Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmische Geometrie

Geometrische Graphen – euklidisch und hyperbolisch

Wiederholung: Poincaré Disk

Punkte

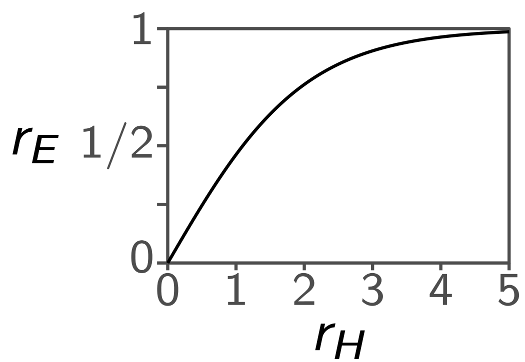
- betrachte einen (euklidischen) Kreis k mit Radius 1 um den Punkt O
- sei $\mathcal{P}$ die Menge der Punkte im Inneren des Kreises

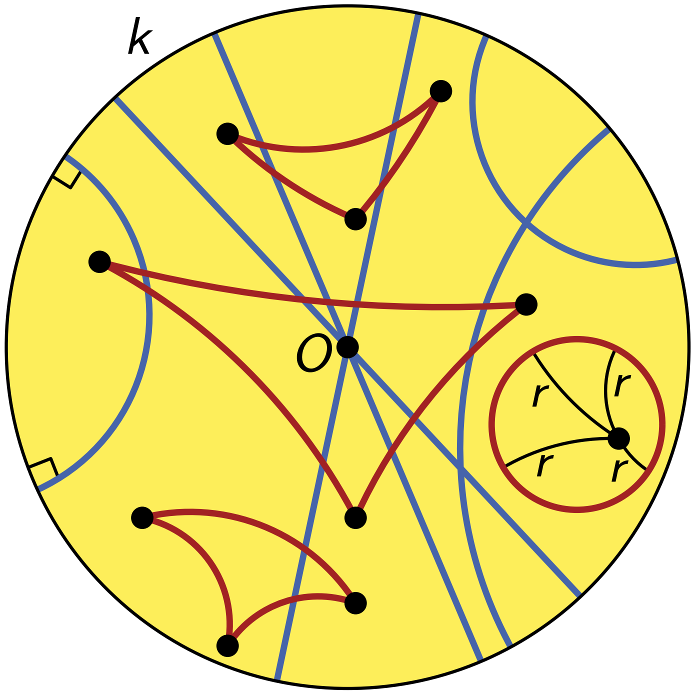
Geraden

- sei $\mathcal{G}$ die Vereinigung von:
  - Menge der offenen Strecken durch O mit Endpunkten auf k
  - Menge der offenen Kreisbögen in k, die senkrecht auf k stehen

Beobachtung

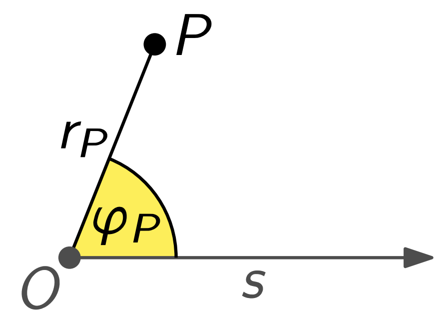
- nah an O: sehr ähnlich zum Euklidischen
- um die Besonderheiten der hyperbolischen Ebene zu nutzen müssen wir weit von O weg
- Problem: wir sind dann sehr schnell sehr nah am Rand von k
- unterschiedliche Radien optisch dann nicht mehr unterscheidbar





(Native) Polarkoordinaten

Polarkoordinaten

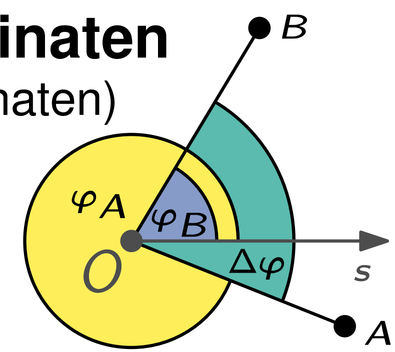


- Referenz: Ursprung O, Strahl s mit Anfangspunkt O
- **Radius** r_P von P: $d(O, P)$
- **Winkel** φ_P von P: Winkel zwischen s und $OP+$
- (r_P, φ_P) sind die **Polarkoordinaten** von P

Native Polarkoordinaten

- d ist die hyperbolische Distanz
- insbesondere ist d **nicht** die euklidische Distanz in der Poincaré Disk

Distanz zwischen Punkten in Polarkoordinaten



$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- betrachte zwei Punkte (in nativen Polarkoordinaten) $A = (r_A, \varphi_A)$ und $B = (r_B, \varphi_B)$
- sei $\Delta\varphi$ ihre Winkeldistanz: $\Delta\varphi = \min\{|\varphi_A - \varphi_B|, 2\pi - |\varphi_A - \varphi_B|\}$
- dann: $d(A, B) = \operatorname{arcosh}[\cosh(r_A)\cosh(r_B) - \sinh(r_A)\sinh(r_B)\cos(\Delta\varphi)]$

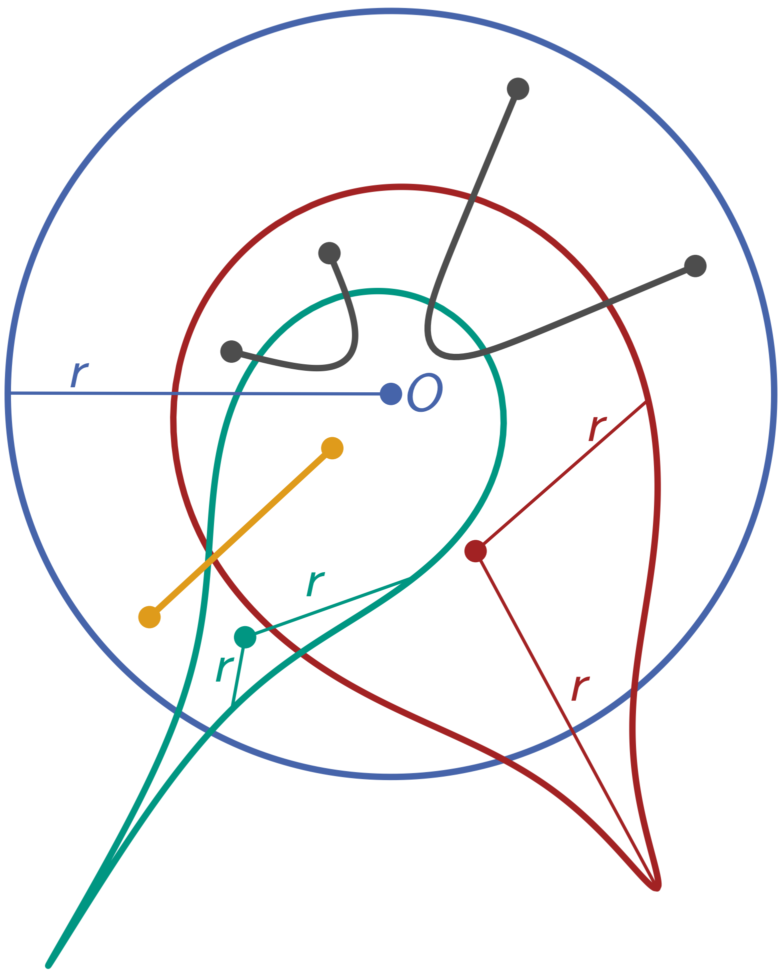
$$\approx \log[2 \cdot (e^{r_A}/2 \cdot e^{r_B}/2 - e^{r_A}/2 \cdot e^{r_B}/2 \cdot \cos(\Delta\varphi))]$$

$$= \log[e^{r_A + r_B} \cdot (1 - \cos(\Delta\varphi))/2] = r_A + r_B - \log\left[\frac{2}{1 - \cos(\Delta\varphi)}\right]$$

Das native Modell

Natives Modell

- nutze nativen Polarkoordinaten für jeden Punkt der hyperbolischen Ebene
- tu so, als wären das ganz normale euklidische Polarkoordinaten



- Kreise um den Ursprung sind Kreise
- Kreise mit anderen Mittelpunkten sehen Tränenförmig aus
- Strecken auf Ursprungsger. sind Strecken
- ihre zu sehende Länge ist die korrekte hyperbolische Länge
- andere Strecken sind Richtung Ursprung gekrümmt
- Darstellung ist **nicht** Winkelerhaltend

$$d(A, B) \approx r_A + r_B - \log\left[\frac{2}{1-\cos(\Delta\varphi)}\right]$$

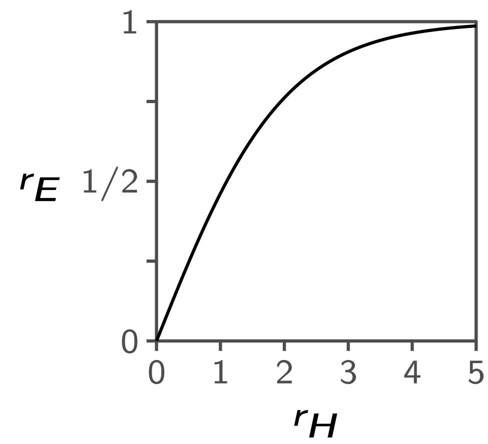
Poincaré vs. nativ

Vorteile der Poincaré Disk

- Darstellung ist Winkelerhaltend
- Geraden sind euklidische Kreisbögen, Kreise sind euklidische Kreise
  $\rightarrow$ das sind uns vertraute Objekten
- wir können unsere euklidische Intuition bemühen, um Einsichten über die hyperbolische Ebene zu zeigen

Nachteile der Poincaré Disk

- die (euklidische) Distanz vom Ursprung geht sehr schnell gegen 1 für wachsende hyperbolische Distanz
- möchte man etwas hyperbolisches anschauen, das nicht sehr nah am Ursprung liegt, so liegt alles auf dem Rand der Disk und man sieht nichts mehr
- anfälliger für numerische Probleme

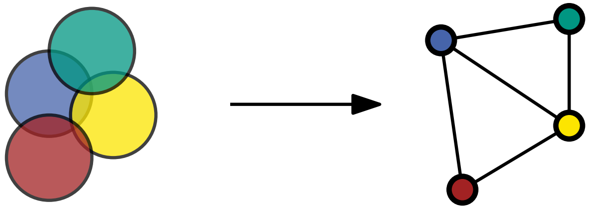


Heuristik zur Wahl des Modells

- visuelle Darstellung von hyperbolischen Daten $\rightarrow$ natives Modell
- Berechnungen auf Koordinaten $\rightarrow$ natives Modell (oder auch: Hyperboloid)
- Verständnisfragen/Beweise $\rightarrow$ Poincaré Disk

Unit-Disk Graphen

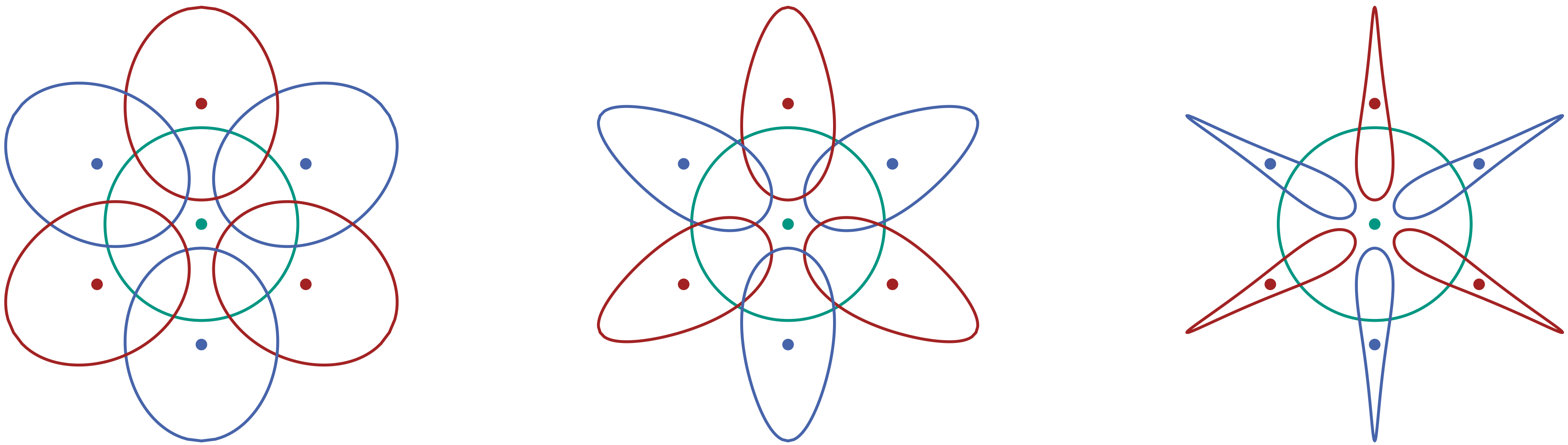
Definition
Ein Graph ist ein **Unit-Disk Graph**, wenn er der geometrische Schnittgraph einer Menge von Disks mit Radius 1 ist.



Jetzt hyperbolisch

- kann man im Prinzip erstmal analog definieren
- Achtung: der Radius macht auf einmal einen Unterschied

Kreisradius 1 **Kreisradius 2** **Kreisradius 4**



Hyperbolische Unit-Disk Graphen

Definition | **Beachte:** die Disks der Schnittrepräsentation haben also Radius $R/2$

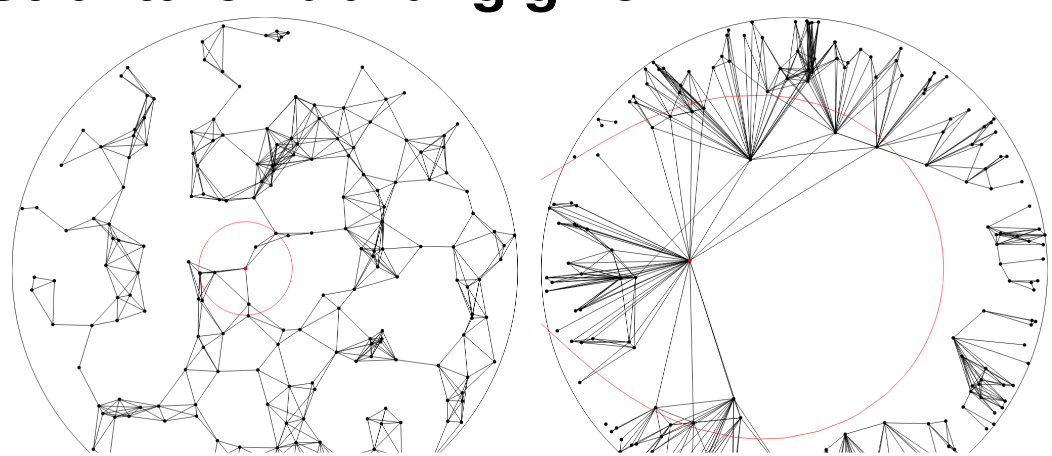
$G = (V, E)$ ist ein **hyperbolischer Unit-Disk Graph** wenn er eine hyperbolische Unit-Disk Repräsentation hat: ein Abbildung $p\colon V \to \mathbb{H}^2$ zusammen mit einem Radius R, sodass $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow d(p(u), p(v)) \leq R$.

Warum der Name *Unit*-Disk Graph?

- der Begriff *Unit* ist hier als „einheitlich“ statt als „Länge $= 1$“ zu verstehen
- man erhält das gleiche, wenn man $R = 2$ fordert, aber die Krümmung der hyperbolischen Ebene nicht auf -1 festhält

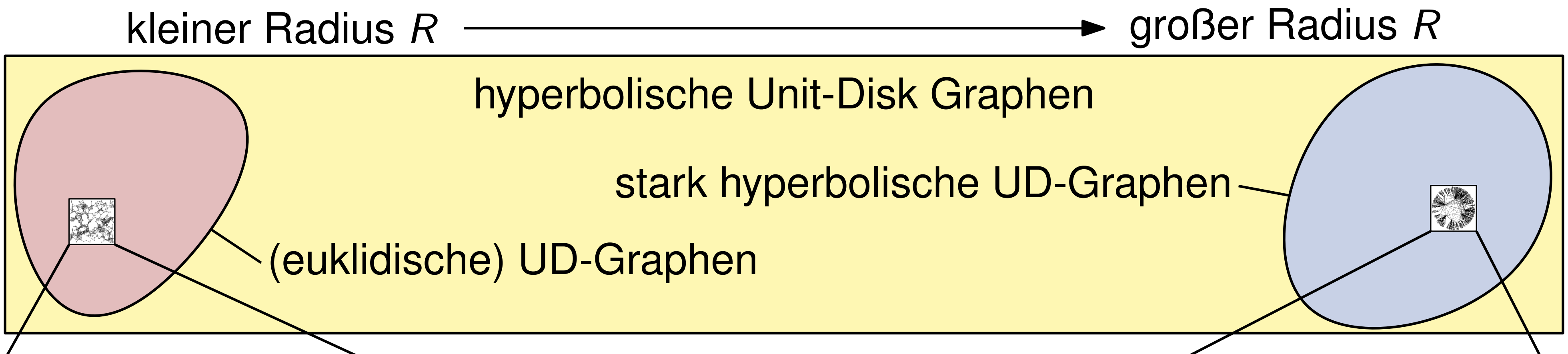
Bekomme ich unterschiedliche Strukturen abhängig von *R*?

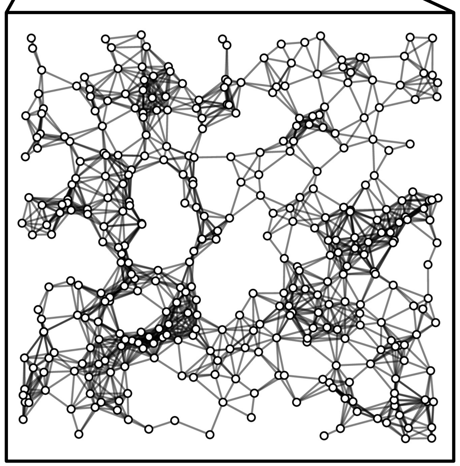
- kleines R
  - wie im Euklidischen
  - regelmäßig / homogen
  - gitterartig
- großes R
  - unregelmäßig / inhomogen
  - hierarchisch



https://thobl.github.io/hyperbolic-unit-disk-graph/

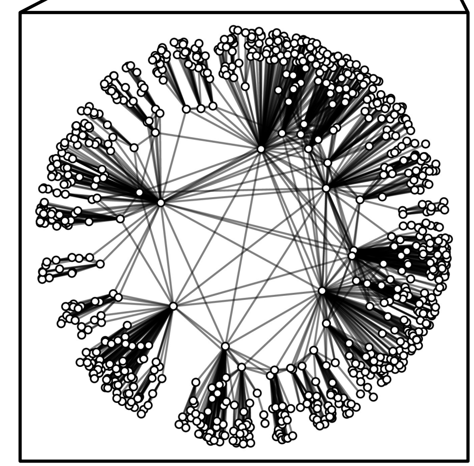
Wie hyperbolisch darfs sein?





Situation

- euklidische UD-Graphen sind eine Teilklasse von hyperbolischen
- viele hyperbolische UD-Graphen sind nicht sehr hyperbolisch



Stark hyperbolische Unit-Disk Graphen

- Ziel: Gegenstück zu euklidischen UD-Graphen
- mit hierarchischer / heterogener Struktur
- Wie formalisieren wir das? Wie groß ist groß genug für R?

Stark hyperbolisch

Definition
$G = (V, E)$ ist ein **hyperbolischer Unit-Disk Graph** wenn er eine hyperbolische Unit-Disk Repräsentation hat: ein Abbildung $p \colon V \to \mathbb{H}^2$ zusammen mit einem Radius R, sodass $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow d(p(u), p(v)) \leq R$.

Definition
G ist ein **stark hyperbolischer Unit-Disk Graph**, wenn p alle Knoten in eine Disk mit Radius R abbildet.

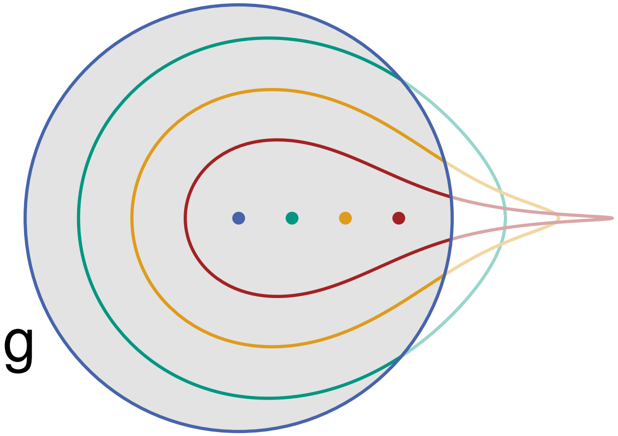
https://thobl.github.io/hyperbolic-unit-disk-graph/

Darstellung

- wähle Zentrum dieser Disk als Ursprung für die nativen Polarkoordinaten
- **Achtung:** nicht mit der Poincaré Disk verwechseln

Beobachtungen

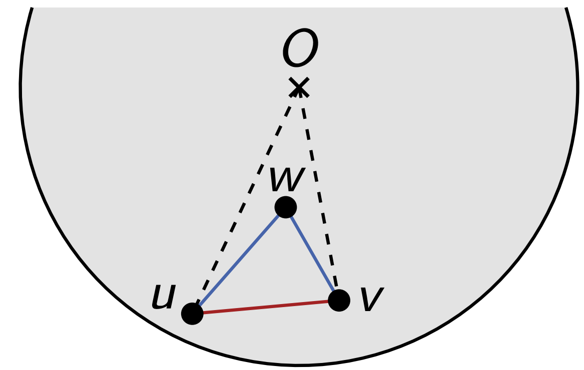
- Knoten im Ursprung: mit allen anderen benachbart
- je weiter außen ein Knoten, desto kleiner sein Einflussbereich
- maximale Heterogenität: jede Distanz vom Ursprung liefert unterschiedlich großen Einflussbereich



Erzwungene Kanten (stark hyperbolisch)

Situation

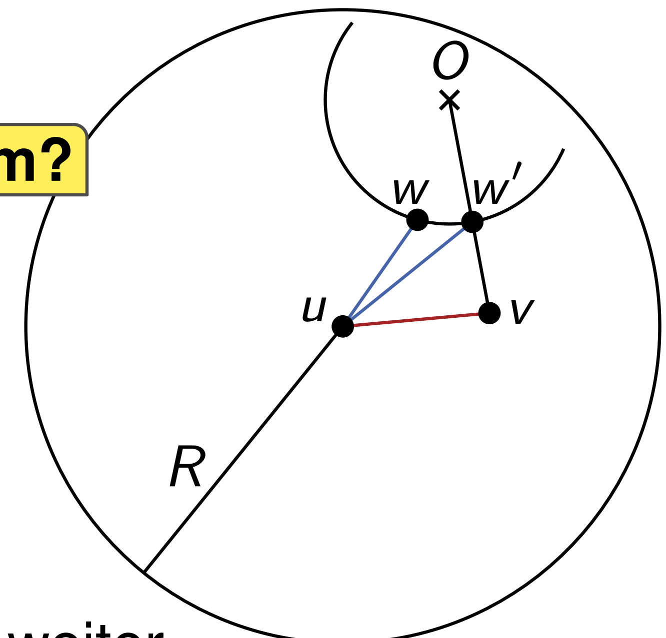
- stark hyperbolische UD-Repräsentation
- w liegt bezüglich Winkel zwischen u und v
- w liegt weiter innen als u und v



Theorem
Wenn $\{u, v\} \in E$, dann auch $\{u, w\}, \{v, w\} \in E$.

Beweis

- Kreis um u mit Radius R enthält v und O **Warum?**
- Kreis sind konvex $\Rightarrow$ Strecke $\overline{vO}$ liegt im Kreis
- w' liegt in dem Kreis $\Rightarrow d(u, w') \leq R$
- Distanz ist monoton bzgl. Winkeldifferenz
  $\Rightarrow d(u, w) \leq R$



(schematische Darstellung)

Anmerkung

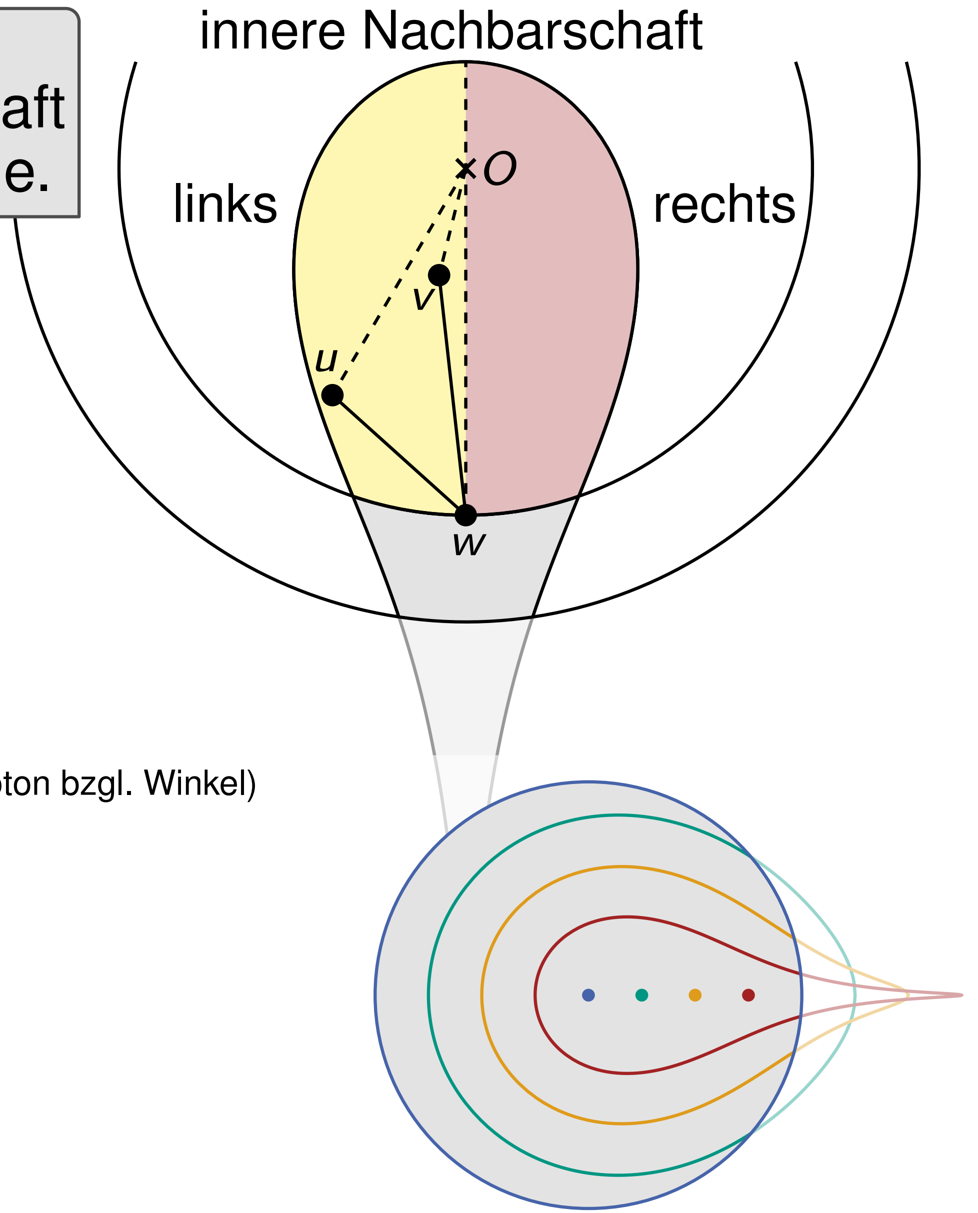
- man kann also nicht unbemerkt außen an einem weiter innen liegenden Knoten vorbeilaufen
- hierarchische Strukturen: je weiter innen desto höher in der Hierarchie

Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)

Theorem
Die linke und rechte innere Nachbarschaft eines Knotens bilden jeweils eine Clique.

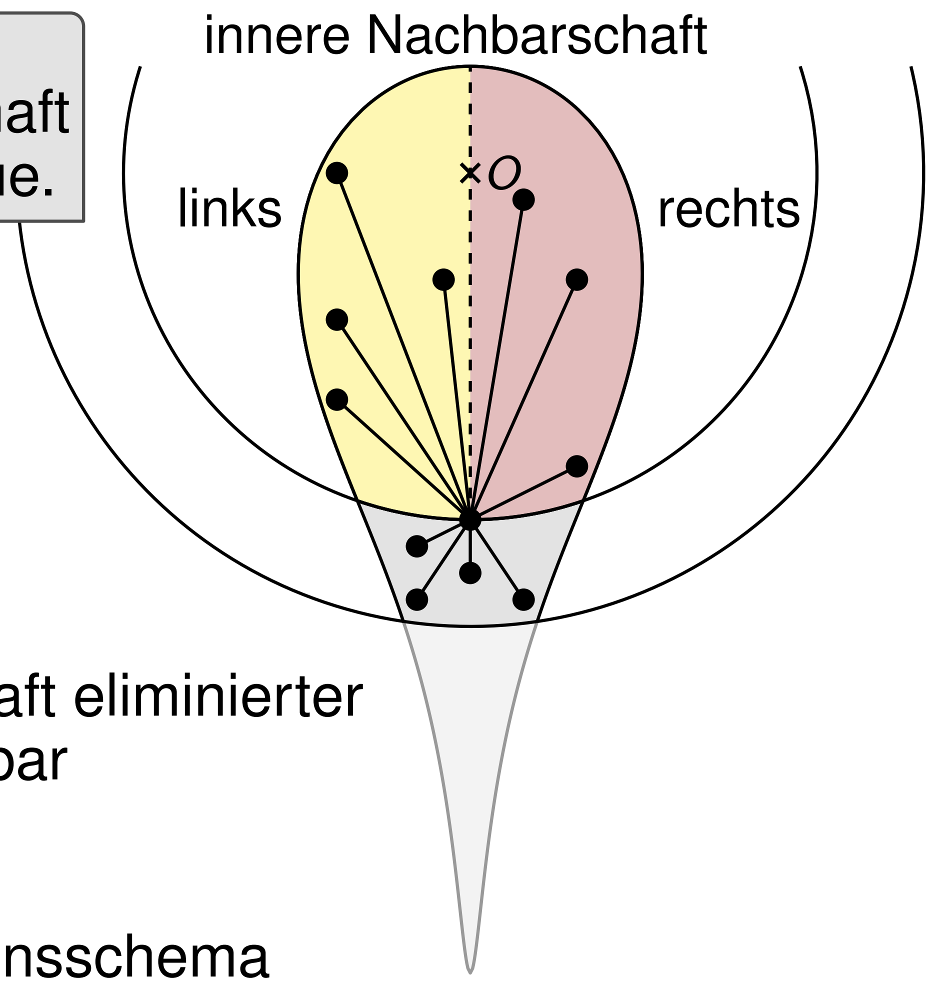
Beweis

- zeige: u und v sind verbunden
- w Richtung O verschieben verkleinert seine Nachbarschaft nicht
- verschiebe w, sodass $r_w = r_v$
  $\Rightarrow$ w bleibt mit u verbunden
  (beachte: $d(u, w)$ wird ggf. größer, aber nicht größer als R)
- verschiebe w weiter, sodass $\varphi_w = \varphi_v$
  $\Rightarrow$ w bleibt mit u verbunden (Distanz monoton bzgl. Winkel)
- also: $\{u, v\} \in E$



Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)

Theorem
Die linke und rechte innere Nachbarschaft eines Knotens bilden jeweils eine Clique.



Folgerung

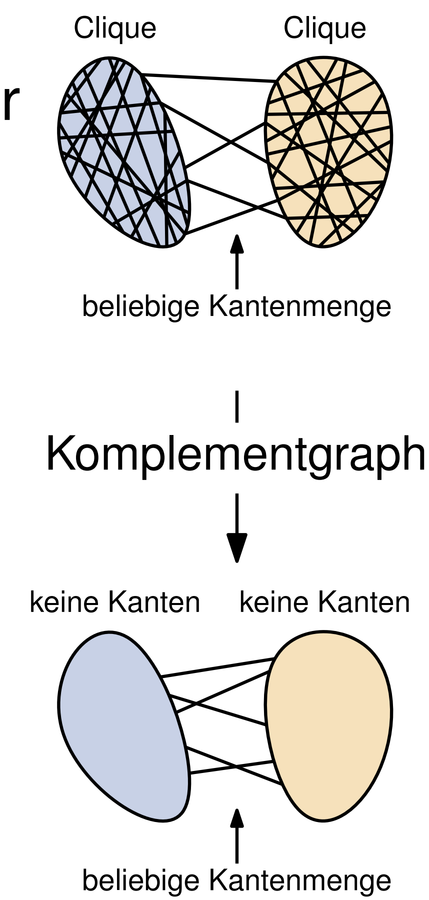
- sortiere Knoten $v_1, \dots, v_n$ von Außen nach Innen
- lösche Knoten nach und nach: $G_i = G[\{v_i, \dots, v_n\}]$
- v_i hat in G_i nur innere Nachbarn
- Eliminationsschema mit: Nachbarschaft eliminierter Knoten durch zwei Cliquen überdeckbar

Vergleich: Chordale Graphen

- Graph chordal $\Leftrightarrow$ perfektes Eliminationsschema
- perfektes Eliminationsschema: Nachbarschaft eliminierter Knoten bilden Clique

Was können wir damit machen?

Folgerung
Sei $G = (V, E)$ ein stark hyperbolischer Unit-Disk Graph. Es gibt eine Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, sodass für alle $i \in [n]$ die Nachbarschaft von v_i in $G_i = G[\{v_i, \dots, v_n\}]$ durch zwei Cliquen überdeckt werden kann.



Mit zwei Cliquen überdeckbare Graphen

- Komplement mit zwei unabhängigen Mengen überdeckbar
- also: Komplement ist bipartit

Maximale Clique in der Nachbarschaft finden

- äquivalent zu: max Independent Set im Bipartiten
- äquivalent zu: min Vertex Cover im Bipartiten
- äquivalent zu: max Matching im Bipartiten (Satz von König)

Maximale Clique in G finden

- die maximale Clique hat einen ersten Knoten (minimales i)
- für jedes i: finde maximale Clique in G_i, die v_i enthält
- Maximum davon liefert größte Clique in G

Was wissen wir sonst noch so?

Größte Clique finden

- für stark hyperbolische UD-Graphen in polynomieller Zeit

Erkennung von hyperbolischen UD-Graphen

- $\exists\mathbb{R}$-vollständig
- offen: Komplexität für stark hyperbolische Graphen

Baumweite für stark hyperbolische UD-Graphen

- balancierte Separatoren der Größe $O(\Delta)$ (max deg)
- Baumzerlegung entsprechender Weite
- ganz anders als bei Gittern

Separatoren für ausreichend großen Radius

- balancierte Separatoren die mit $O(\log(n))$ Cliquen überdeckt werden können $\to$ kleine Baumweite

Routing auf stark hyperbolischen UD-Graphen

- lokales Routing (ähnlich zu greedy Routing) mit kleinem Stretch
- schlägt untere Schranke für allgemeine Graphen

Zusammenfassung

Hyperbolische Unit-Disk Graphen
- Generalisierung von euklidischen Unit-Disk Graphen
- interessanter Spezialfall: stark hyperbolische UD-Graphen
- viele offene Fragen

Echtwelt-Netzwerke
- haben oft eine zugrundeliegende Geometrie
- oder zumindest Eigenschaften, die mit Geometrie erzielt werden können

Geometrische Zufallsgraphen
- geometrische Graphen mit zufälligen Knotenpositionen
- mögliches Modell für Average-Case Analysen
- gute Benchmark Instanzen für Algorithmen

Literaturhinweise

Karlsruher Institut für Technologie

(Stark) hyperbolische Unit-Disk Graphen

- **Routing in Strongly Hyperbolic Unit Disk Graphs** (2021)
  Thomas Bläsius, Tobias Friedrich, Maximilian Katzmann, Daniel Stephan
  https://arxiv.org/abs/2107.05518

Hyperbolische Zufallsgraphen

- **Hyperbolic geometry of complex networks** (2010)
  Krioukov, Papadopoulos, Kitsak, Vahdat, Boguñá
  https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.036106
- **Random Hyperbolic Graphs: Degree Sequence and Clustering** (2012)
  Luca Gugelmann, Konstantinos Panagiotou, Ueli Peter
  https://doi.org/10.1007/978-3-642-31585-5_51

Bidirektionale Suche in hyperbolischen Zufallsgraphen

- **Efficient Shortest Paths in Scale-Free Networks with Underlying Hyperbolic Geometry** (2018)
  Bläsius, Freiberger, Friedrich, Katzmann, Montenegro-Retana, Thieffry
  https://doi.org/10.4230/LIPIcs.ICALP.2018.20

Ausführlicheres Video zu Experimenten auf geometrischen Zufallsgraphen

- **Theoretical Algorithm Analysis meets Practical Data** (2021)
  Thomas Bläsius, PODC-DARE Workshop
  https://www.youtube.com/watch?v=Do2FC3k0JMg

Effiziente Generierung

- **Sampling Geometric Inhomogeneous Random Graphs in Linear Time** (2017)
  Karl Bringmann, Ralph Keusch, Johannes Lengler
  https://doi.org/10.4230/LIPIcs.ESA.2017.20
- **Efficiently Generating Geometric Inhomogeneous and Hyperbolic Random Graphs** (2019)
  Bläsius, Friedrich, Katzmann, Meyer, Penschuck, Weyand
  https://doi.org/10.4230/LIPIcs.ESA.2019.21

Eval & letzter Termin am Donnerstag

Lehrevaluation

- insgesamt sehr positiv :-)

1.20) Nicht gefallen hat mir insbesondere:

- /
- Die Folien sind für Vorträge gut geeignet, aber teilweise Zuhause nicht so leicht nachzuvollziehen. Die Aufzeichnungen habe ich noch nicht angesehen, aber sollten bestimmt dabei helfen :D
- Folien alleine (ohne Vortrag/Vorlesungsbesuch) sind manchmal schwer zu verstehen
- Foliensatz Delauney:
  Folie 7: Siuation
  Folie 9: Traing.
- Ich glaube die Vorlesung zu Delaunay wäre näher an den Voronoi-Diagrammen besser platziert
- nichts
- Range queries mit FC :(
- Ruhig manchmal ein bisschen langsamer reden :)

Termin am Donnerstag

- ich kann nochmal einen Gesamtüberblick geben
- wünscht euch gerne Themen, auf die ich nochmal eingehen soll