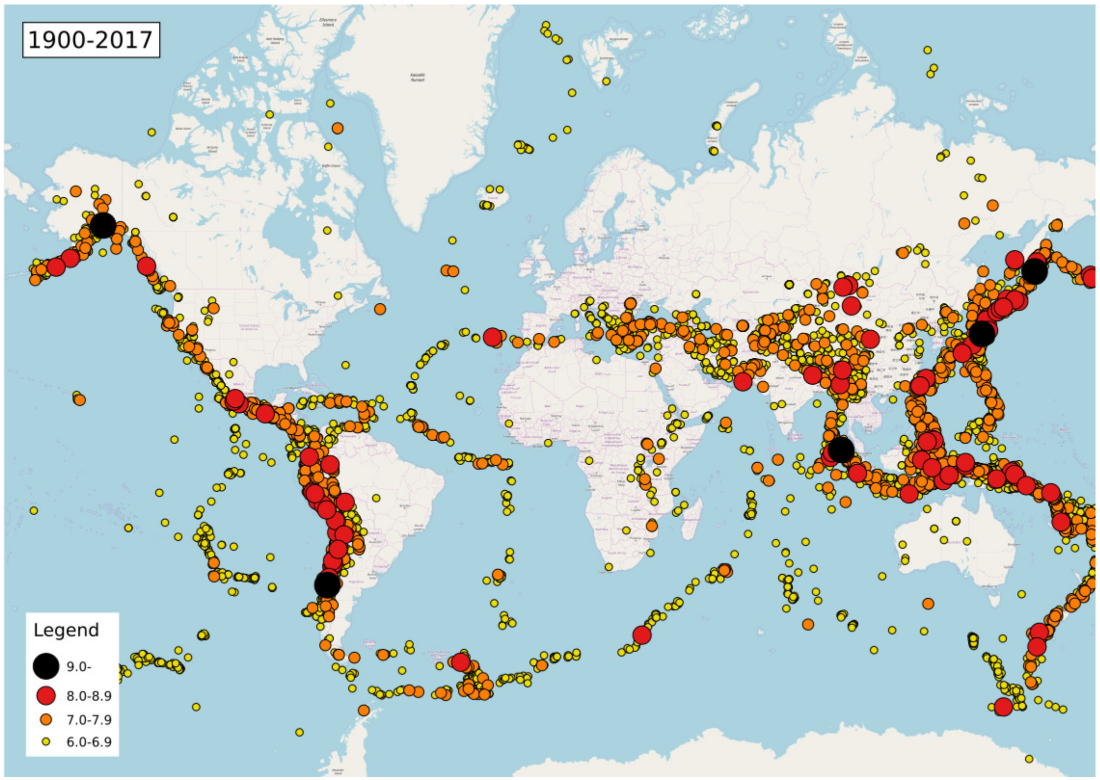
Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmische Geometrie

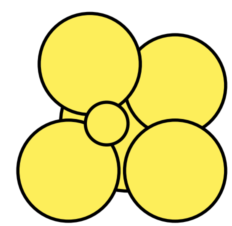
Schwere Probleme

Proportional Symbol Maps

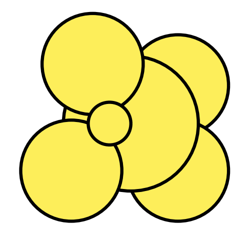
Proportional Symbol Map (Beispiel: Erdbeben)



- Darstellung gewichteter Punkte auf einer Karte
- Gewicht wird durch Diskgröße repräsentiert
- Freiheitsgrad: Ordnung überlappender Disks
- Lesbarkeit hängt von der Ordnung ab



vs.



Problemstellung

- gegeben: Menge von Disks mit potentiell unterschiedlichen Radien
- gesucht: Zeichnung, bei der für jede Disk möglichst viel Rand sichtbar ist
- Was ist eine gültige Zeichnung? Was genau heißt möglichst viel Rand?

Was genau ist das Problem?

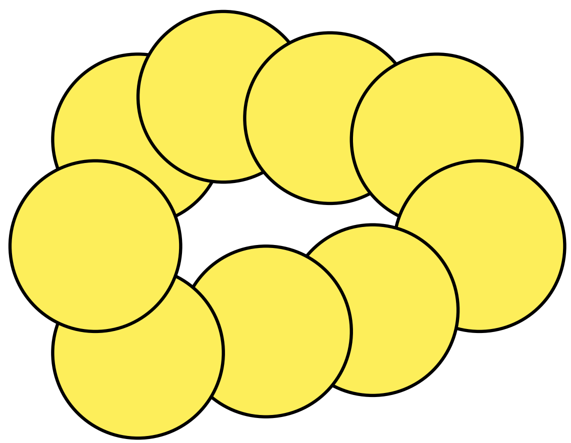
Zwei Typen gültiger Zeichnungen

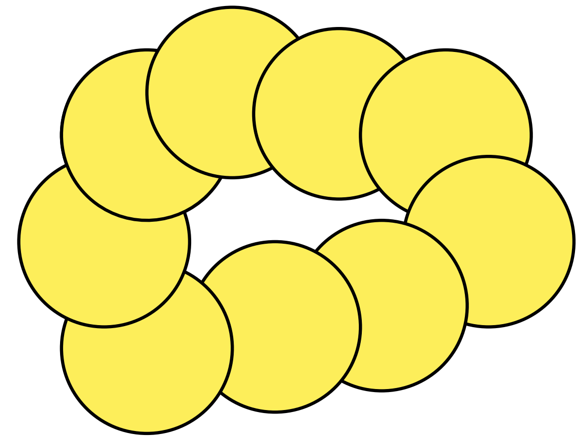
Stacking

- totale z-Ordnung auf allen Disks

Physikalisch realisierbare Zeichnung

- mit dünnen Münzen nachbaubar





- jedes Stacking ist physikalisch realisierbar aber nicht umgekehrt

Zwei Optimierungsprobleme

- Max-Min: maximiere den minimal sichtbaren Rand unter allen Disks
- Max-Total: maximiere den insgesamt sichtbaren Rand

	Max-Min	Max-Total
Stacking	P	?
physikalisch realisierbar	NP-Schwer	NP-Schwer

heute

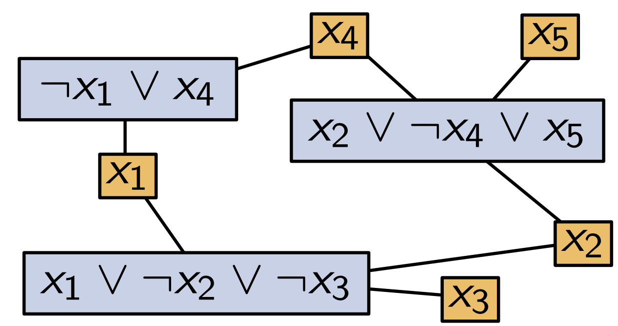
Nützliche NP-schwere Sat-Varianten

Problem: 3-Sat
Seien $x_1, \dots, x_n$ boolesche Variablen und sei $\mathcal{C} = C_1 \wedge \dots \wedge C_m$ eine Formel in CNF, wobei jede Klausel C_i maximal drei Literale enthält. Gibt es eine Variablenbelegung, die $\mathcal{C}$ zu WAHR auswertet?

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee x_4)$$

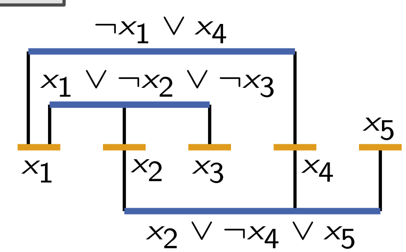
Problem: monotone 3-Sat
Jede Klausel enthält nur positive oder nur negative Literale.

$$(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_4)$$



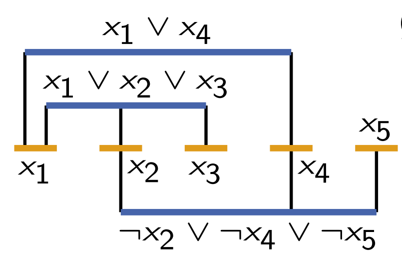
Problem: planar 3-Sat
Der Variablen-Klausel-Graph ist planar.

Problem: rectilinear planar 3-Sat
Der Variablen-Klausel-Graph hat eine *rechtwinklige planare* Zeichnung.



rechtw. plan. Zeichnung
- Knoten/Kanten: horizontale/vertikale Strecken
- alle Variablen-Knoten liegen auf einer Geraden

Problem: planar monotone 3-Sat
Klauseln über/unter den Variablen enthalten nur positive/negative Literale.



Reduktion von rectilinear planar 3-Sat

Grundsätzliches Mindset

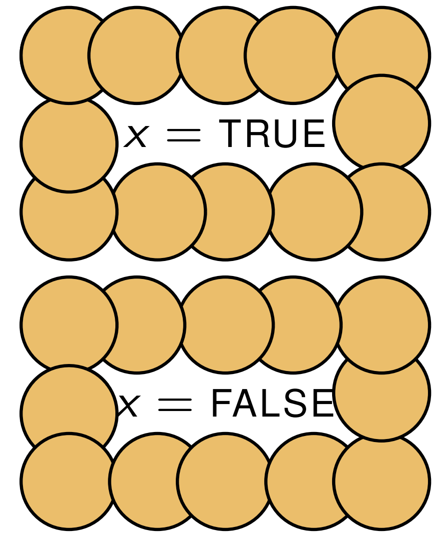
- wir wollen eine gegebene 3-Sat Instanz modellieren
- unsere Modellierungssprache sind überlappende Disks
- Variablenbelegung $\hat{=}$ Entscheidung wie Disks aufeinander liegen
- Erfüllung aller Klauseln $\hat{=}$ großer sichtbarer Rand für jede Disk

Zu modellierende Bestandteile

- Variablen
  - n unabhängige binäre Entscheidungen
  - keine zusätzlichen Entscheidungen (alles weitere ist erzwungen)
- Klauseln
  - Klausel macht Probleme $\Leftrightarrow$ drei bestimmte Entscheidungen sind falsch
- Informationstransport
  - Transport der Variablen-Entscheidungen zu den Klauseln
  - man muss positive und negative Literale abgreifen können
  - Informationstransport darf in eine Richtung unsauber sein: Flip von erfülltem zu nicht-erfülltem Literal ist OK

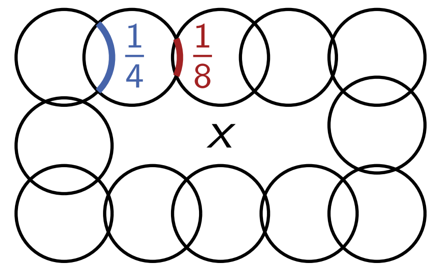
Gadgets

JA-Instanzen: für jede Disk ist der Rand zu $\geq 3/4$ sichtbar

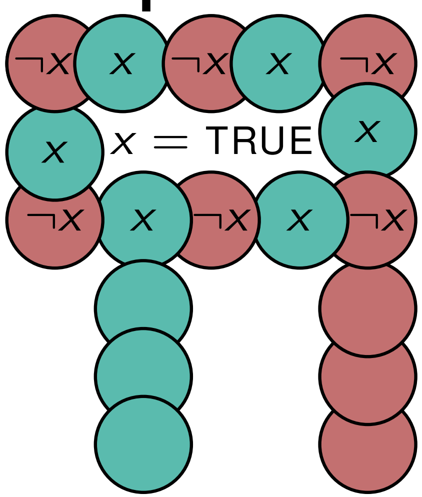


Variablen

- nur zwei Konfigurationen möglich
- jede weitere Konfiguration deckt mehr als $1/4$ einer Disk ab



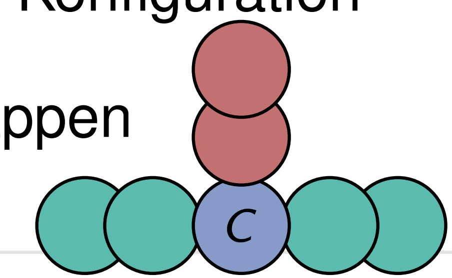
Transport der Literale



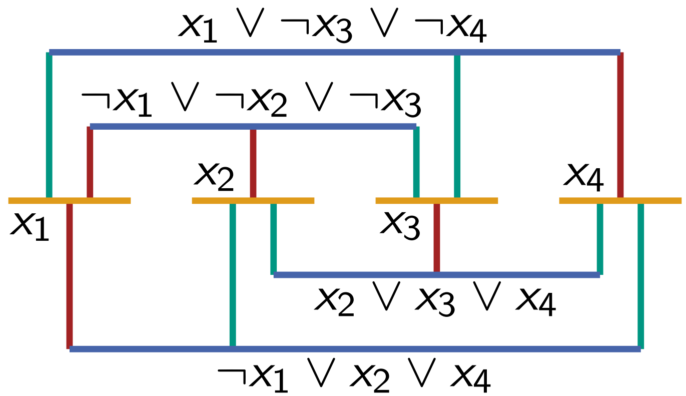
- Annahme: Konfiguration für $x = \text{TRUE}$
- Kette startet bei einer $\neg x$-Disk
  - jede Entscheidung in der Kette ist erzwungen
  - letzte Disk der Kette ist schon zu $1/4$ abgedeckt
  - letzte Disk kann im Prinzip beliebige Position haben
- Kette startet bei einer x-Disk
  - mögliche Konfiguration: letzte Disk komplett sichtbar
- invertiertes Verhalten, für $x = \text{FALSE}$ Konfiguration

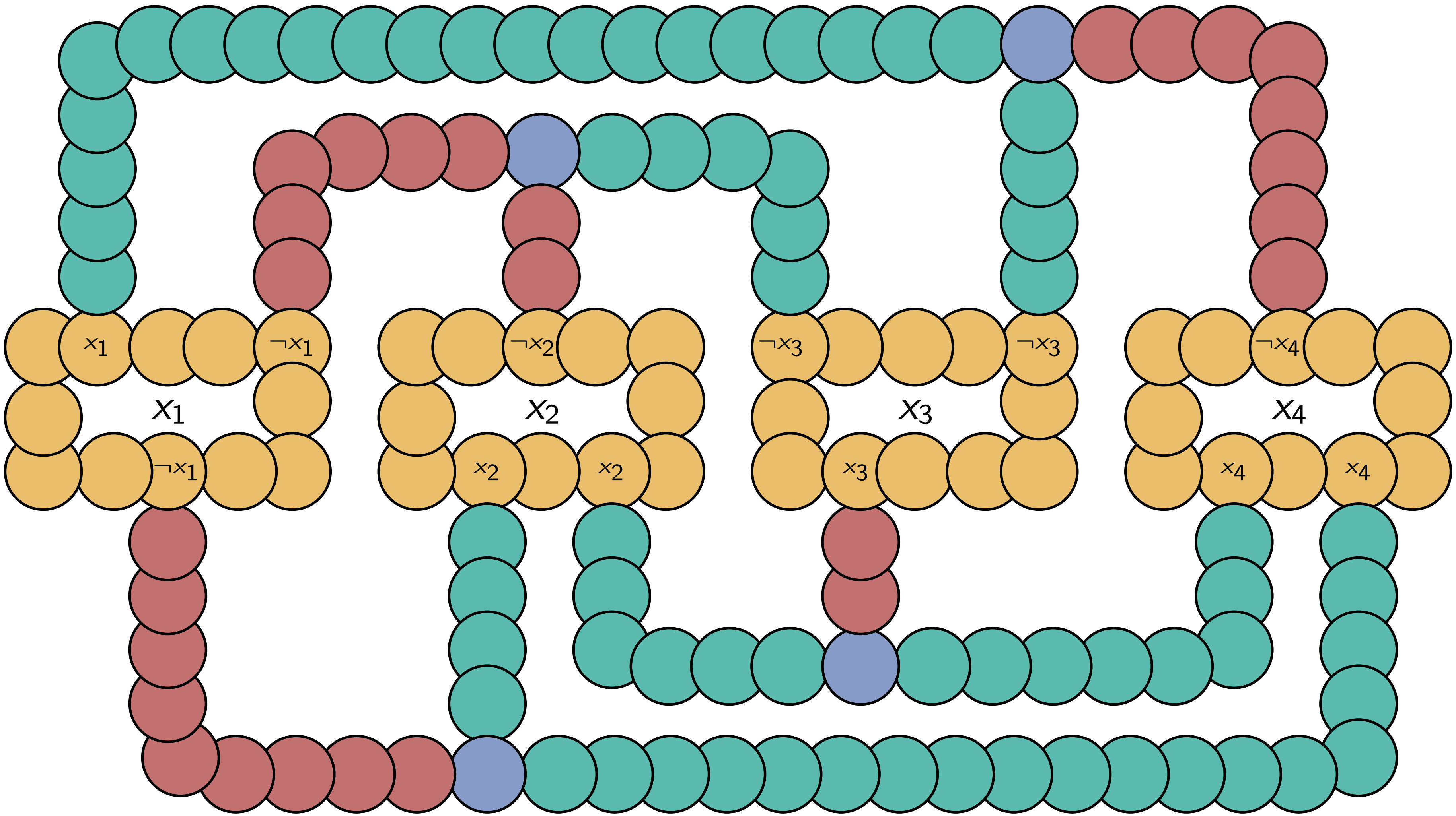
Klausel

- C muss mindestens eine der drei Nachbardisks überlappen
- das entspricht mindestens einem wahren Literal



Alles auf einmal





Was müssen wir genau zeigen?

Theorem
Es ist NP-schwer zu entscheiden, ob eine physikalisch realisierbare Anordnung existiert, die von jeder Disk mindestens $3/4$ des Rands zeigt.

Details der Reduktion (sollte im großen und ganzen mehr oder weniger klar sein)

- Größe des Variablen-Gadgets: abh. von Anzahl Vorkommen in Klauseln
- Länge der Transportgadgets
  - ergibt sich aus Kantenlängen in rechtwinkliger Zeichnung der Eingabe
  - Problem: Anzahl Disks ist ganzzahlig $\Rightarrow$ ggf. nicht jede Länge möglich
  - Gadget funktioniert, falls Überlappung zweier Disks $> 1/8$ und $\leq 1/4$
  - sind die Kanten ausreichend lang, dann haben wir genug Spielraum
- resultierende Instanz ist polynomiell groß
- Reduktion läuft in polynomieller Zeit

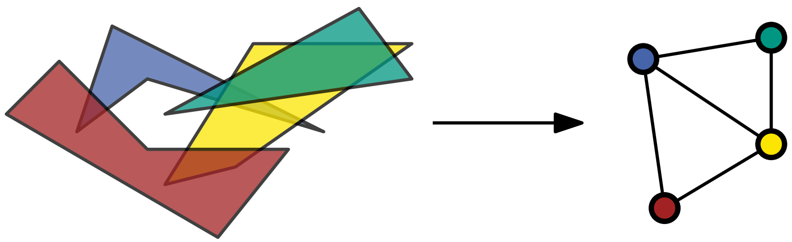
Korrektheit

- $3/4$ des Rands sichtbar $\Rightarrow$ Formel erfüllbar
- Formel erfüllbar $\Rightarrow$ $3/4$ des Rands sichtbar

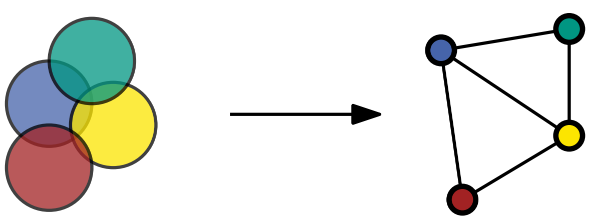
Warum?

Unit Disk Graphs

Definition
Eine Menge geometrischer Objekte V definiert den **geometrischen Schnittgraphen** $G = (V, E)$ mit $uv \in E \Leftrightarrow u \cap v \neq \emptyset$.



Definition
Ein Graph ist ein **Unit Disk Graph**, wenn er der geometrische Schnittgraph einer Menge von Disks mit Radius 1 ist.



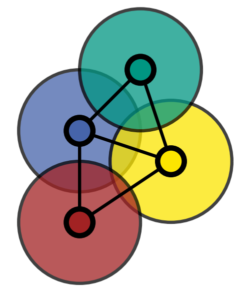
Problem: Erkennung
Ist ein gegebener Graph ein Unit Disk Graph?

Grundlegende Beobachtungen

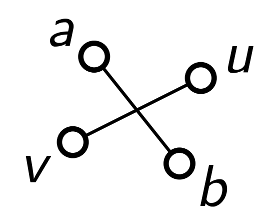
Ziel im Folgenden

- zeige, dass die Erkennung NP-schwer ist
- Reduktion von planar monotone 3-Sat

Grundlage für die Reduktion

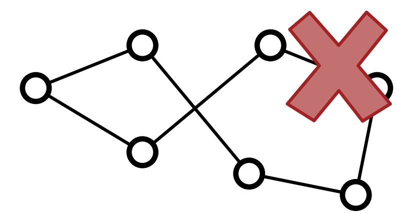


- äquivalente Fragestellung: Gibt es Positionen für die Knoten, sodass $\mathrm{dist}(u, v) \leq 2 \Leftrightarrow uv \in E$?
- wenn sich zwei Kanten ab und uv in dieser Darstellung kreuzen, dann bilden drei der Knoten a, b, u, v ein Dreieck

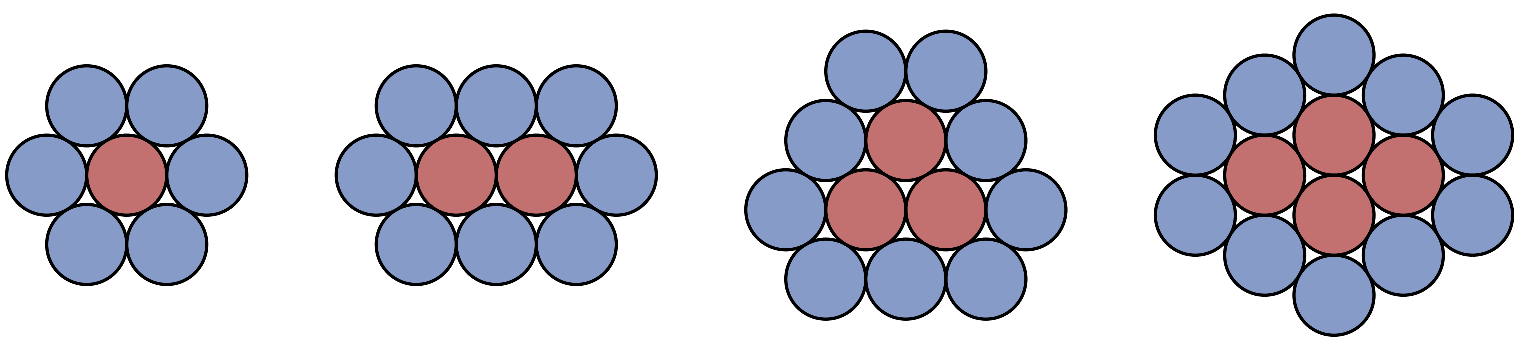


Warum?

- induzierte Kreise sind kreuzungsfrei

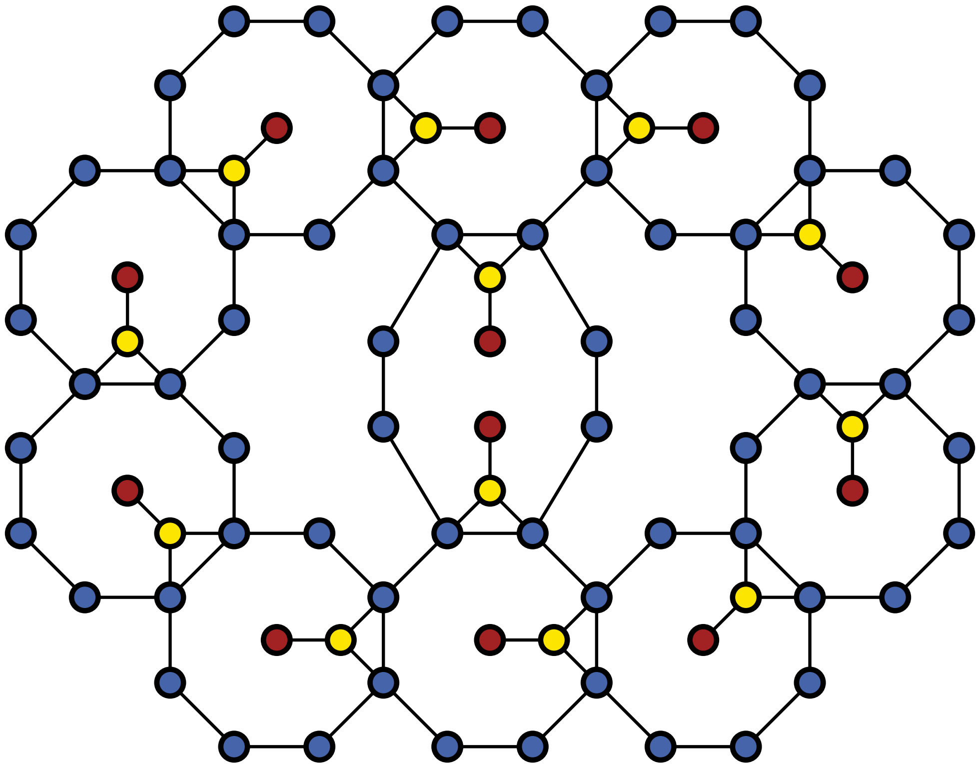


- Kreise können nur begrenzt viele unabhängige Knoten enthalten (*i*-Käfig enthält maximal *i* unabhängige Knoten)



0-Käfig 1-Käfig 2-Käfig 3-Käfig

Unit Disk Graph oder nicht?

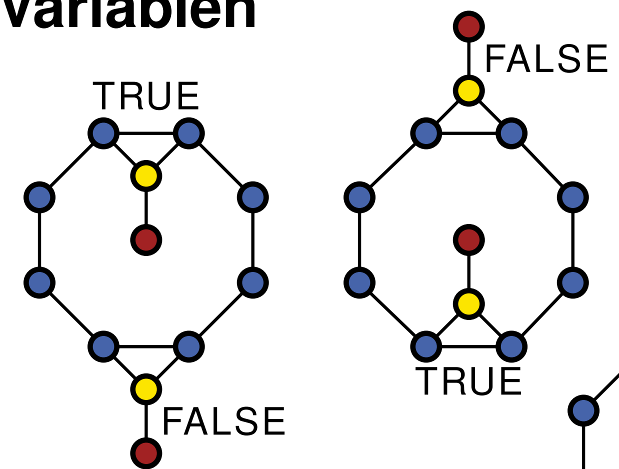


Gadgets

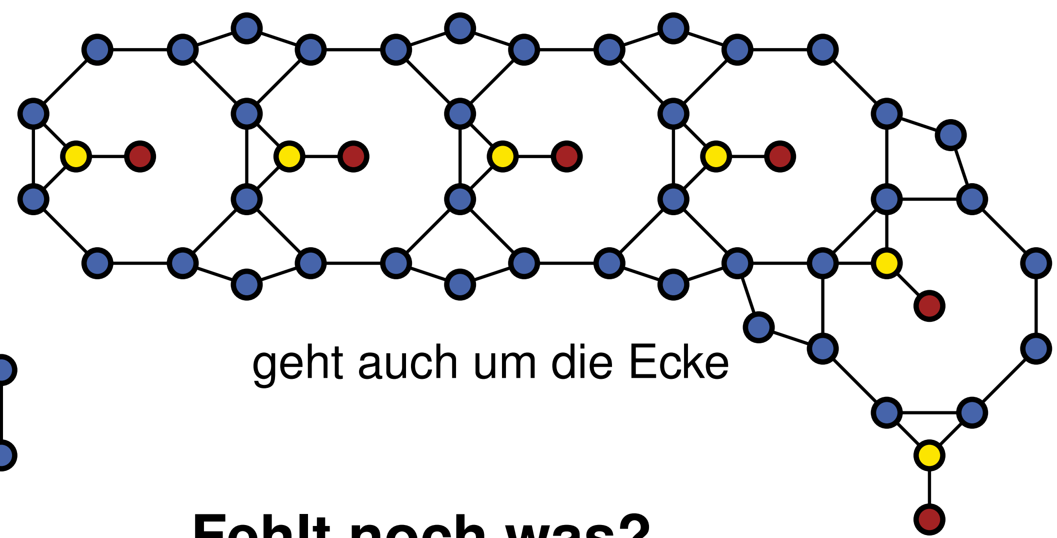
Was brauchen wir?

- Variablen, Klauseln
- Kanäle für Informationstransport der Literale von Variablen zu Klauseln

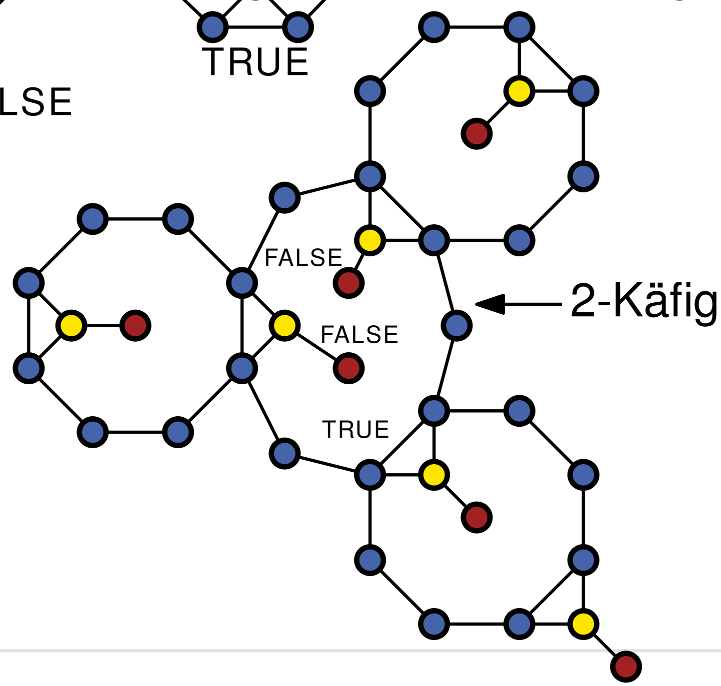
Variablen



Informationstransport



Klausel

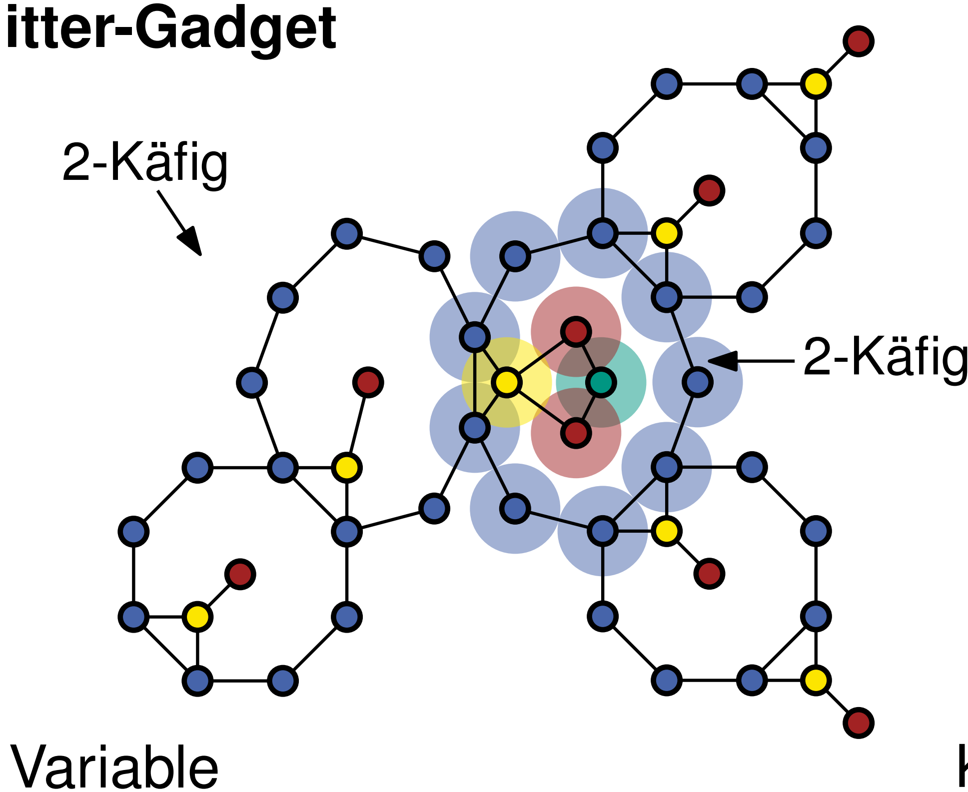


Fehlt noch was?

- wir können Entscheidung der Variable nur zu einer Klausel bringen
- Variablen sind aber in mehreren Klauseln enthalten
- wir brauchen ein Splitter-Gadget

Vervielfältigung von Information

Splitter-Gadget



Beachte

- zwingt die beiden in den gleichen 2-Käfig
- der 2-Käfig ist trotzdem noch realisierbar

- kommt von der Variable die FALSE-Konfiguration, so gehen zu den Klauseln FALSE-Konfigurationen weiter (in jeder Unit-Disk Zeichnung)
- bei einkommender TRUE-Konfiguration kann man ausgehende TRUE-Konfiguration erhalten
- Gadget tut also was es soll (ein Flip von TRUE auf FALSE ist OK)

Schwer zu erkennende Graphen

Theorem
Es ist NP-schwer zu entscheiden, ob ein Graph ein Unit Disk Graph ist.

Was müssen wir für den Beweis noch beachten?

- Länge der Transportgadgets: ergibt sich wieder durch Kantenlängen in der rectilinearen Zeichnung der Eingabe
- resultierende Instanz ist polynomiell groß
- Reduktion läuft in polynomieller Zeit
- Korrektheit
  - Graph ist Unit Disk Graph $\Rightarrow$ Formel erfüllbar
  - Formel erfüllbar $\Rightarrow$ Graph ist Unit Disk Graph

Ist das Problem auch NP-Vollständig?

- vermutlich nicht
- Was geht schief?
  - rate Positionen als Zertifikat und überprüfen ob $uv \in E \Leftrightarrow \text{dist}(u, v) \leq 2$
  - Problem: es könnte sein, dass es kein polynomiell großes Zertifikat gibt (weil wir große bzw. genau aufgelöste Zahlen für die Koordinaten brauchen)

Existential theory of the reals

Problem: Existential theory of the reals
Sei $F(X_1, \dots, X_n)$ eine quantorenfreie Boolesche Formel über (Un-)gleichungen von reellen Polynomen. Ist $\exists X_1 \cdots \exists X_n\ F(X_1, \dots, X_n)$ wahr?

(In der Logik ist eine *Theorie* eine Menge von Aussagen. Die *existential theory of the reals* ist die Menge aller wahren Aussagen dieser Form.)

Die Komplexitätsklasse $\exists\mathbb{R}$

- $\Pi \in \exists\mathbb{R} \Leftrightarrow \Pi$ ist polynomiell auf existential theory of the reals reduzierbar (maximal so schwer)
- Π ist $\exists\mathbb{R}$-schwer, wenn alle Probleme aus $\exists\mathbb{R}$ polynomiell auf Π reduzierbar sind (mindestens so schwer)
- Π ist $\exists\mathbb{R}$-vollständig, wenn $\Pi \in \exists\mathbb{R}$ und Π $\exists\mathbb{R}$-schwer (genauso schwer)

Unit Disk Graphen

- Erkennung von Unit Disk Graphen liegt in $\exists\mathbb{R}$ Warum?
- tatsächlich ist es sogar $\exists\mathbb{R}$-vollständig (ohne Beweis)

Sonstige Einordnung

- NP $\subseteq \exists\mathbb{R}$ Warum?
- $\exists\mathbb{R} \subseteq$ PSPACE (ohne Beweis)
- Vermutung NP $\neq \exists\mathbb{R}$

Bemerkung: die Erkennung von Unit-Disk Graphen ist also vermutlich echt schwerer als jedes Problem in NP

Zusammenfassung

Karlsruher Institut für Technologie

Heute gesehen

- Problem aus der Kartographie
- Unit Disk Graphen
- Komplexitätsklasse $\exists\mathbb{R}$
- geometrische Probleme liegen regelmäßig nicht in NP
- Reduktionen von Sat-Varianten oft gar nicht schwer; man braucht nur:
  - Variablen-Gadget
  - Klausel-Gadget
  - Transport-Gadget
  - ggf. Split-Gadget (wenn das Variablen-Gadget zu wenige Literale produziert)

Was gibt es sonst noch?

- Negations-Gadget (wenn man an einer Stelle, an der man negative Literale braucht, nur positive Literale abgreifen kann)
- Kreuzungs-Gadget (wenn man von einer nicht-planaren Sat-Variante reduziert)

Literaturhinweise

- **Algorithmic Aspects of Proportional Symbol Maps** (2009)
  Sergio Cabello, Herman Haverkort, Marc van Kreveld, Bettina Speckmann
  https://doi.org/10.1007/s00453-009-9281-8

- **Unit disk graph recognition is NP-hard** (1998)
  Heinz Breu, David G. Kirkpatrick
  https://doi.org/10.1016/S0925-7721(97)00014-X

- **Optimal Binary Space Partitions in the Plane** (2010)
  Mark de Berg, Amirali Khosravi
  (NP-Schwere für monotone planar 3-Sat) https://doi.org/10.1007/978-3-642-14031-0_25

- **Sphere and Dot Product Representations of Graphs** (2012)
  Ross J. Kang, Tobias Müller
  ($\exists\mathbb{R}$-Schwere für die Erkennung von Unit Disk Graphen) https://doi.org/10.1007/s00454-012-9394-8