

Algorithmische Geometrie

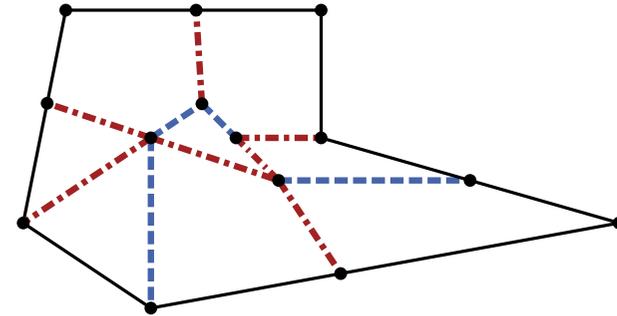
Faltbarkeit – Origami und Co



Flache Faltmuster

Gegeben

- ein geometrischer Graph
- jede innere Kante ist entweder mit Berg oder Tal gekennzeichnet

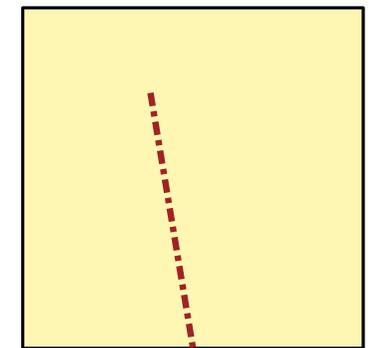
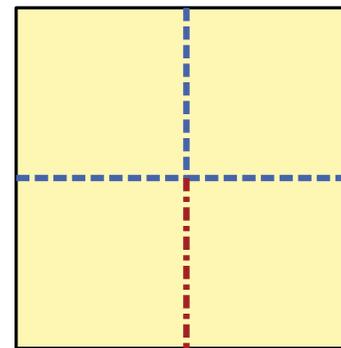
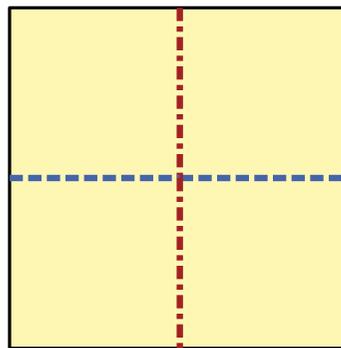
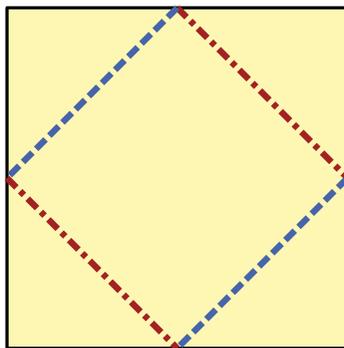


Interpretation

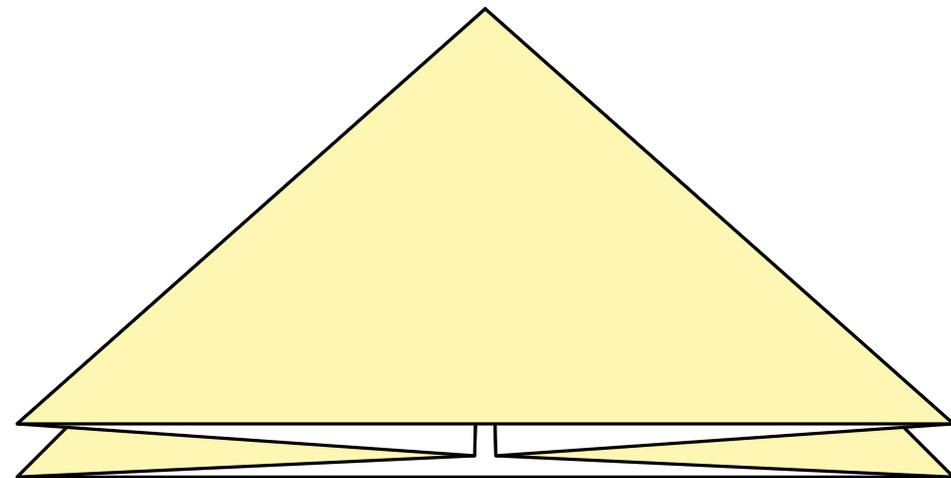
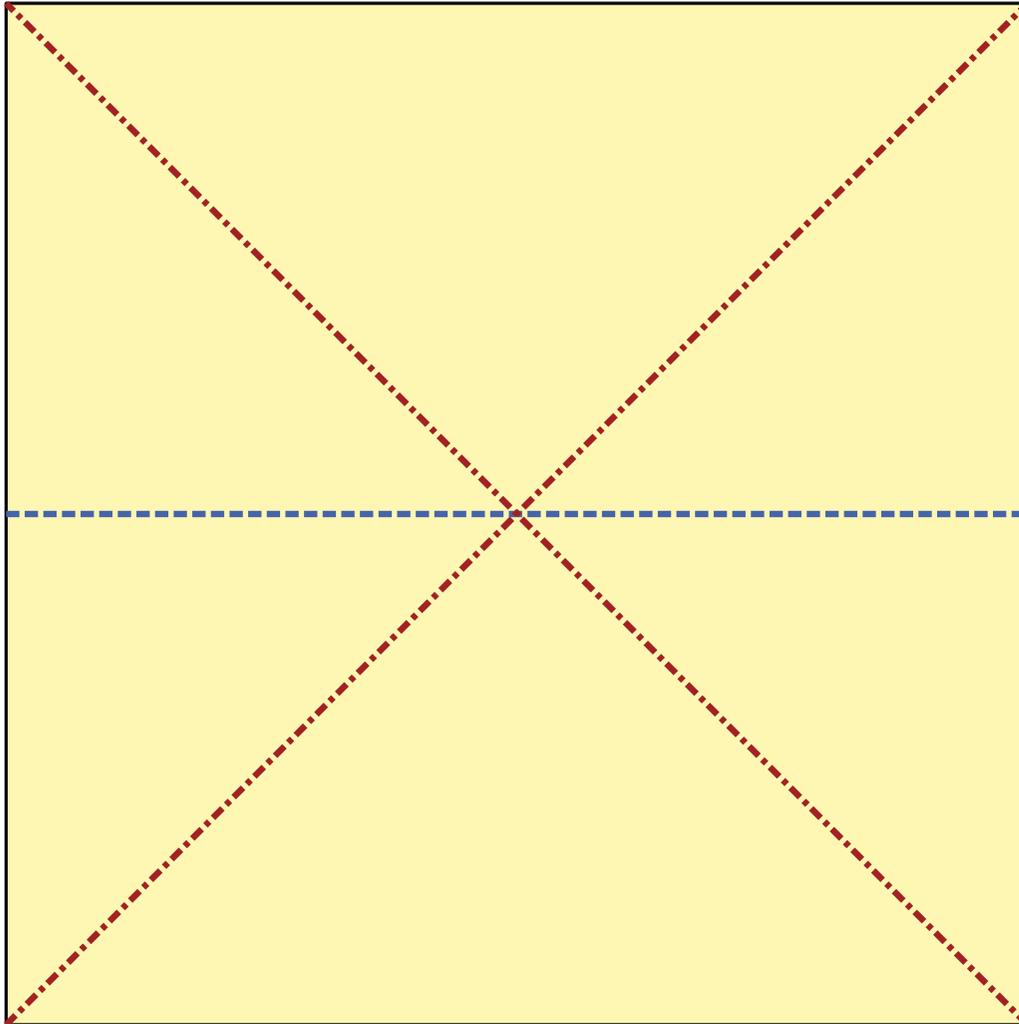
- Rand der äußere Facette ist ein Blatt Papier (im Folgenden meist ein Quadrat)
 - der geometrische Graph ist ein **Faltmuster**
 - Faltrichtung ist durch **Berg/Tal-Zuweisung** gegeben
- } **Berg/Tal-Muster**

Problem: Ist das Berg/Tal-Muster flach faltbar?

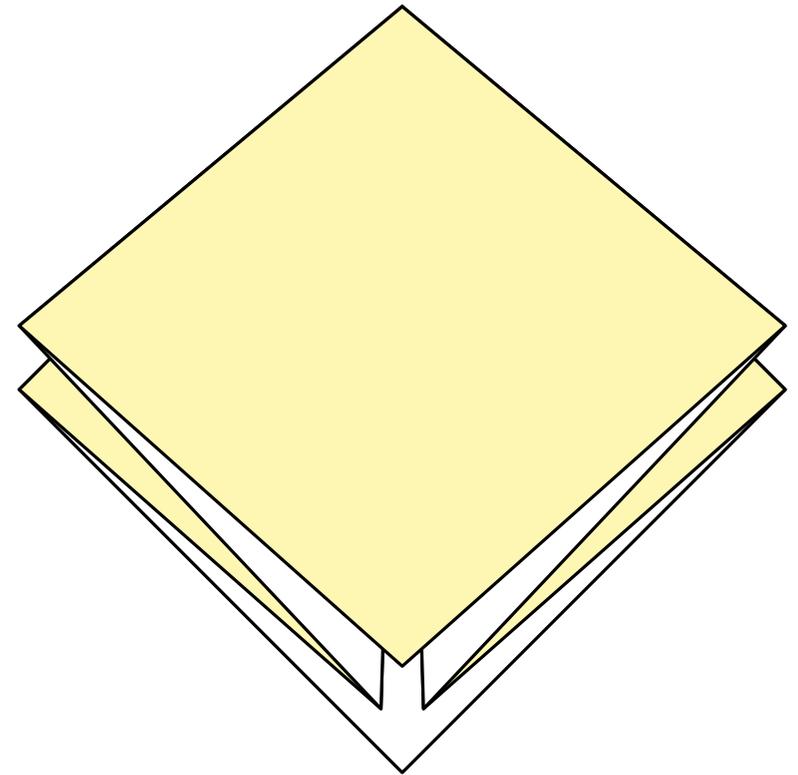
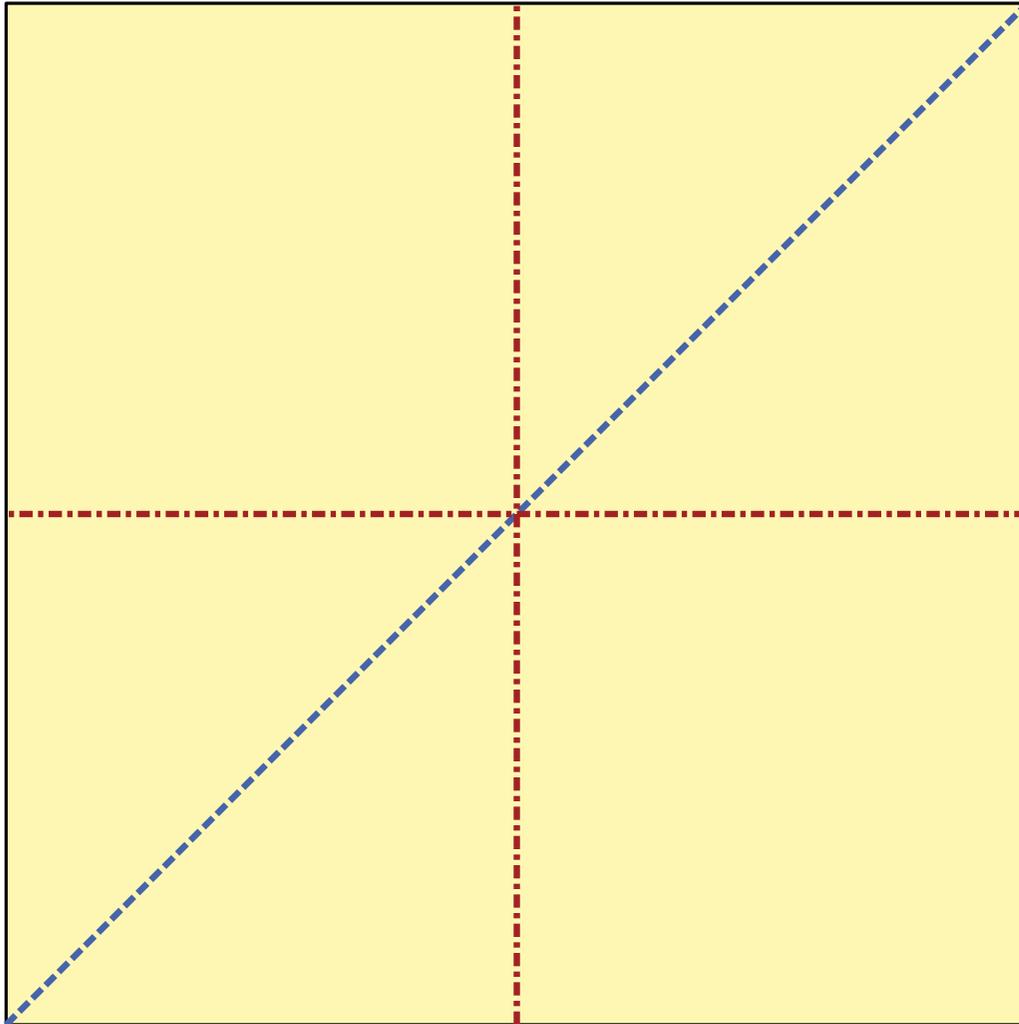
Beispiele



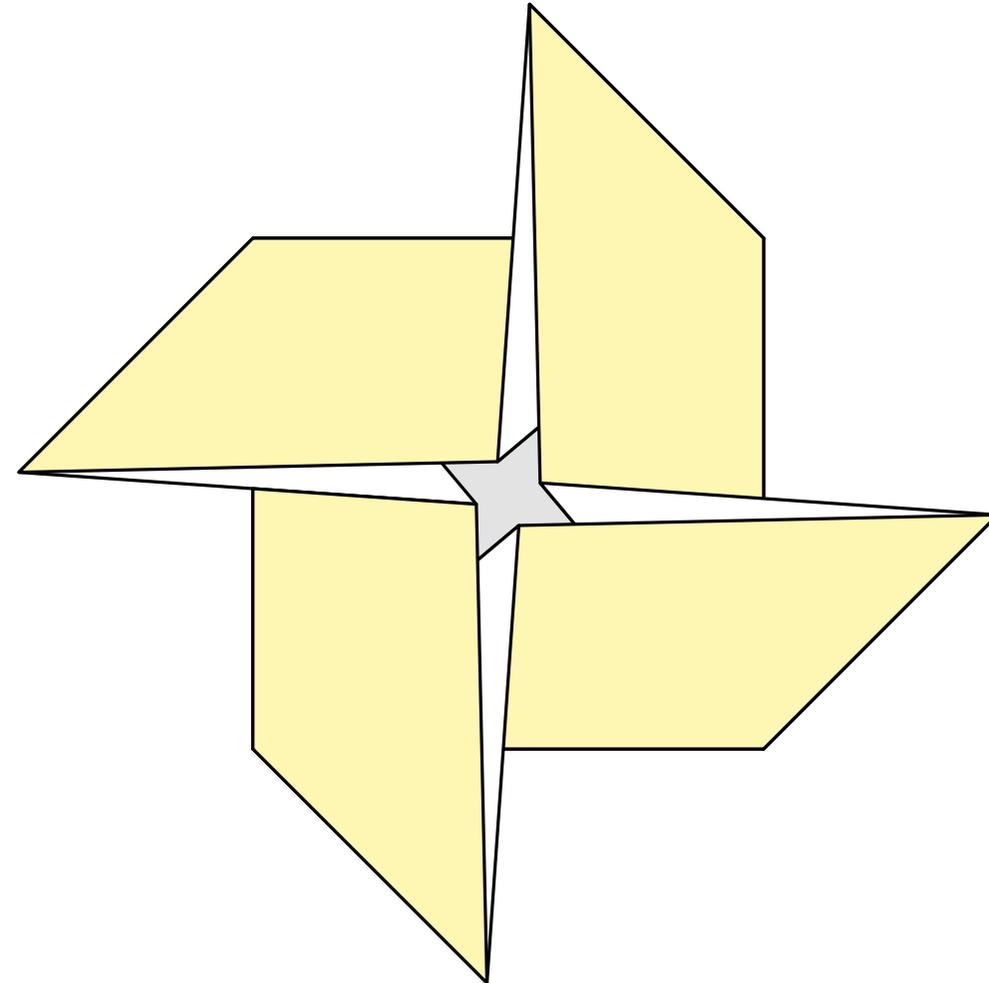
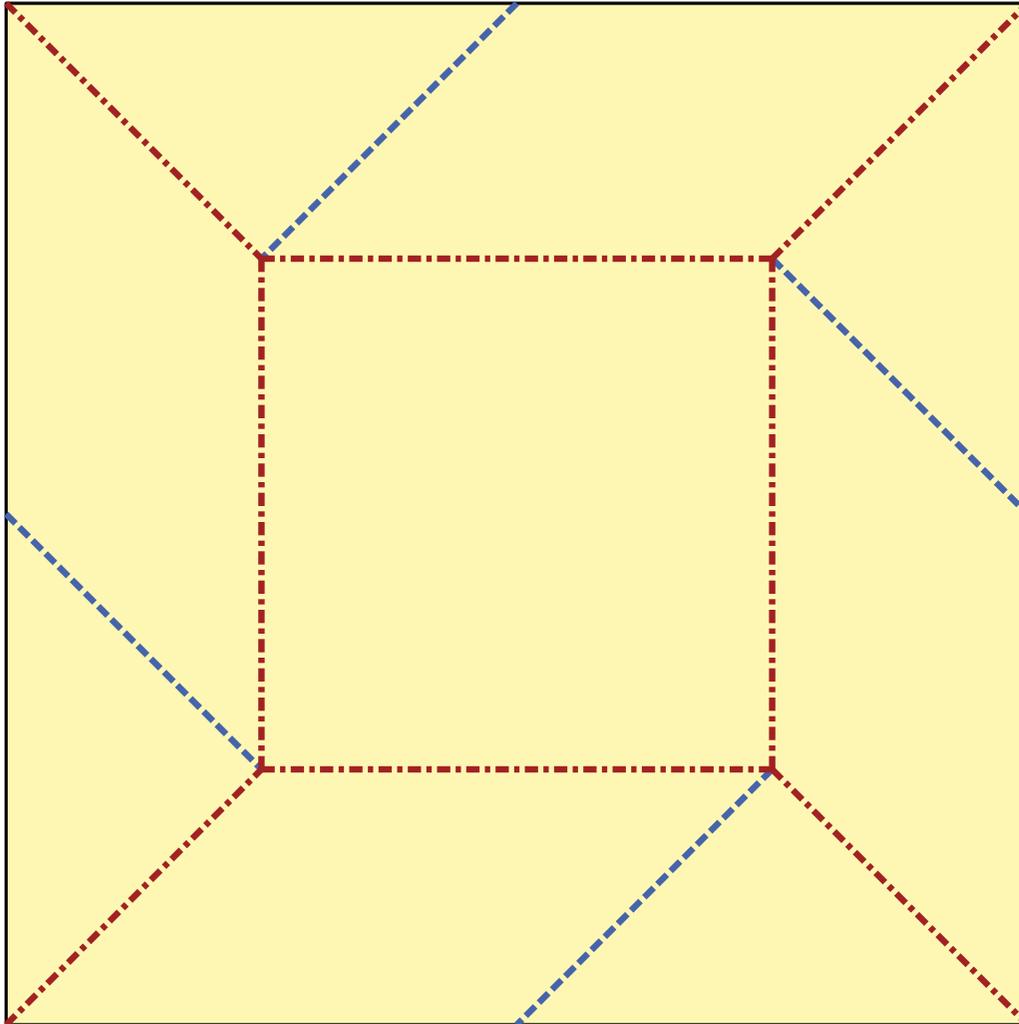
Ist das Berg/Tal-Muster flach faltbar?



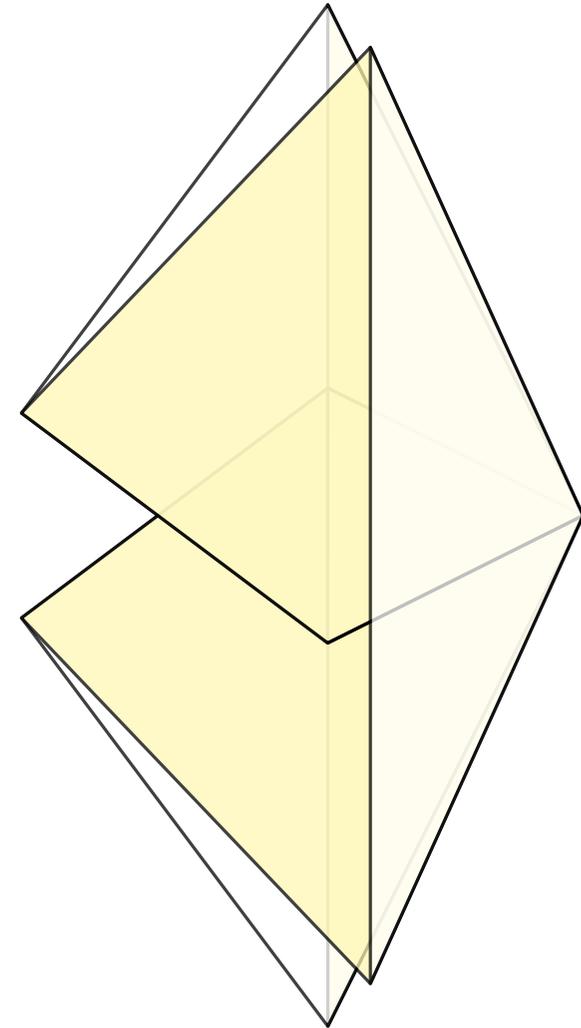
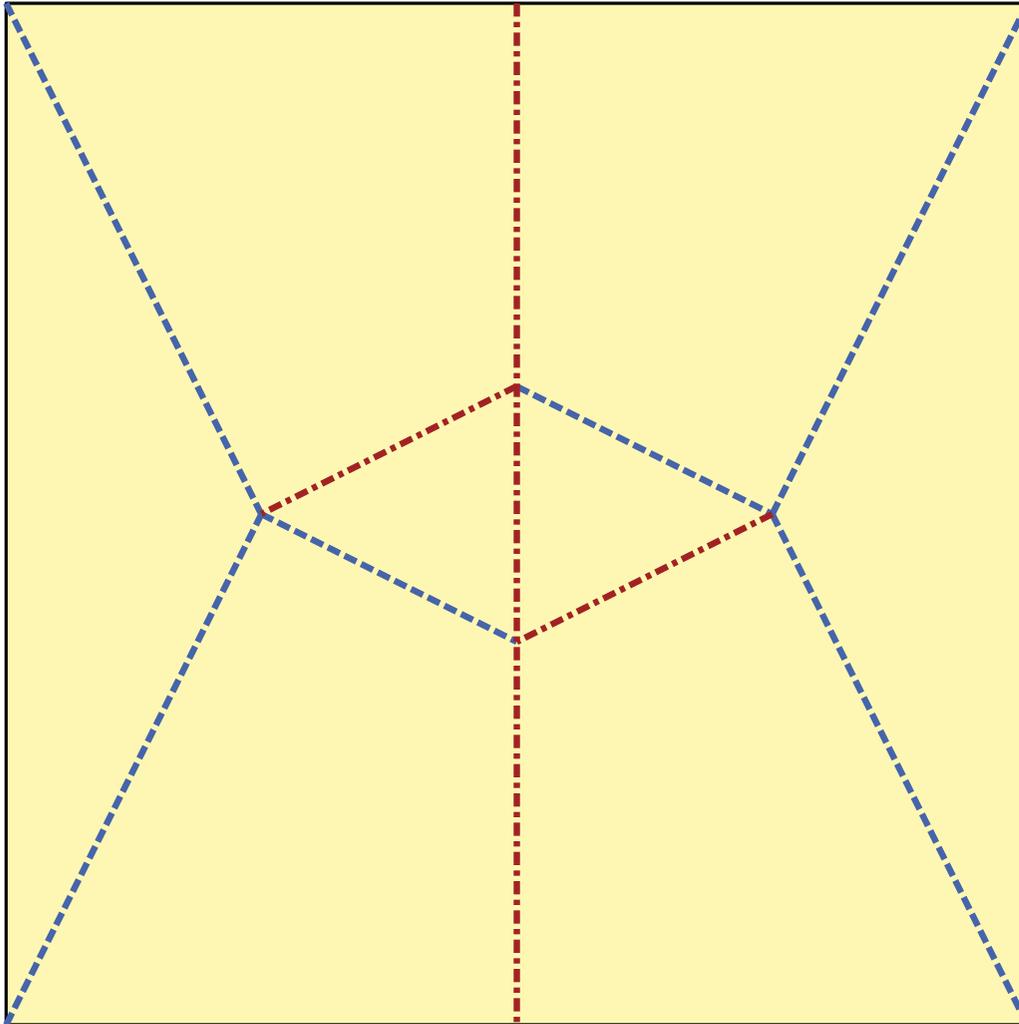
Ist das Berg/Tal-Muster flach faltbar?



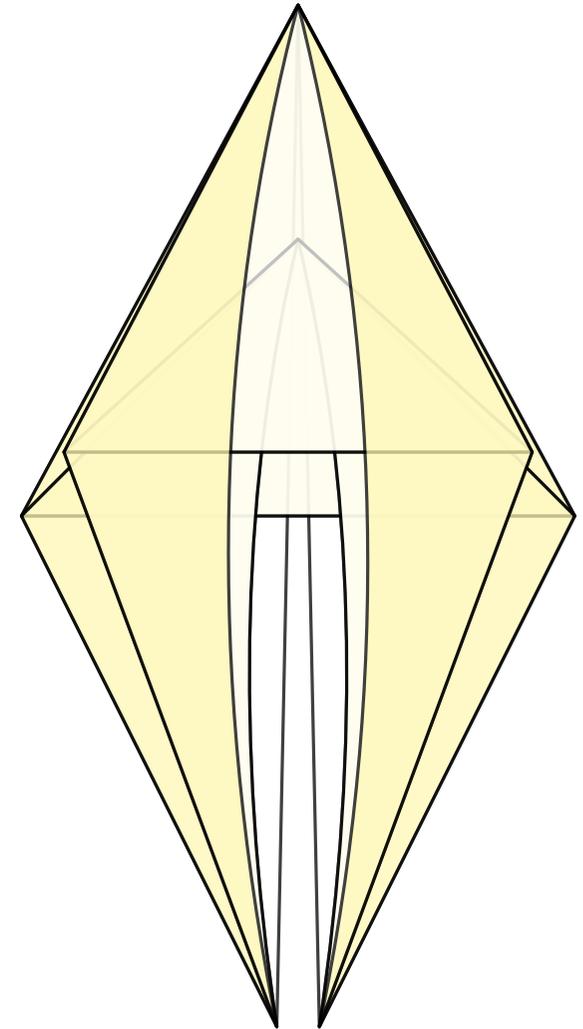
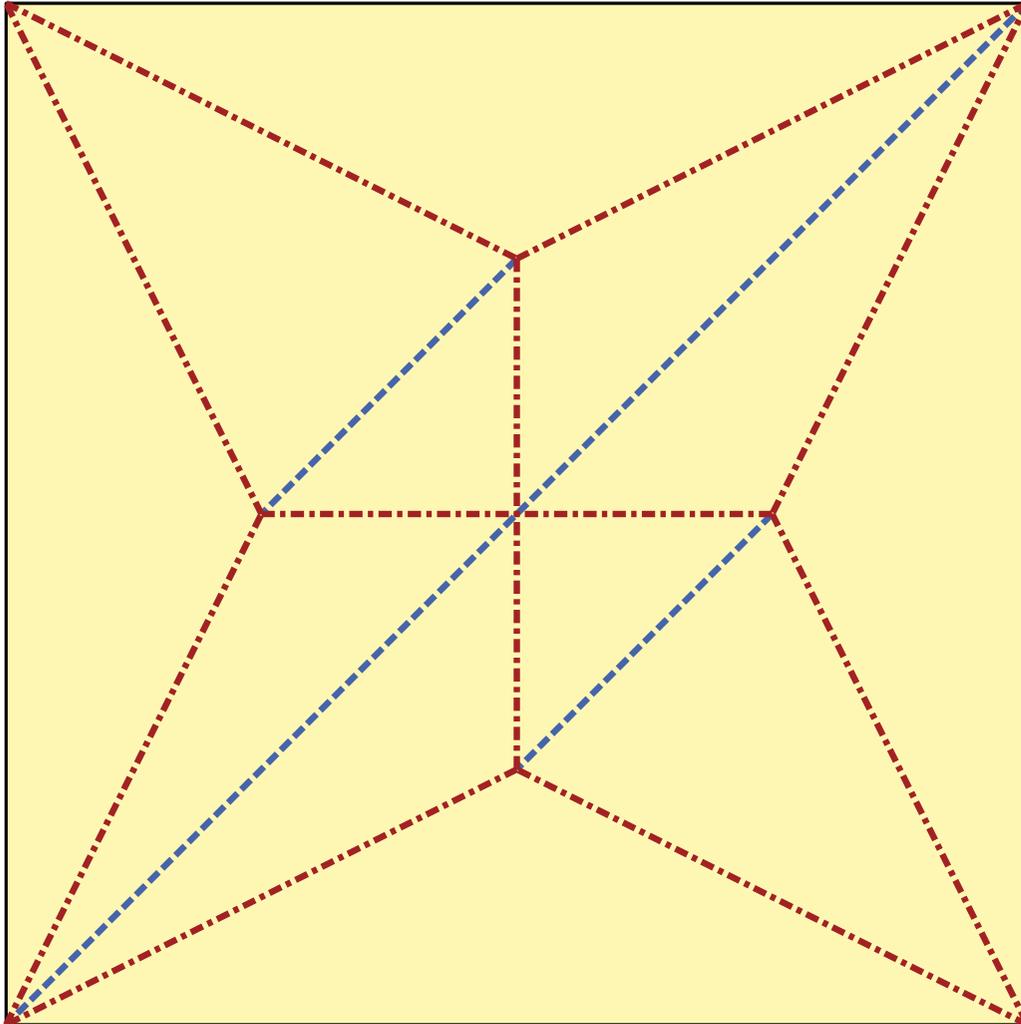
Ist das Berg/Tal-Muster flach faltbar?



Ist das Berg/Tal-Muster flach faltbar?



Ist das Berg/Tal-Muster flach faltbar?



halber Kranich

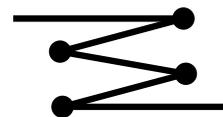
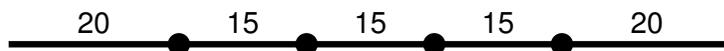
Das ist alles viel zu schwer!

Zwei Problemvarianten

- Gegeben ein Berg/Tal-Muster, ist es flach faltbar?
- Gegeben ein Faltmuster, gibt es eine Berg/Tal-Zuweisung, sodass es flach faltbar ist?

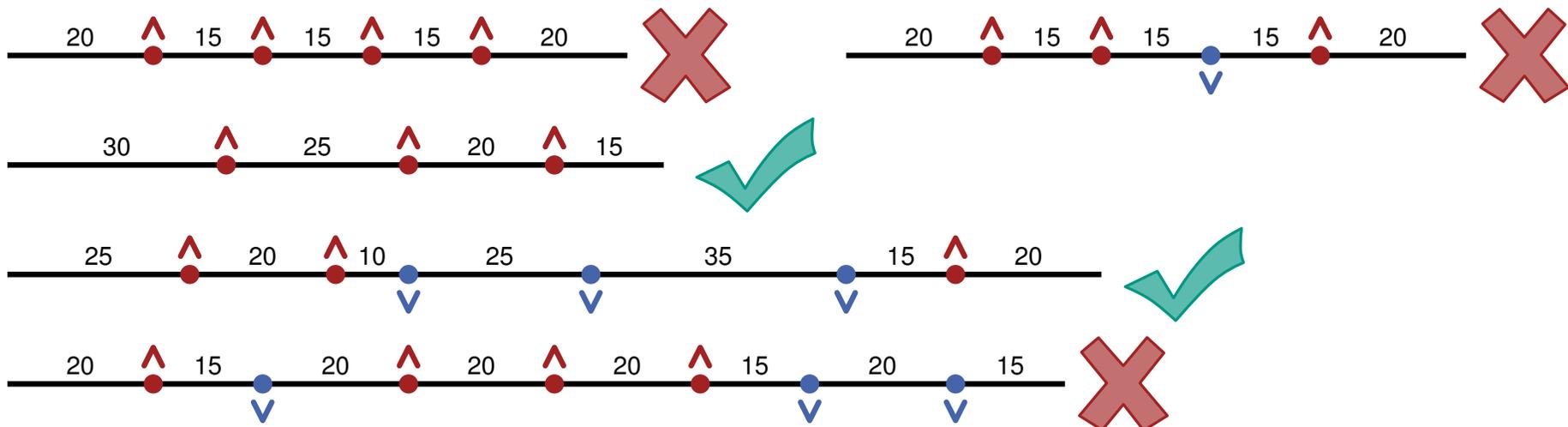
Etwas einfacher: 1D-Fall → unser „Papier“ ist dann eine Strecke

1D Faltmuster



zick-zack geht immer

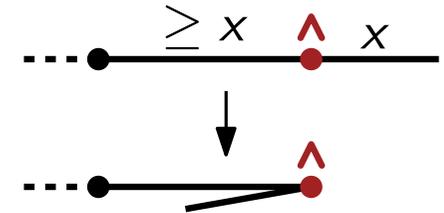
1D Berg/Tal-Muster



Reduktionsregeln

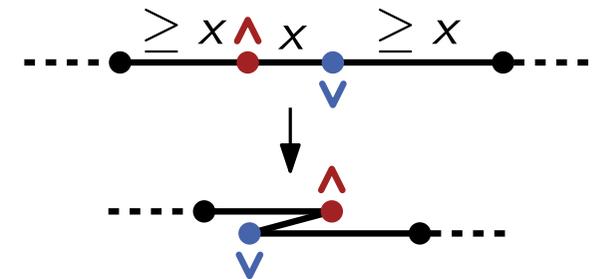
End-Fold

- Bed.: erstes/letztes Stück kleiner (\leq) als der Nachbar
- Reduktion: falte ersten/letzten Knoten



Crimp

- Bedingung: inneres Stück mit einem Berg- und einem Tal-Knoten und größeren Nachbarn
- Reduktion: falte beide anliegenden Knoten



Lemma

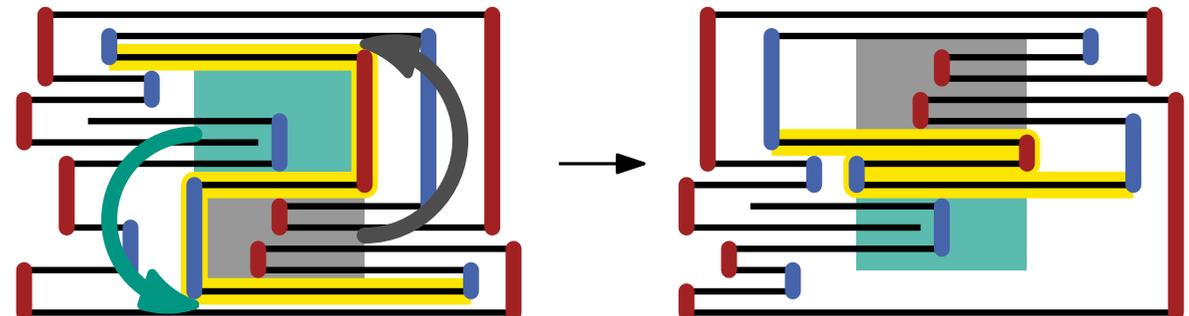
Die Reduktionsregeln „End-Fold“ und „Crimp“ sind sicher.

(Wenn ein Berg/Tal-Muster flach faltbar ist, dann ist auch das aus der Anwendung der Reduktionsregel resultierende Berg/Tal-Muster flach faltbar.)

(Safety first!)

Beweis

- **End-Fold:** offensichtlich
- **Crimp:** Beweis durch Bild

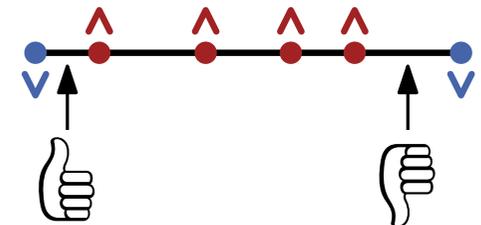
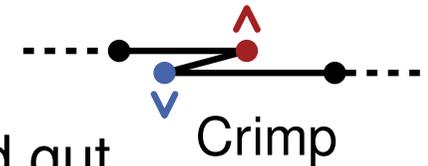


Reduktionen bis zum Schluss

Theorem **(faltbar \Rightarrow Reduktion)**
 Berg/Tal-Muster flach faltbar \Rightarrow es gibt ein End-Fold oder Crimp.

Beweisplan

- kurze Stücke mit einem Berg- und einem Tal-Knoten sind gut
- betrachte inklusions-maximales Sequenz, mit nur Berg- bzw. nur Tal-Knoten
- links-kurz: erstes Stück ist kürzer als zweites
- rechts-kurz: letztes Stück ist kürzer als vorletztes



Lemma **(faltbar \Rightarrow kurze Grenzanten)**
 Flach faltbar \Rightarrow jede solche maximale Sequenz ist links- oder rechts-kurz.

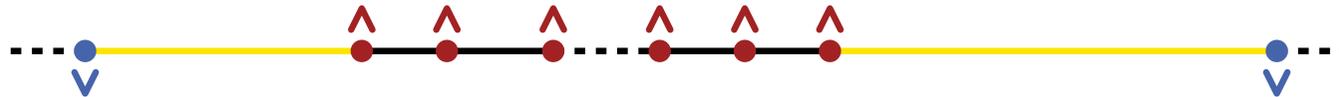
Lemma **(kurze Grenzanten \Rightarrow Reduktion)**
 Jede solche maximale Sequenz ist links- oder rechts-kurz \Rightarrow es gibt ein End-Fold oder Crimp.

Kurze Kanten überall

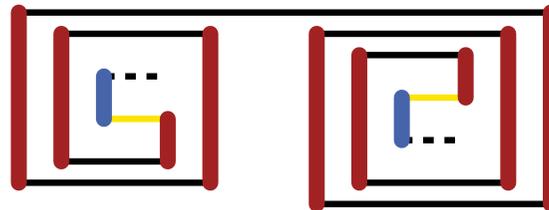
Lemma (faltbar \Rightarrow kurze Grenzkanten)
 Flach faltbar \Rightarrow jede solche maximale Sequenz ist links- oder rechts-kurz.

Beweis

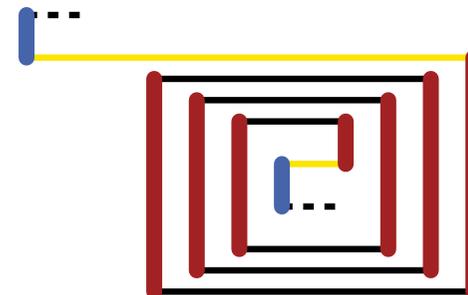
- betrachte maximale Sequenz, die weder links- noch rechts-kurz ist



- wir kommen aus der Spirale nicht mehr raus



- Sequenz ist links- oder rechts-kurz (und eines der beiden reicht auch)



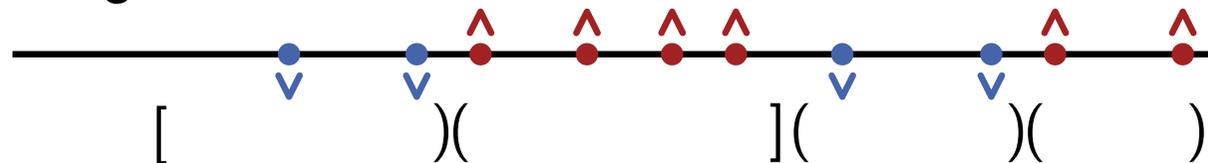
Eine Reduktion geht immer

Lemma (kurze Grenzkanten \Rightarrow Reduktion)
 Jede solche maximale Sequenz ist links- oder rechts-kurz \Rightarrow es gibt ein End-Fold oder Crimp.

Beweis

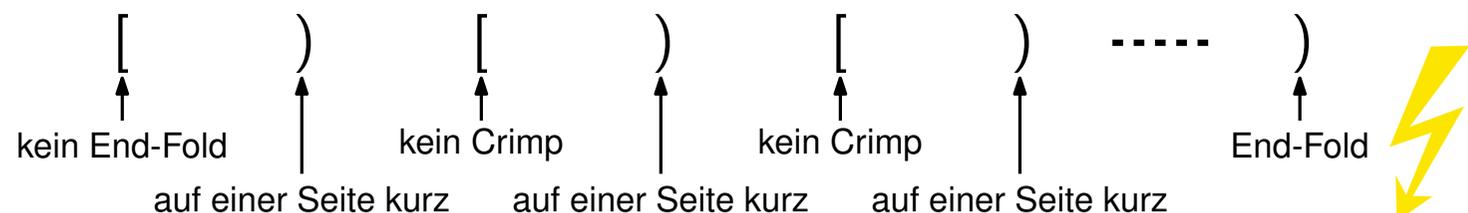
- beschreibe jede maximale Sequenz durch ein Klammerpaar
 - Anfang: Klammer auf
 - Ende: Klammer zu
 - kurz (auf dieser Seite): runde Klammer
 - nicht kurz: eckige Klammer

■ Beispiel:



- „(“ am Anfang \Rightarrow End-Fold
- „)“ am Ende \Rightarrow End-Fold
- „)(“ \Rightarrow Crimp

Was erhält man, wenn keine Reduktion möglich ist?



Zusammenfassung: 1D Origami

Lemma

(Safety first!)

Die Reduktionsregeln „End-Fold“ und „Crimp“ sind sicher.

(Wenn ein Berg/Tal-Muster flach faltbar ist, dann ist auch das aus der Anwendung der Reduktionsregel resultierende Berg/Tal-Muster flach faltbar.)

Theorem

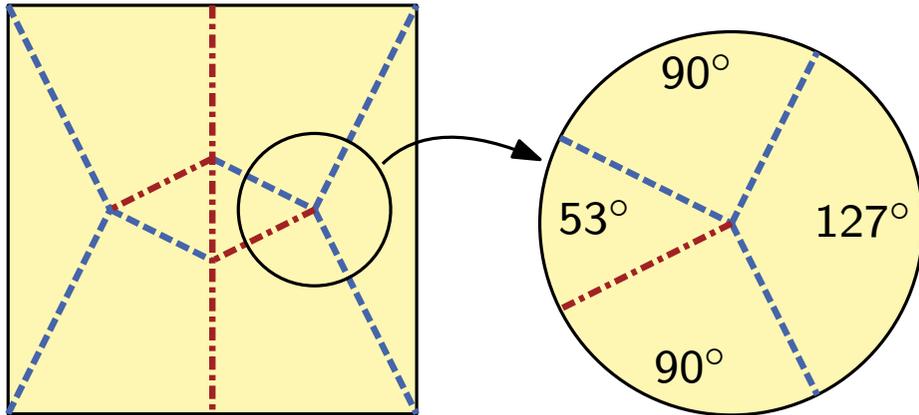
(faltbar \Rightarrow Reduktion)

Berg/Tal-Muster flach faltbar \Rightarrow es gibt ein End-Fold oder Crimp.

Algorithmus zur Erkennung flach faltbarer 1D Berg-/Tal-Muster

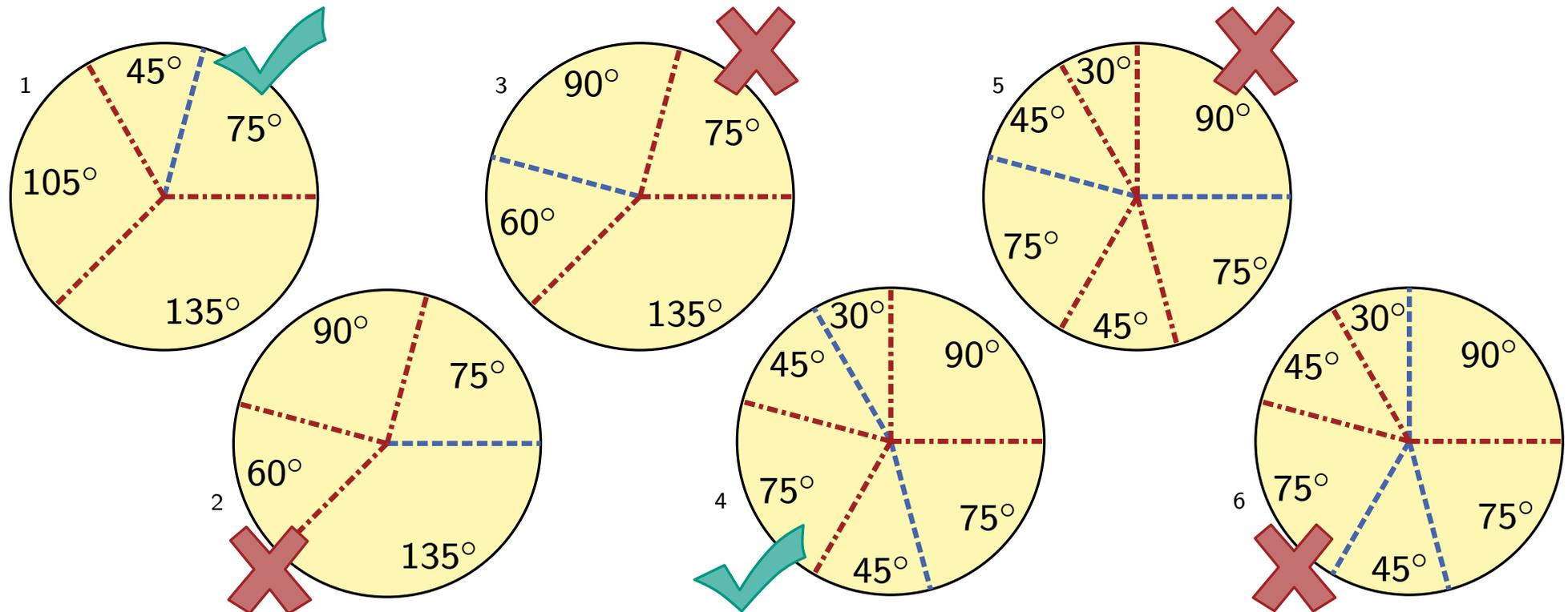
- solange End-Fold oder Crimp möglich, führe End-Fold oder Crimp aus
- Resultat ist flach gefaltet \Rightarrow flach faltbar
- Resultat ist noch nicht flach gefaltet \Rightarrow nicht flach faltbar
- Laufzeit: $O(n)$ \rightarrow siehe Übung

2D Origami (mit einem Knoten)



Notwendige Bedingung

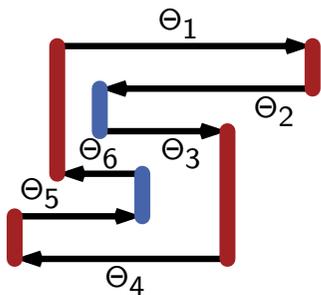
- Berg/Tal-Muster faltbar
⇒ jeder Knoten lokal faltbar
- Welche 1-Knoten Berg-/Tal-Muster sind flach faltbar?



Faltmuster mit einem Knoten

Beobachtungen

- Ähnlichkeit zu 1D-Fall: Sequenz von Winkeln $\Theta_1, \dots, \Theta_n$
- unser Papier ist jetzt ein Kreis, statt einer Strecke
- nicht jedes Faltmuster ist flach faltbar (im Gegensatz zum 1D-Fall)



Notwendige Bedingung für das Faltmuster

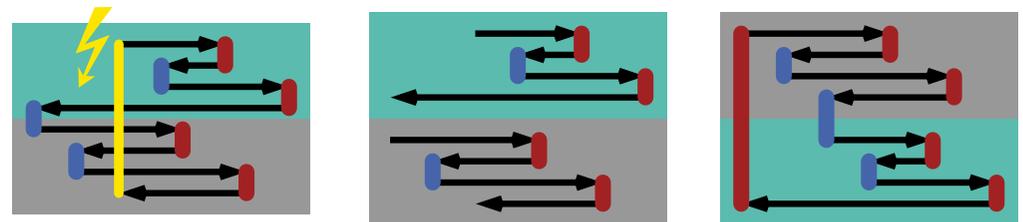
- Richtung der Kreisbögen alternieren $\Rightarrow n$ ist gerade
- $\Theta_1 + \Theta_3 + \dots + \Theta_{n-1} = \Theta_2 + \Theta_4 + \dots + \Theta_n = 180^\circ$

Theorem

Ein Faltmuster hat eine flach faltbare Berg/Tal-Zuweisung genau dann, wenn die Summe der geraden und der ungeraden Winkel je 180° ist.

Beweis

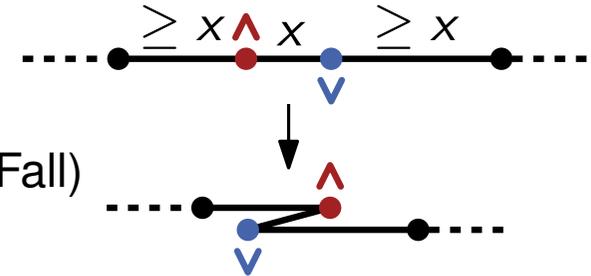
- versuche zunächst Zick-Zack
- zerschneide an linkestem Punkt
- vertausche Reihenfolge
- füge wieder zusammen



Berg/Tal-Muster mit einem Knoten

Sichere Reduktion

- definiere Crimp wie im 1D-Fall
- Reduktionsregel ist sicher (selbes Argument wie in 1D-Fall)
- End-Folds gibt es natürlich nicht mehr



Flach faltbar \Rightarrow Crimp

- gilt weiterhin, außer wenn wir nur zwei (gleich große) Winkel haben
- Beweisidee:
 - wähle Sequenz gleich großer Winkel ... ——— ● ——— ● ——— ● ——— ● ——— ● ——— ...
 - nur Berg-Knoten bzw. nur Tal-Knoten \Rightarrow nicht flach faltbar
 - Wechsel zwischen Berg und Tal \Rightarrow Crimp

Theorem

Wenn Berg/Tal-Muster mit einem Knoten flach faltbar ist, dann gibt es ein Crimp. Außerdem führt jede Folge von Crimps zu einer flachen Faltung.

Bonusbeobachtung: flach faltbar \Rightarrow #Berge – #Täler = ± 2

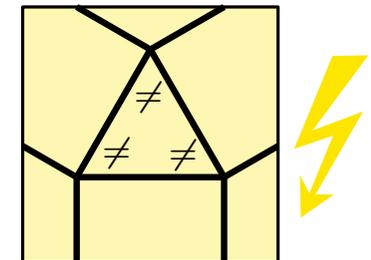
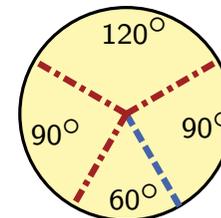
Zusammenfassung

Heute gesehen

- 1D Faltmuster: immer faltbar
- 1D Berg/Tal-Muster
 - Reduktionsregeln: Crimp und End-Fold
 - flach faltbar \Rightarrow Crimp oder End-Fold
- 1-Knoten 2D Faltmuster
 - flach faltbar $\Leftrightarrow \Theta_1 + \Theta_3 + \dots + \Theta_{n-1} = \Theta_2 + \Theta_4 + \dots + \Theta_n = 180^\circ$
- 1-Knoten 2D Berg/Tal-Muster
 - Reduktionsregel: Crimp
 - flach faltbar \Rightarrow Crimp

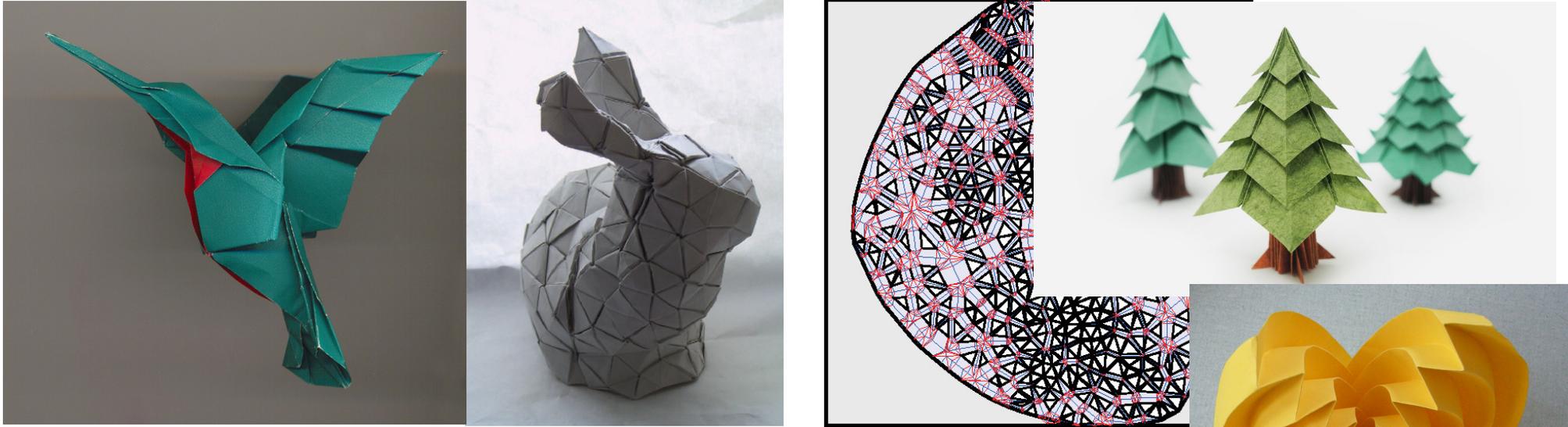
Was gibt es sonst noch?

- testen ob ein Faltmuster flach faltbar ist: NP-schwer
- Berg/Tal-Muster flach falten: NP-schwer
- lokale Faltbarkeit: $O(n)$
 (finde Berg/Tal-Zuweisung, sodass jeder Knoten für sich flach faltbar ist)

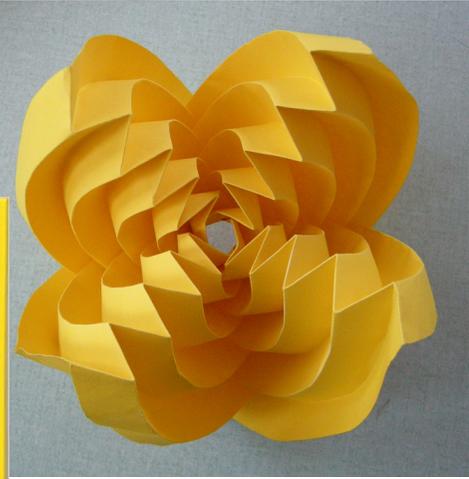
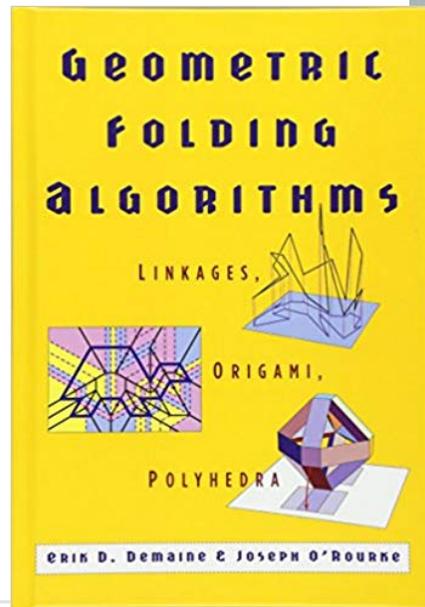
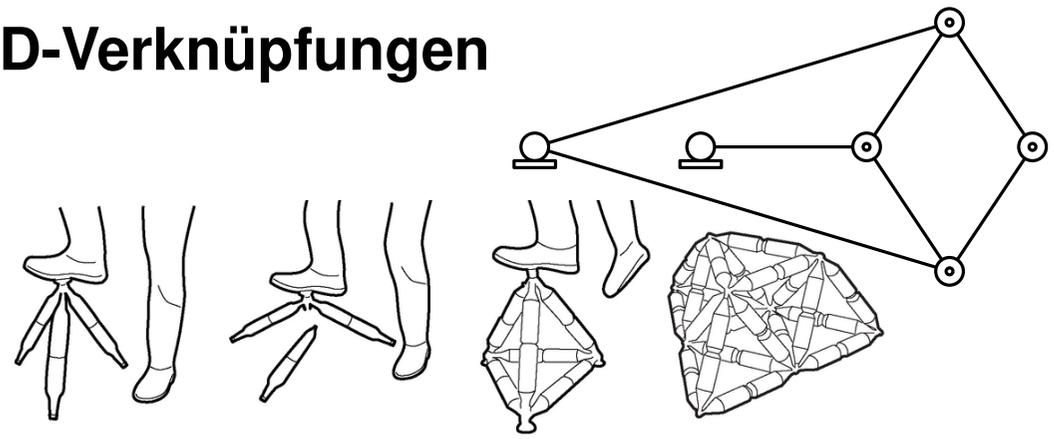


Was gibt es sonst noch?

Origami alles ist faltbar (für verschiedene Definition von „Alles“)

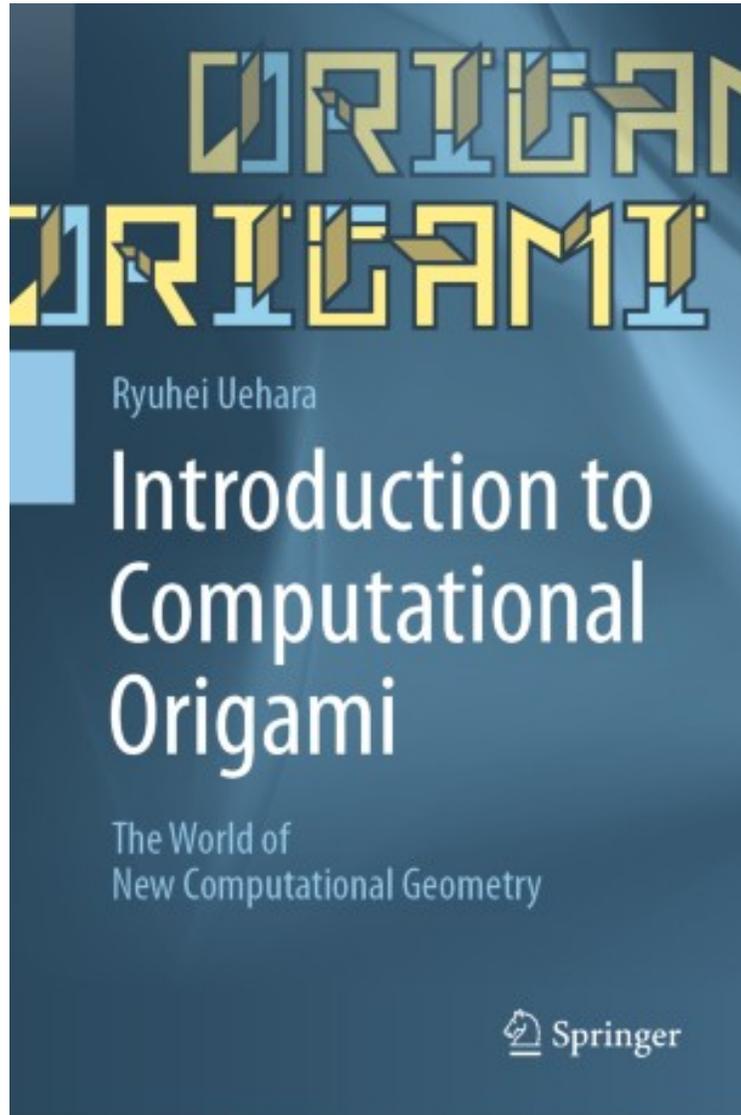


1D-Verknüpfungen

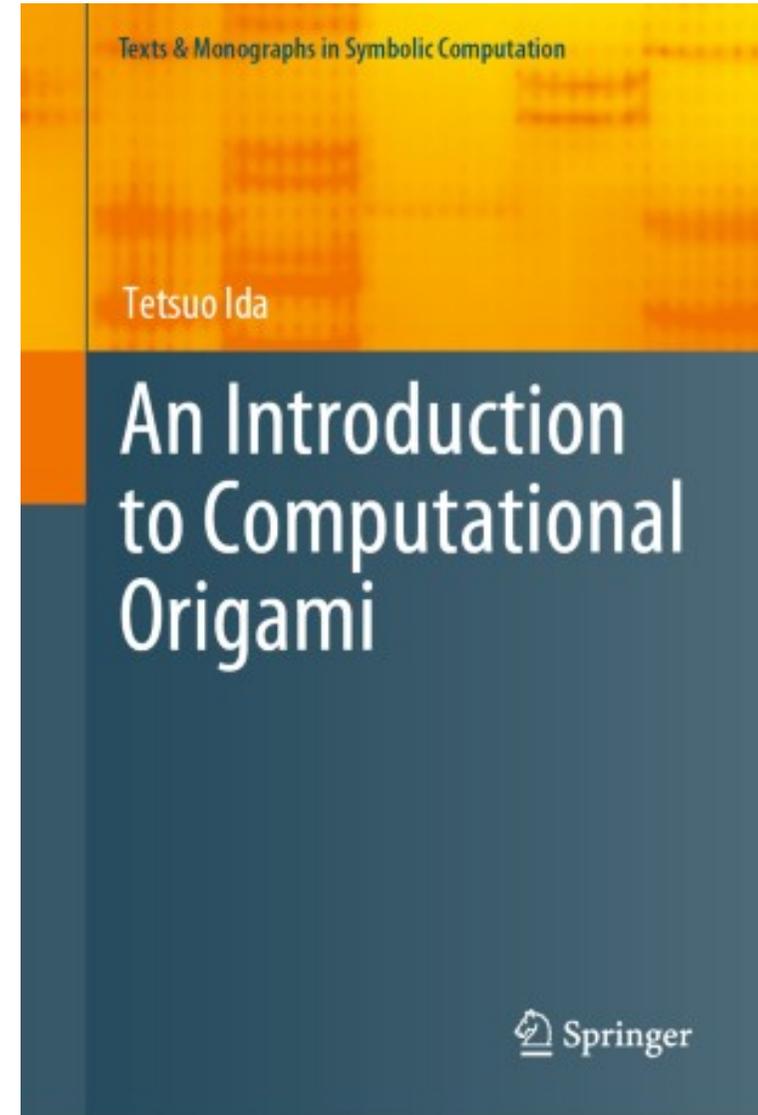


Fold-and-Cut → Donnerstag

Weitere Bücher



<https://link.springer.com/book/10.1007/978-981-15-4470-5>



<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-59189-6>