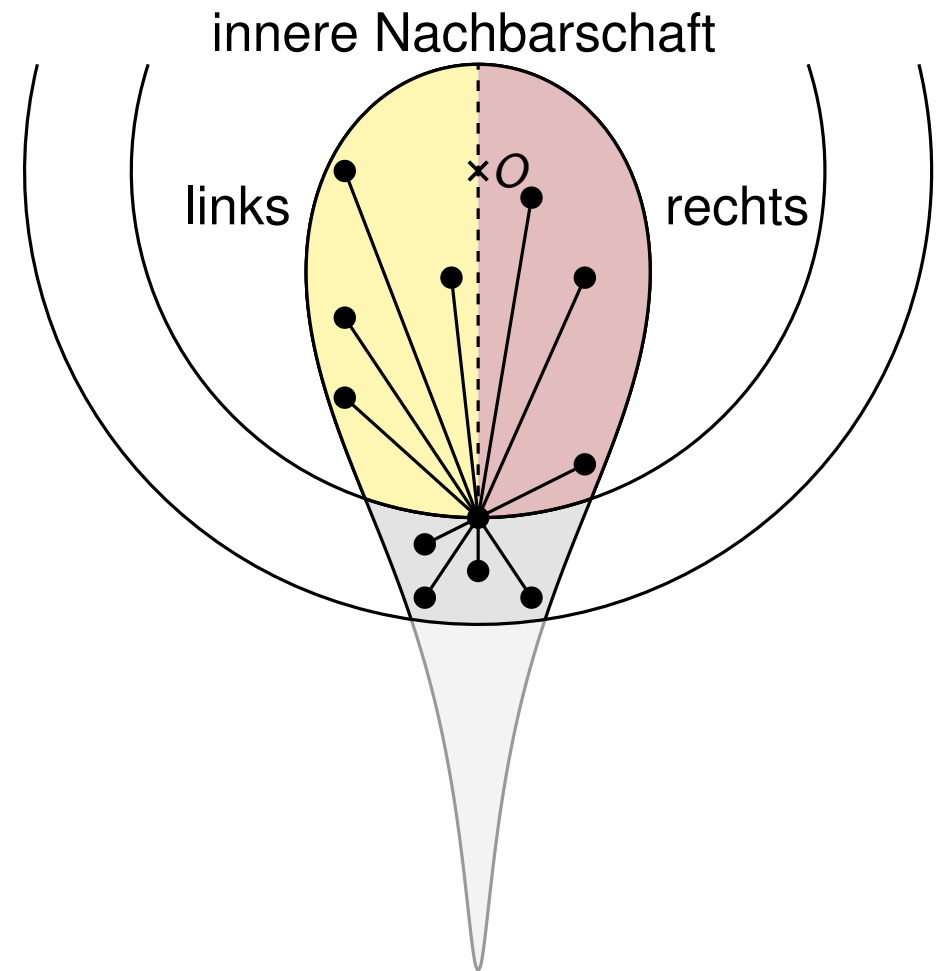
Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)



Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)



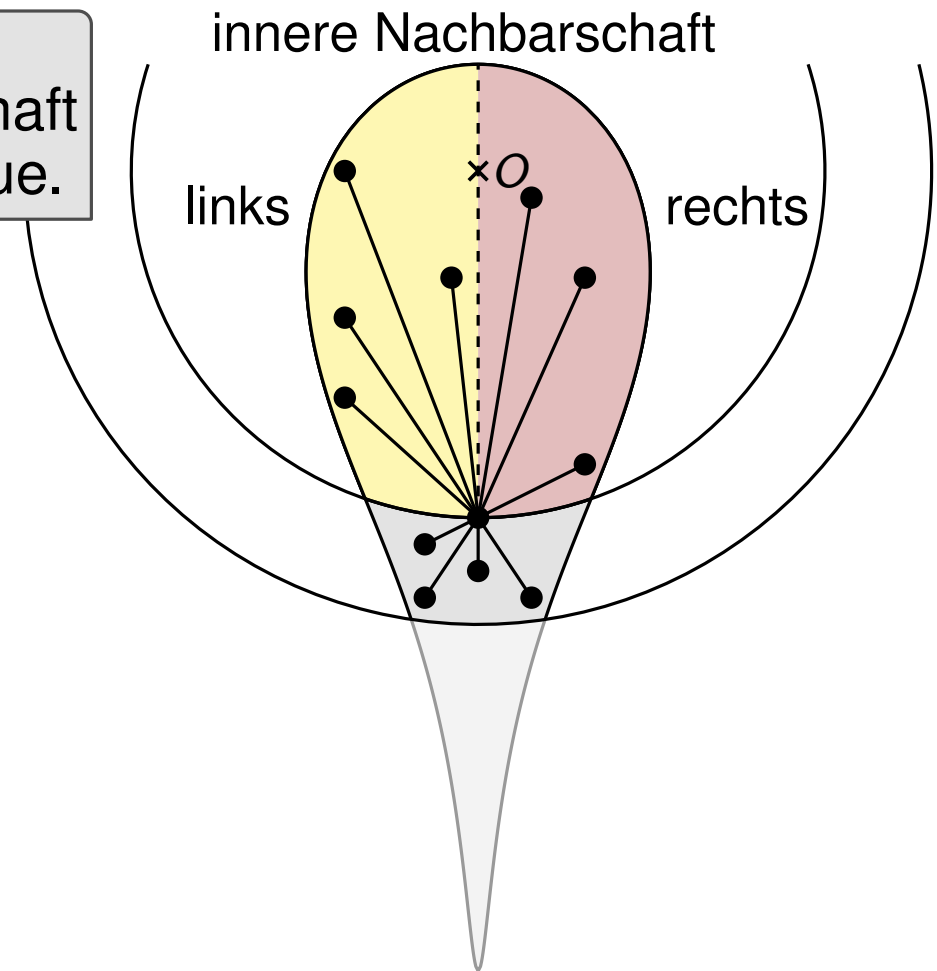
Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)



Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)

Theorem

Die linke und rechte innere Nachbarschaft eines Knotens bilden jeweils eine Clique.



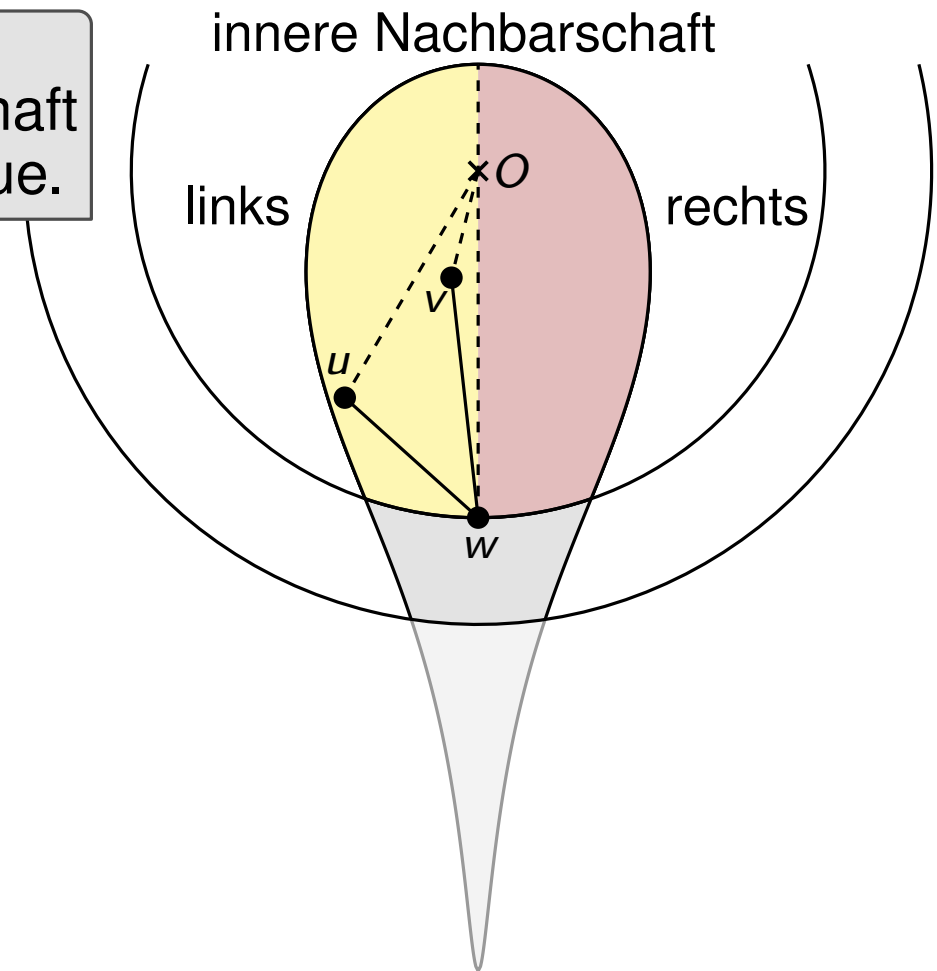
Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)

Theorem

Die linke und rechte innere Nachbarschaft eines Knotens bilden jeweils eine Clique.

Beweis

- zeige: u und v sind verbunden



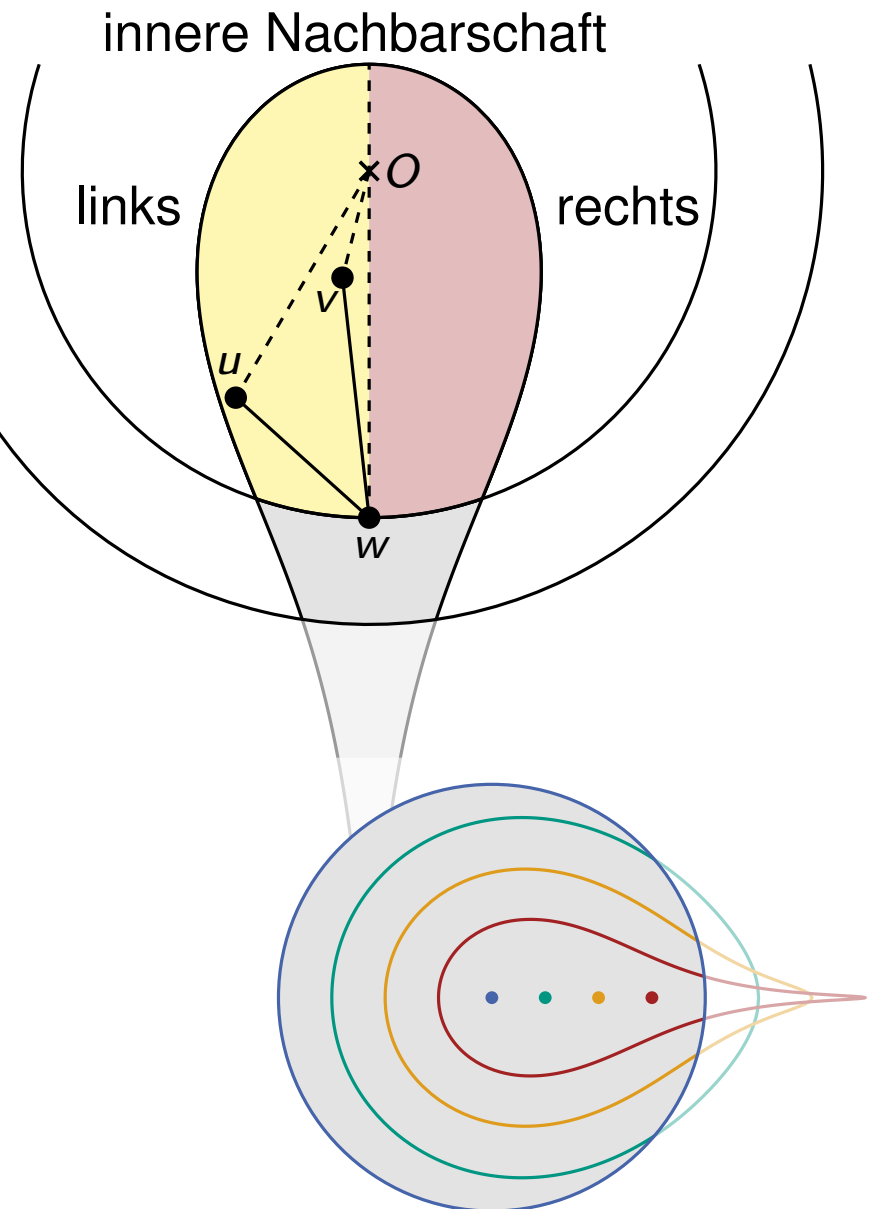
Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)

Theorem

Die linke und rechte innere Nachbarschaft eines Knotens bilden jeweils eine Clique.

Beweis

- zeige: u und v sind verbunden
- w Richtung O verschieben verkleinert seine Nachbarschaft nicht



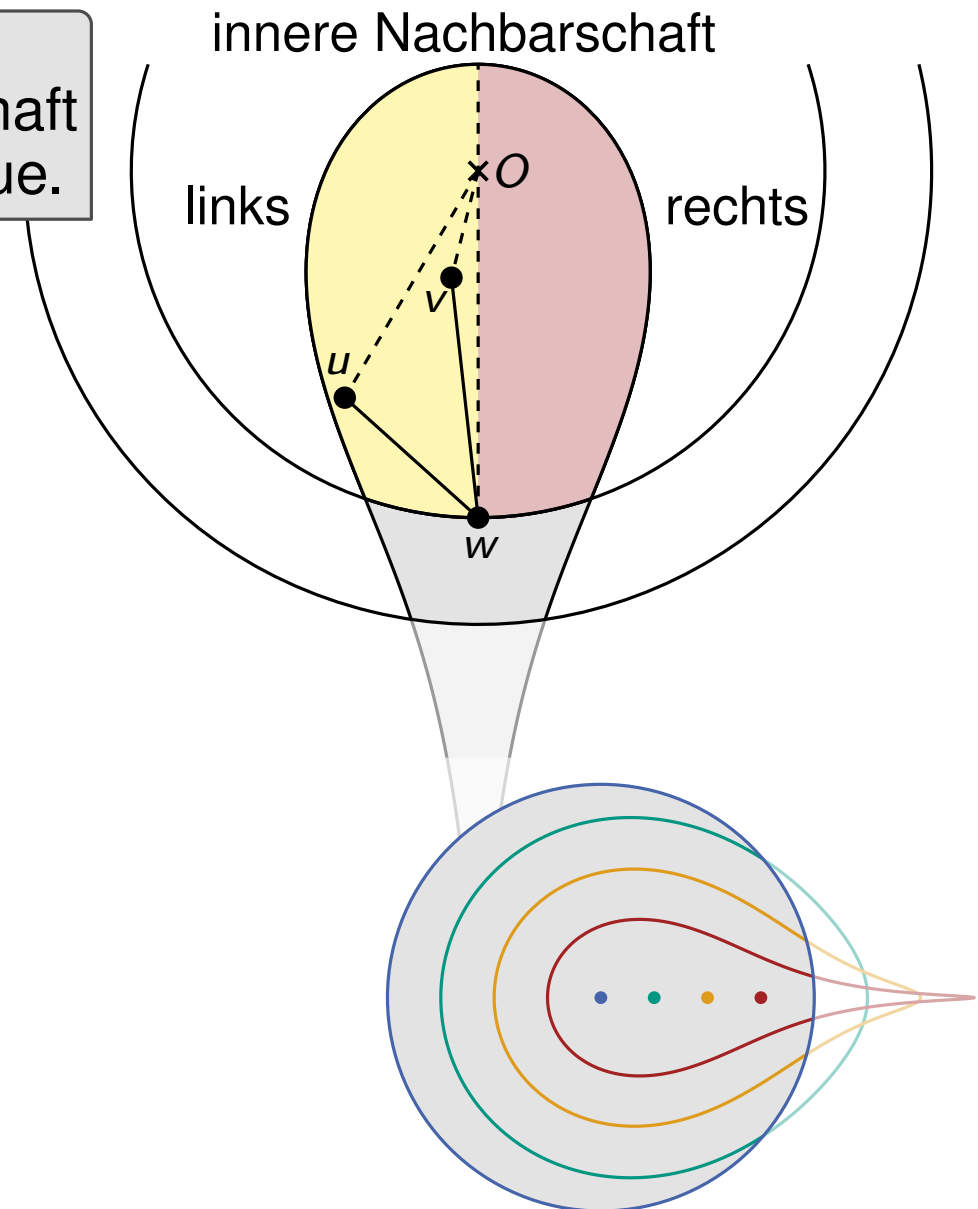
Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)

Theorem

Die linke und rechte innere Nachbarschaft eines Knotens bilden jeweils eine Clique.

Beweis

- zeige: u und v sind verbunden
- w Richtung O verschieben verkleinert seine Nachbarschaft nicht
- verschiebe w , sodass $r_w = r_v$
 $\Rightarrow w$ bleibt mit u verbunden
 (beachte: $d(u, w)$ wird ggf. größer, aber nicht größer als R)



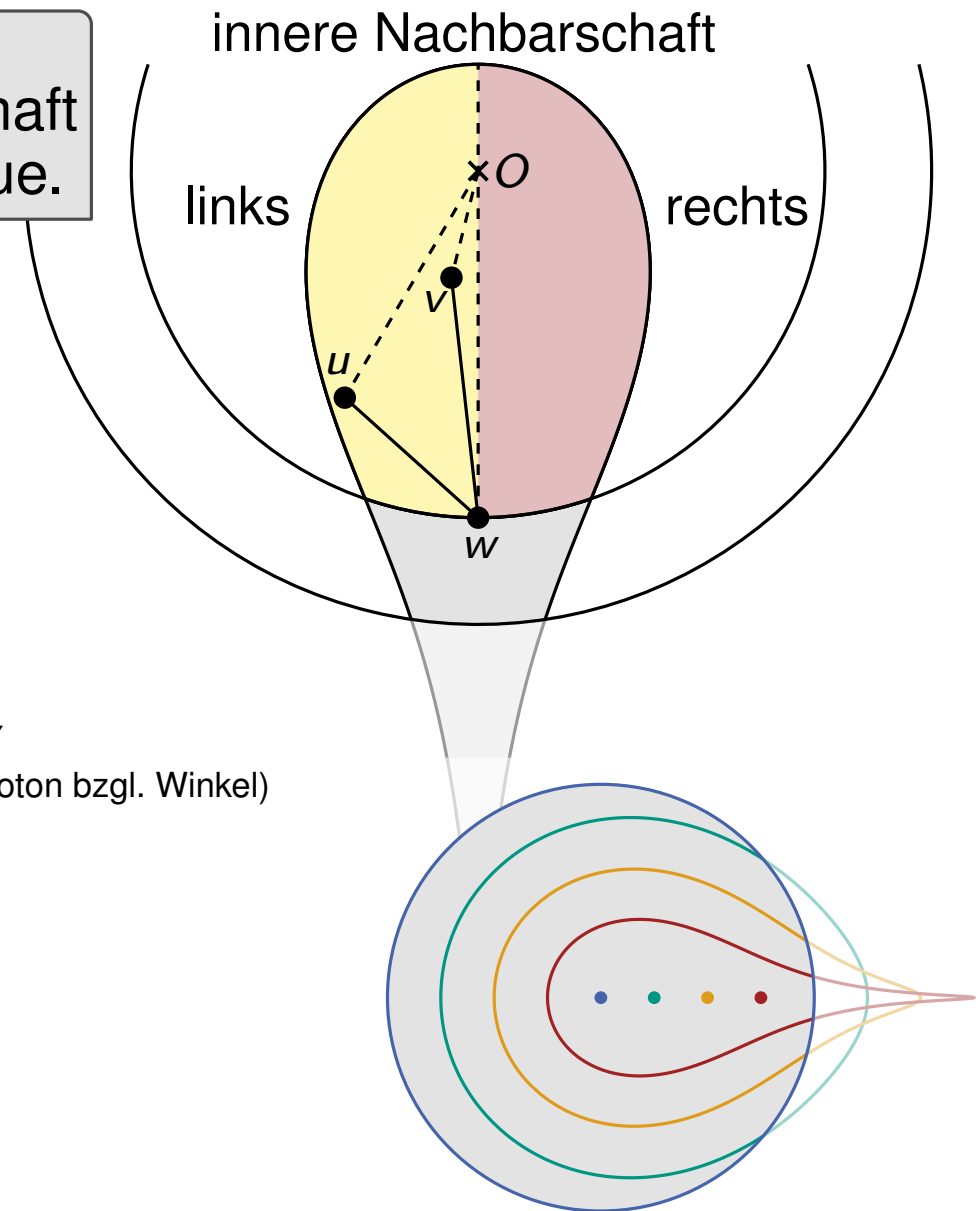
Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)

Theorem

Die linke und rechte innere Nachbarschaft eines Knotens bilden jeweils eine Clique.

Beweis

- zeige: u und v sind verbunden
- w Richtung O verschieben verkleinert seine Nachbarschaft nicht
- verschiebe w , sodass $r_w = r_v$
 $\Rightarrow w$ bleibt mit u verbunden
 (beachte: $d(u, w)$ wird ggf. größer, aber nicht größer als R)
- verschiebe w weiter, sodass $\varphi_w = \varphi_v$
 $\Rightarrow w$ bleibt mit u verbunden (Distanz monoton bzgl. Winkel)



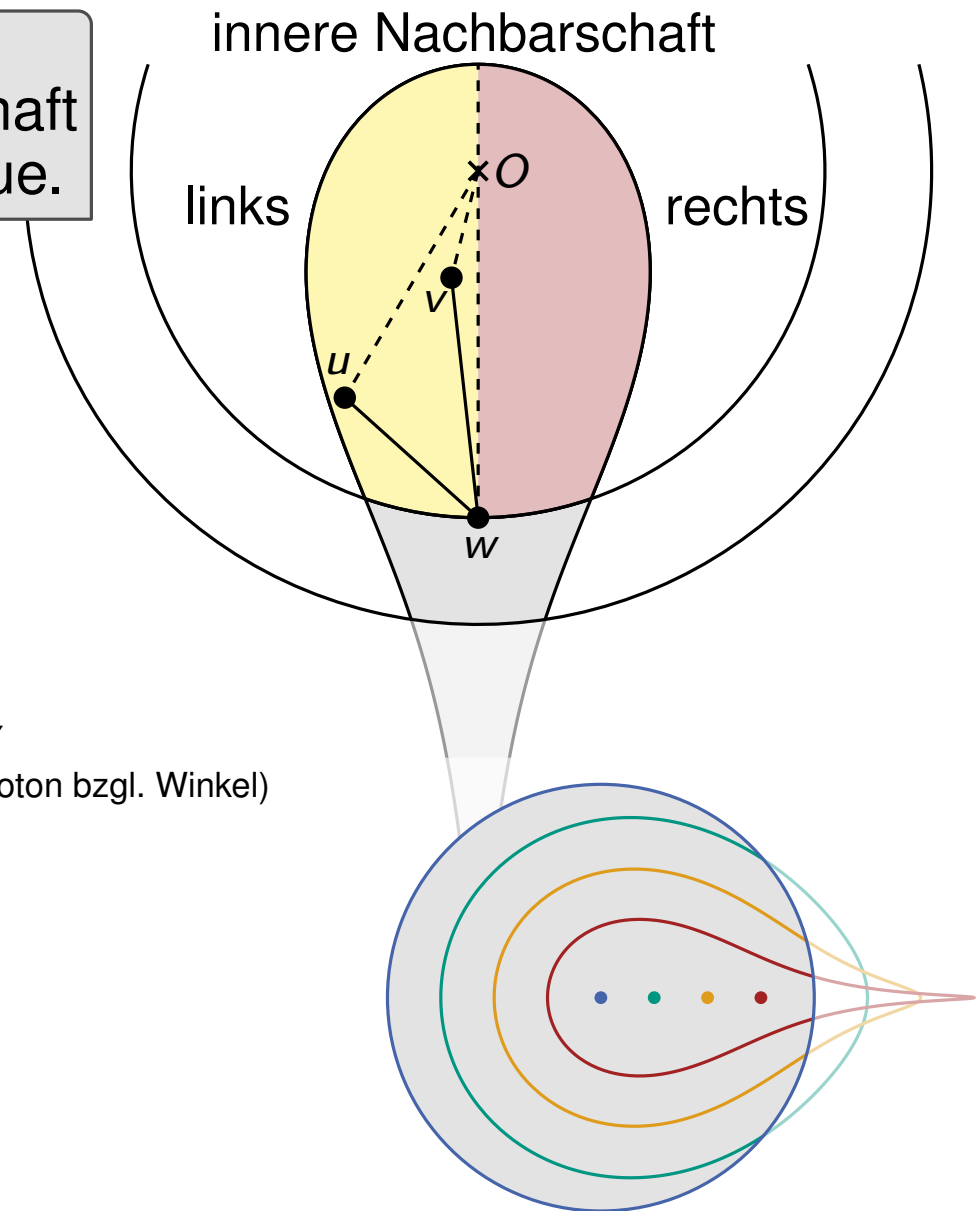
Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)

Theorem

Die linke und rechte innere Nachbarschaft eines Knotens bilden jeweils eine Clique.

Beweis

- zeige: u und v sind verbunden
- w Richtung O verschieben verkleinert seine Nachbarschaft nicht
- verschiebe w , sodass $r_w = r_v$
 $\Rightarrow w$ bleibt mit u verbunden
(beachte: $d(u, w)$ wird ggf. größer, aber nicht größer als R)
- verschiebe w weiter, sodass $\varphi_w = \varphi_v$
 $\Rightarrow w$ bleibt mit u verbunden (Distanz monoton bzgl. Winkel)
- also: $\{u, v\} \in E$



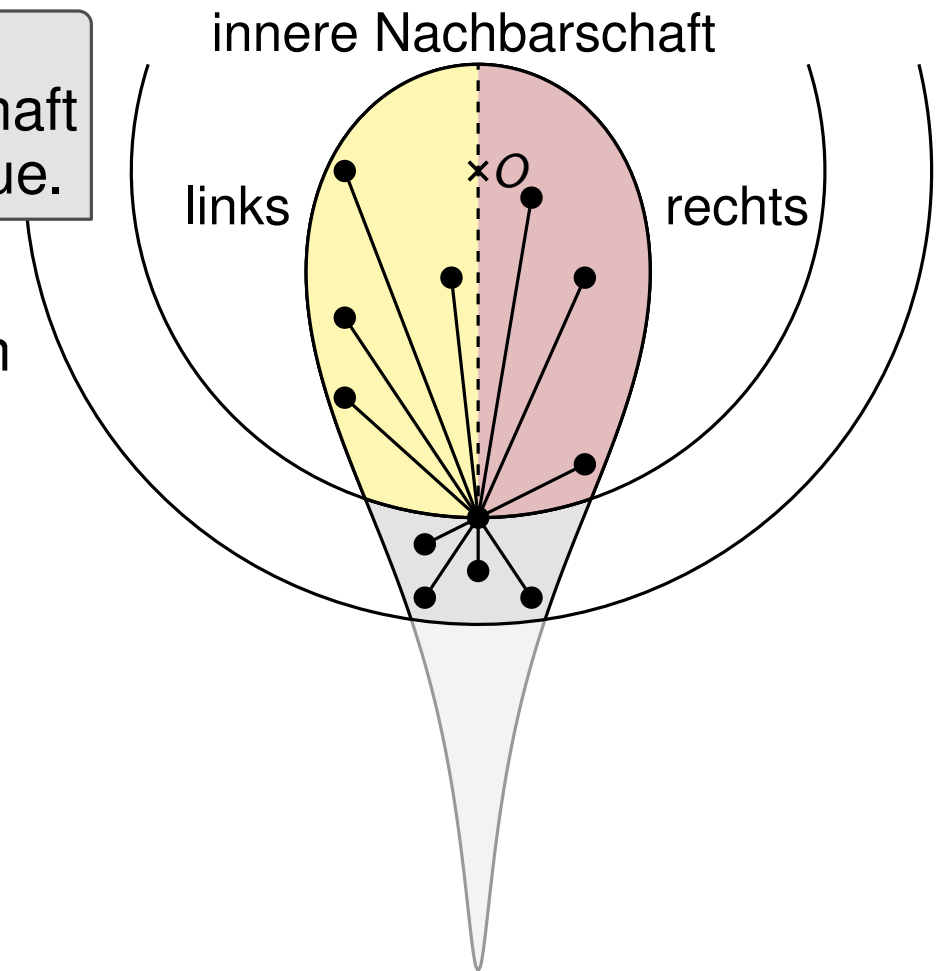
Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)

Theorem

Die linke und rechte innere Nachbarschaft eines Knotens bilden jeweils eine Clique.

Folgerung

- sortiere Knoten v_1, \dots, v_n von Außen nach Innen
- lösche Knoten nach und nach:
 $G_i = G[\{v_i, \dots, v_n\}]$



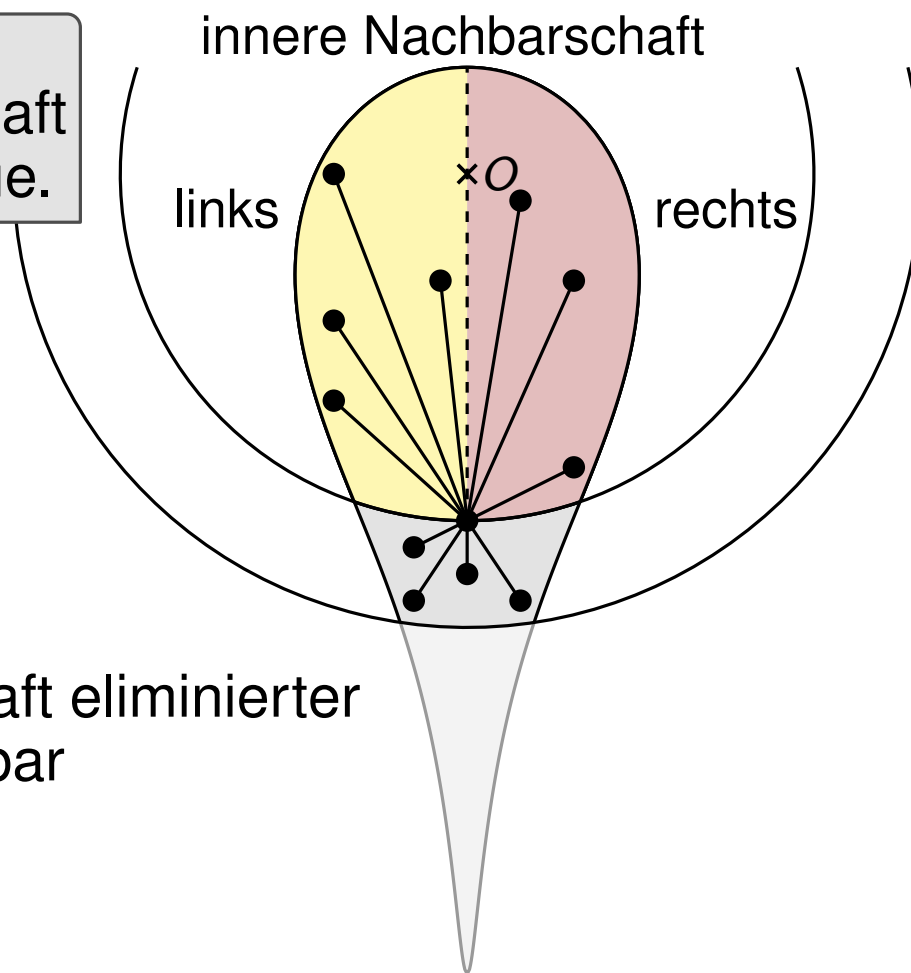
Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)

Theorem

Die linke und rechte innere Nachbarschaft eines Knotens bilden jeweils eine Clique.

Folgerung

- sortiere Knoten v_1, \dots, v_n von Außen nach Innen
- lösche Knoten nach und nach:
 $G_i = G[\{v_i, \dots, v_n\}]$
- v_i hat in G_i nur innere Nachbarn
- Eliminationsschema mit: Nachbarschaft eliminiertes Knoten durch zwei Cliques überdeckbar



Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)

Theorem

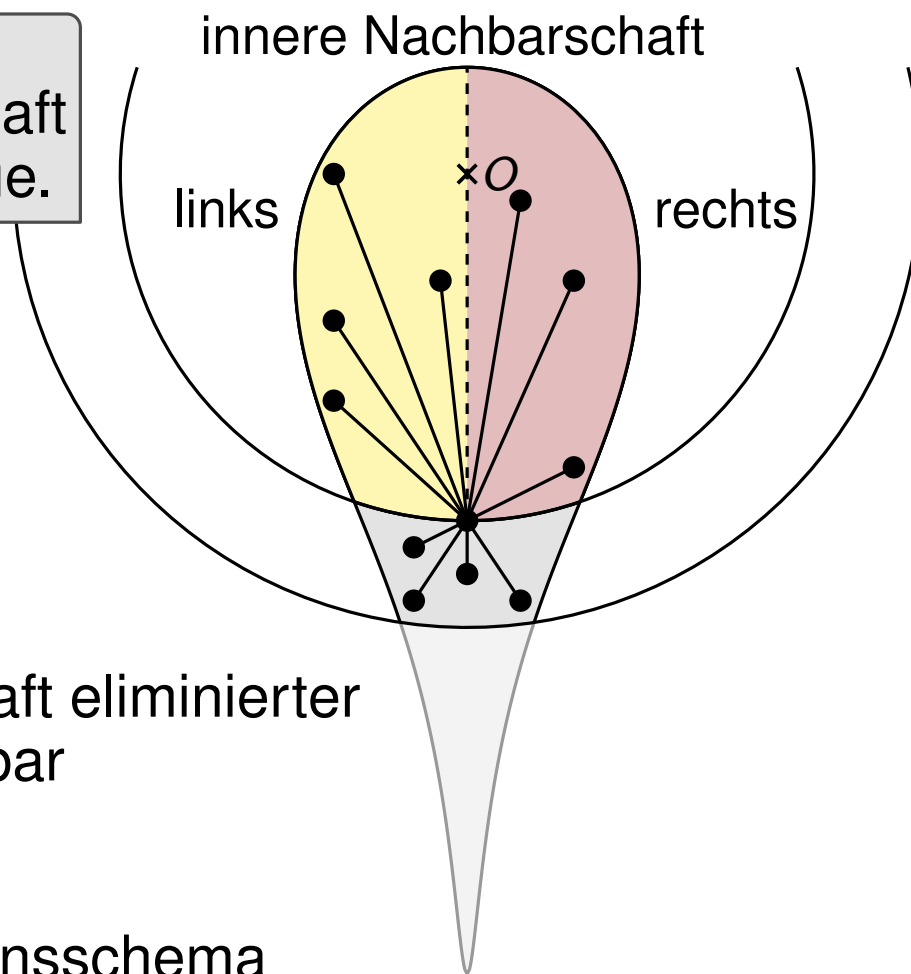
Die linke und rechte innere Nachbarschaft eines Knotens bilden jeweils eine Clique.

Folgerung

- sortiere Knoten v_1, \dots, v_n von Außen nach Innen
- lösche Knoten nach und nach:
 $G_i = G[\{v_i, \dots, v_n\}]$
- v_i hat in G_i nur innere Nachbarn
- Eliminationsschema mit: Nachbarschaft eliminiertes Knoten durch zwei Cliques überdeckbar

Vergleich: Chordale Graphen

- Graph chordal \Leftrightarrow perfektes Eliminationsschema
- perfektes Eliminationsschema: Nachbarschaft eliminiertes Knoten bilden Clique



Was können wir damit machen?

Folgerung

Sei $G = (V, E)$ ein stark hyperbolischer Unit-Disk Graph. Es gibt eine Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, sodass für alle $i \in [n]$ die Nachbarschaft von v_i in $G_i = G[\{v_i, \dots, v_n\}]$ durch zwei Cliques überdeckt werden kann.

kurze Pause

Können wir effizient testen, ob ein Graph mit zwei Cliques überdeckt werden kann?

Hilft eine solche Ordnung dabei, die Größe der maximale Cliques in G auszurechnen?

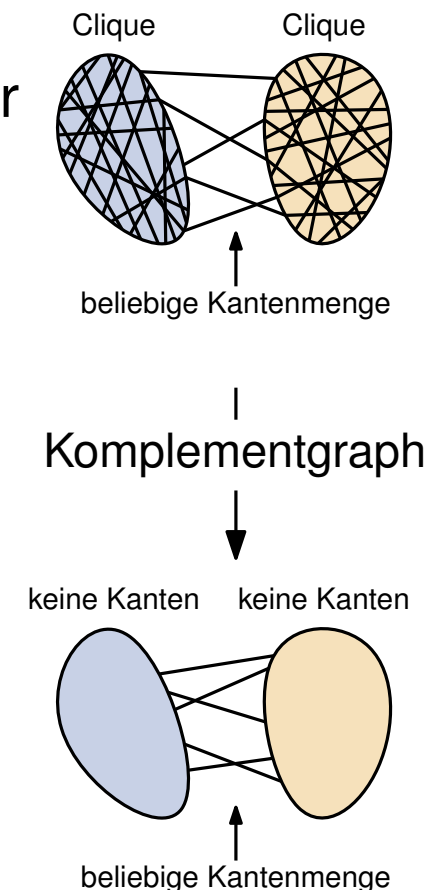
Was können wir damit machen?

Folgerung

Sei $G = (V, E)$ ein stark hyperbolischer Unit-Disk Graph. Es gibt eine Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, sodass für alle $i \in [n]$ die Nachbarschaft von v_i in $G_i = G[\{v_i, \dots, v_n\}]$ durch zwei Cliques überdeckt werden kann.

Mit zwei Cliques überdeckbare Graphen

- Komplement mit zwei unabhängigen Mengen überdeckbar
- also: Komplement ist bipartit



Was können wir damit machen?

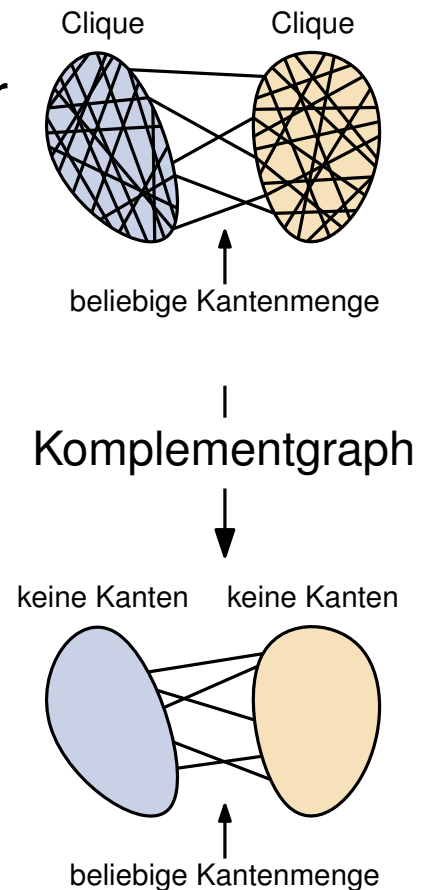
Folgerung

Sei $G = (V, E)$ ein stark hyperbolischer Unit-Disk Graph. Es gibt eine Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, sodass für alle $i \in [n]$ die Nachbarschaft von v_i in $G_i = G[\{v_i, \dots, v_n\}]$ durch zwei Cliques überdeckt werden kann.

Mit zwei Cliques überdeckbare Graphen

- Komplement mit zwei unabhängigen Mengen überdeckbar
- also: Komplement ist bipartit

Können wir auch schnell testen, ob ein Graph mit drei Cliques überdeckbar ist?



Was können wir damit machen?

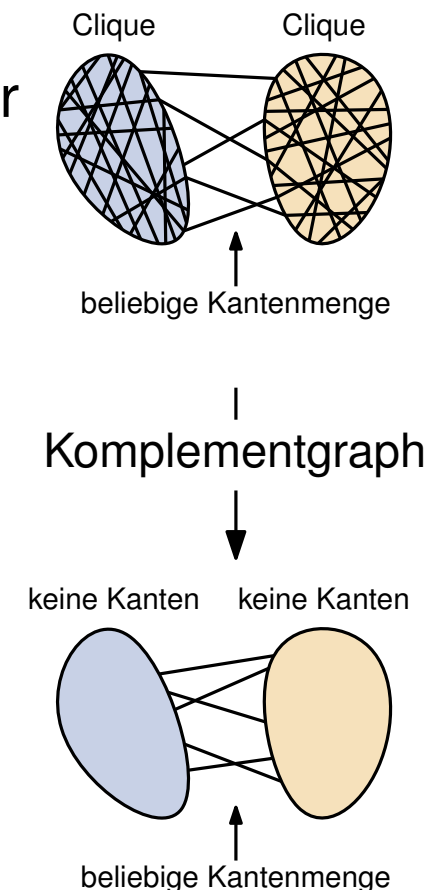
Folgerung

Sei $G = (V, E)$ ein stark hyperbolischer Unit-Disk Graph. Es gibt eine Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, sodass für alle $i \in [n]$ die Nachbarschaft von v_i in $G_i = G[\{v_i, \dots, v_n\}]$ durch zwei Cliques überdeckt werden kann.

Mit zwei Cliques überdeckbare Graphen

- Komplement mit zwei unabhängigen Mengen überdeckbar
- also: Komplement ist bipartit

Maximale Clique in der Nachbarschaft finden



Was können wir damit machen?

Folgerung

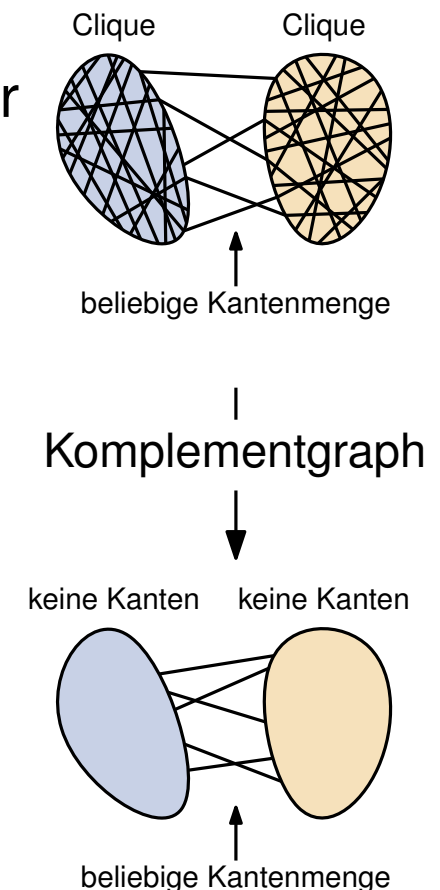
Sei $G = (V, E)$ ein stark hyperbolischer Unit-Disk Graph. Es gibt eine Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, sodass für alle $i \in [n]$ die Nachbarschaft von v_i in $G_i = G[\{v_i, \dots, v_n\}]$ durch zwei Cliques überdeckt werden kann.

Mit zwei Cliques überdeckbare Graphen

- Komplement mit zwei unabhängigen Mengen überdeckbar
- also: Komplement ist bipartit

Maximale Clique in der Nachbarschaft finden

- äquivalent zu: max Independent Set im Bipartiten



Was können wir damit machen?

Folgerung

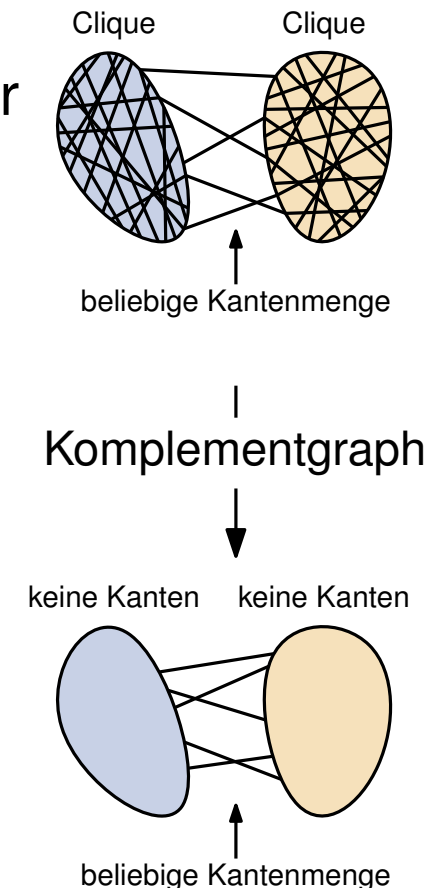
Sei $G = (V, E)$ ein stark hyperbolischer Unit-Disk Graph. Es gibt eine Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, sodass für alle $i \in [n]$ die Nachbarschaft von v_i in $G_i = G[\{v_i, \dots, v_n\}]$ durch zwei Cliques überdeckt werden kann.

Mit zwei Cliques überdeckbare Graphen

- Komplement mit zwei unabhängigen Mengen überdeckbar
- also: Komplement ist bipartit

Maximale Clique in der Nachbarschaft finden

- äquivalent zu: max Independent Set im Bipartiten
- äquivalent zu: min Vertex Cover im Bipartiten



Was können wir damit machen?

Folgerung

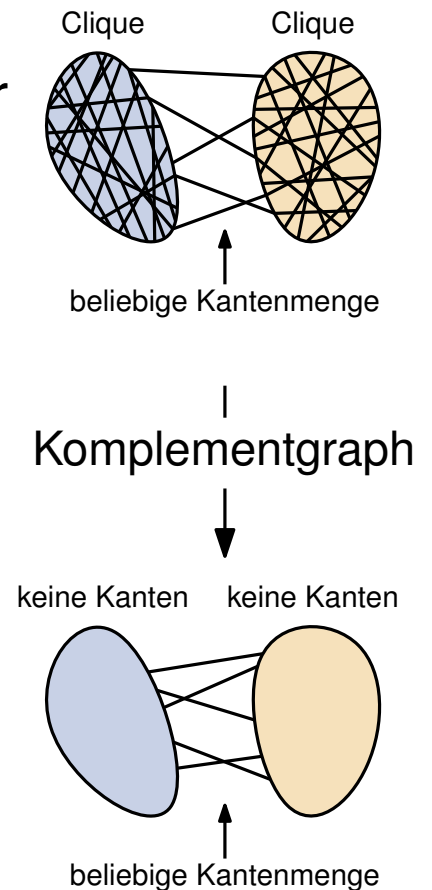
Sei $G = (V, E)$ ein stark hyperbolischer Unit-Disk Graph. Es gibt eine Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, sodass für alle $i \in [n]$ die Nachbarschaft von v_i in $G_i = G[\{v_i, \dots, v_n\}]$ durch zwei Cliques überdeckt werden kann.

Mit zwei Cliques überdeckbare Graphen

- Komplement mit zwei unabhängigen Mengen überdeckbar
- also: Komplement ist bipartit

Maximale Clique in der Nachbarschaft finden

- äquivalent zu: max Independent Set im Bipartiten
- äquivalent zu: min Vertex Cover im Bipartiten
- äquivalent zu: max Matching im Bipartiten (Satz von König)



Was können wir damit machen?

Folgerung

Sei $G = (V, E)$ ein stark hyperbolischer Unit-Disk Graph. Es gibt eine Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, sodass für alle $i \in [n]$ die Nachbarschaft von v_i in $G_i = G[\{v_i, \dots, v_n\}]$ durch zwei Cliques überdeckt werden kann.

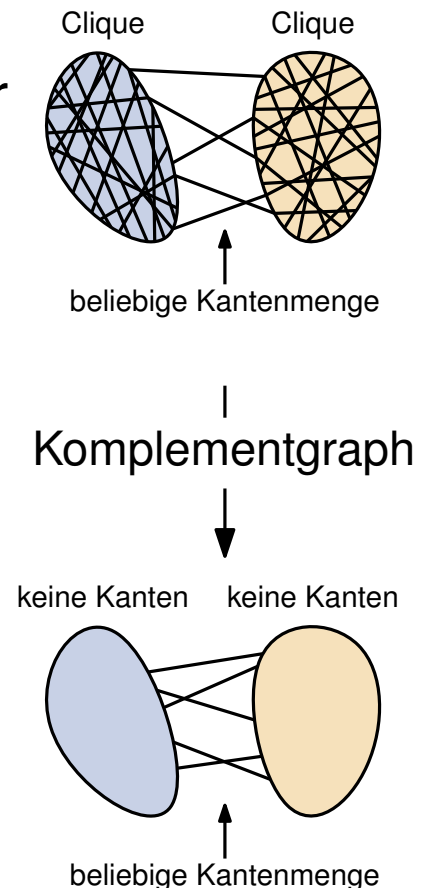
Mit zwei Cliques überdeckbare Graphen

- Komplement mit zwei unabhängigen Mengen überdeckbar
- also: Komplement ist bipartit

Maximale Clique in der Nachbarschaft finden

- äquivalent zu: max Independent Set im Bipartiten
- äquivalent zu: min Vertex Cover im Bipartiten
- äquivalent zu: max Matching im Bipartiten (Satz von König)

Maximale Clique in G finden



Was können wir damit machen?

Folgerung

Sei $G = (V, E)$ ein stark hyperbolischer Unit-Disk Graph. Es gibt eine Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, sodass für alle $i \in [n]$ die Nachbarschaft von v_i in $G_i = G[\{v_i, \dots, v_n\}]$ durch zwei Cliques überdeckt werden kann.

Mit zwei Cliques überdeckbare Graphen

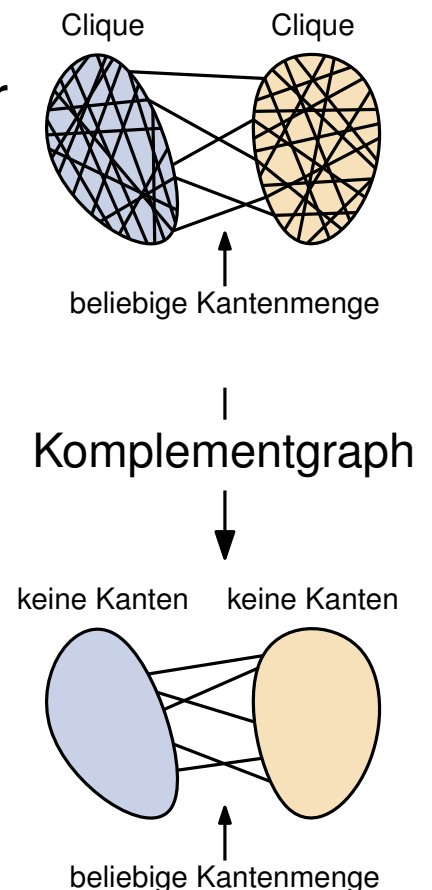
- Komplement mit zwei unabhängigen Mengen überdeckbar
- also: Komplement ist bipartit

Maximale Clique in der Nachbarschaft finden

- äquivalent zu: max Independent Set im Bipartiten
- äquivalent zu: min Vertex Cover im Bipartiten
- äquivalent zu: max Matching im Bipartiten (Satz von König)

Maximale Clique in G finden

- die maximale Clique hat einen ersten Knoten (minimales i)



Was können wir damit machen?

Folgerung

Sei $G = (V, E)$ ein stark hyperbolischer Unit-Disk Graph. Es gibt eine Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, sodass für alle $i \in [n]$ die Nachbarschaft von v_i in $G_i = G[\{v_i, \dots, v_n\}]$ durch zwei Cliques überdeckt werden kann.

Mit zwei Cliques überdeckbare Graphen

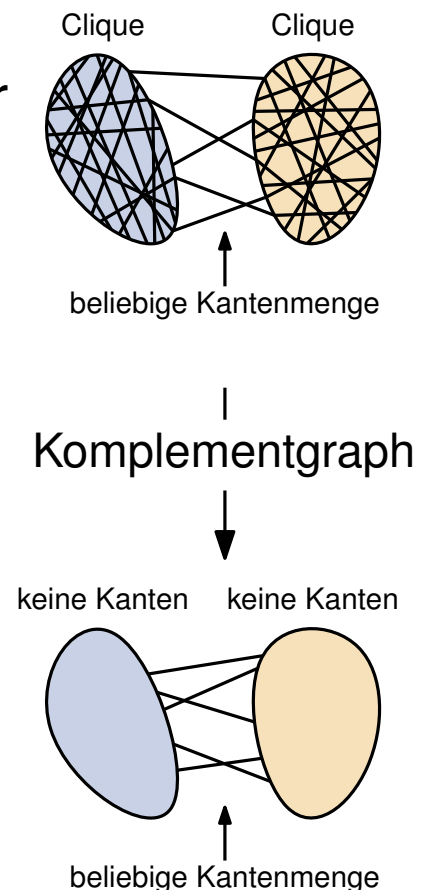
- Komplement mit zwei unabhängigen Mengen überdeckbar
- also: Komplement ist bipartit

Maximale Clique in der Nachbarschaft finden

- äquivalent zu: max Independent Set im Bipartiten
- äquivalent zu: min Vertex Cover im Bipartiten
- äquivalent zu: max Matching im Bipartiten (Satz von König)

Maximale Clique in G finden

- die maximale Clique hat einen ersten Knoten (minimales i)
- für jedes i : finde maximale Clique in G_i , die v_i enthält
- Maximum davon liefert größte Clique in G



Was wissen wir sonst noch so?

Größte Clique finden

- für stark hyperbolische UD-Graphen in polynomieller Zeit

Was wissen wir sonst noch so?

Größte Clique finden

- für stark hyperbolische UD-Graphen in polynomieller Zeit

Erkennung von hyperbolischen UD-Graphen

- $\exists \mathbb{R}$ -vollständig
- offen: Komplexität für stark hyperbolische Graphen

Was wissen wir sonst noch so?

Größte Clique finden

- für stark hyperbolische UD-Graphen in polynomieller Zeit

Erkennung von hyperbolischen UD-Graphen

- $\exists \mathbb{R}$ -vollständig
- offen: Komplexität für stark hyperbolische Graphen

Baumweite für stark hyperbolische UD-Graphen

- balancierte Separatoren der Größe $O(\Delta)$ (max deg)
- Baumzerlegung entsprechender Weite
- ganz anders als bei Gittern

Was wissen wir sonst noch so?

Größte Clique finden

- für stark hyperbolische UD-Graphen in polynomieller Zeit

Erkennung von hyperbolischen UD-Graphen

- $\exists \mathbb{R}$ -vollständig
- offen: Komplexität für stark hyperbolische Graphen

Baumweite für stark hyperbolische UD-Graphen

- balancierte Separatoren der Größe $O(\Delta)$ (max deg)
- Baumzerlegung entsprechender Weite
- ganz anders als bei Gittern

Separatoren für ausreichend großen Radius

- balancierte Separatoren die mit $O(\log(n))$ Cliques überdeckt werden können \rightarrow kleine Baumweite

Was wissen wir sonst noch so?

Größte Clique finden

- für stark hyperbolische UD-Graphen in polynomieller Zeit

Erkennung von hyperbolischen UD-Graphen

- $\exists \mathbb{R}$ -vollständig
- offen: Komplexität für stark hyperbolische Graphen

Baumweite für stark hyperbolische UD-Graphen

- balancierte Separatoren der Größe $O(\Delta)$ (max deg)
- Baumzerlegung entsprechender Weite
- ganz anders als bei Gittern

Separatoren für ausreichend großen Radius

- balancierte Separatoren die mit $O(\log(n))$ Cliques überdeckt werden können \rightarrow kleine Baumweite

Routing auf stark hyperbolischen UD-Graphen

- lokales Routing (ähnlich zu greedy Routing) mit kleinem Stretch
- schlägt untere Schranke für allgemeine Graphen

Zusammenfassung

Hyperbolische Unit-Disk Graphen

- Generalisierung von euklidischen Unit-Disk Graphen
- interessanter Spezialfall: stark hyperbolische UD-Graphen
- viele offene Fragen

Zusammenfassung

Hyperbolische Unit-Disk Graphen

- Generalisierung von euklidischen Unit-Disk Graphen
- interessanter Spezialfall: stark hyperbolische UD-Graphen
- viele offene Fragen

Echtwelt-Netzwerke

- haben oft eine zugrundeliegende Geometrie
- oder zumindest Eigenschaften, die mit Geometrie erzielt werden können

Zusammenfassung

Hyperbolische Unit-Disk Graphen

- Generalisierung von euklidischen Unit-Disk Graphen
- interessanter Spezialfall: stark hyperbolische UD-Graphen
- viele offene Fragen

Echtwelt-Netzwerke

- haben oft eine zugrundeliegende Geometrie
- oder zumindest Eigenschaften, die mit Geometrie erzielt werden können

Geometrische Zufallsgraphen

- geometrische Graphen mit zufälligen Knotenpositionen
- mögliches Modell für Average-Case Analysen
- gute Benchmark Instanzen für Algorithmen

Literaturhinweise

(Stark) hyperbolische Unit-Disk Graphen

- **Routing in Strongly Hyperbolic Unit Disk Graphs** (2021)
Thomas Bläsius, Tobias Friedrich, Maximilian Katzmann, Daniel Stephan
<https://arxiv.org/abs/2107.05518>

Hyperbolische Zufallsgraphen

- **Hyperbolic geometry of complex networks** (2010)
Krioukov, Papadopoulos, Kitsak, Vahdat, Boguñá
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.036106>
- **Random Hyperbolic Graphs: Degree Sequence and Clustering** (2012)
Luca Gugelmann, Konstantinos Panagiotou, Ueli Peter
https://doi.org/10.1007/978-3-642-31585-5_51

Bidirektionale Suche in hyperbolischen Zufallsgraphen

- **Efficient Shortest Paths in Scale-Free Networks with Underlying Hyperbolic Geometry** (2018)
Bläsius, Freiberger, Friedrich, Katzmann, Montenegro-Retana, Thieffry
<https://doi.org/10.4230/LIPIcs.ICALP.2018.20>

Ausführlicheres Video zu Experimenten auf geometrischen Zufallsgraphen

- **Theoretical Algorithm Analysis meets Practical Data** (2021)
Thomas Bläsius, PODC-DARE Workshop
<https://www.youtube.com/watch?v=Do2FC3k0JMg>

Effiziente Generierung

- **Sampling Geometric Inhomogeneous Random Graphs in Linear Time** (2017)
Karl Bringmann, Ralph Keusch, Johannes Lengler
<https://doi.org/10.4230/LIPIcs.ESA.2017.20>
- **Efficiently Generating Geometric Inhomogeneous and Hyperbolic Random Graphs** (2019)
Bläsius, Friedrich, Katzmann, Meyer, Penschuck, Weyand
<https://doi.org/10.4230/LIPIcs.ESA.2019.21>

Eval & letzter Termin am Donnerstag

Lehrevaluation

- insgesamt sehr positiv :-)

Eval & letzter Termin am Donnerstag

Lehrevaluation

■ insgesamt sehr positiv :-)

^{1.20)} Nicht gefallen hat mir insbesondere:

- /
- Die Folien sind für Vorträge gut geeignet, aber teilweise Zuhause nicht so leicht nachzuvollziehen. Die Aufzeichnungen habe ich noch nicht angesehen, aber sollten bestimmt dabei helfen :D
- Folien alleine (ohne Vortrag/Vorlesungsbesuch) sind manchmal schwer zu verstehen
- Foliensatz Delauney:
Folie 7: Situation
Folie 9: Traing.
- Ich glaube die Vorlesung zu Delaunay wäre näher an den Voronoi-Diagrammen besser platziert
- nichts
- Range queries mit FC :(
- Ruhig manchmal ein bisschen langsamer reden :)

Eval & letzter Termin am Donnerstag

Lehrevaluation

■ insgesamt sehr positiv :-)

^{1.20)} Nicht gefallen hat mir insbesondere:

- /
- Die Folien sind für Vorträge gut geeignet, aber teilweise Zuhause nicht so leicht nachzuvollziehen. Die Aufzeichnungen habe ich noch nicht angesehen, aber sollten bestimmt dabei helfen :D
- Folien alleine (ohne Vortrag/Vorlesungsbesuch) sind manchmal schwer zu verstehen
- Foliensatz Delauney:
Folie 7: Situation
Folie 9: Traing.
- Ich glaube die Vorlesung zu Delaunay wäre näher an den Voronoi-Diagrammen besser platziert
- nichts
- Range queries mit FC :(
- Ruhig manchmal ein bisschen langsamer reden :)

Termin am Donnerstag

- ich kann nochmal einen Gesamtüberblick geben
- wünscht euch gerne Themen, auf die ich nochmal eingehen soll