Karlsruher Institut für Technologie

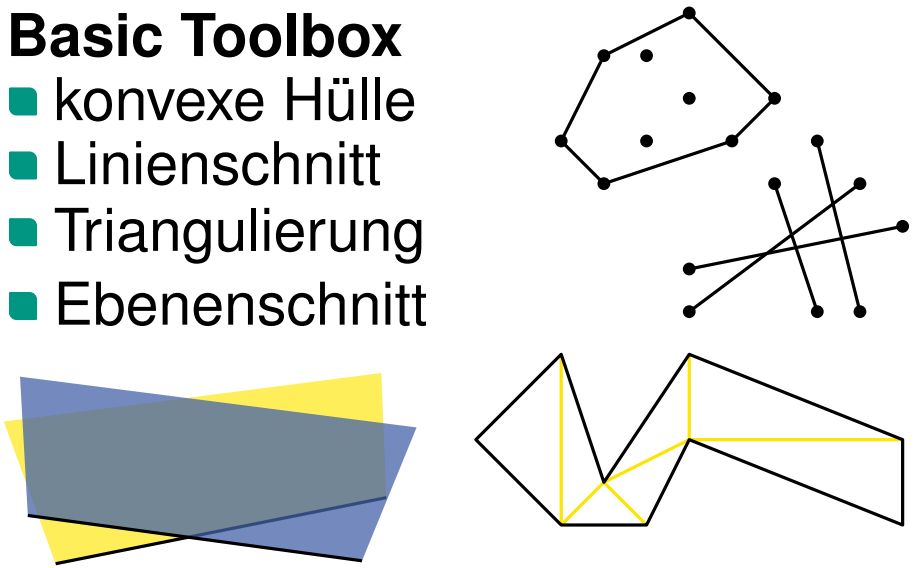
# Algorithmische Geometrie

## Voronoi-Diagramme – Fortunes Algorithmus

# Überblick

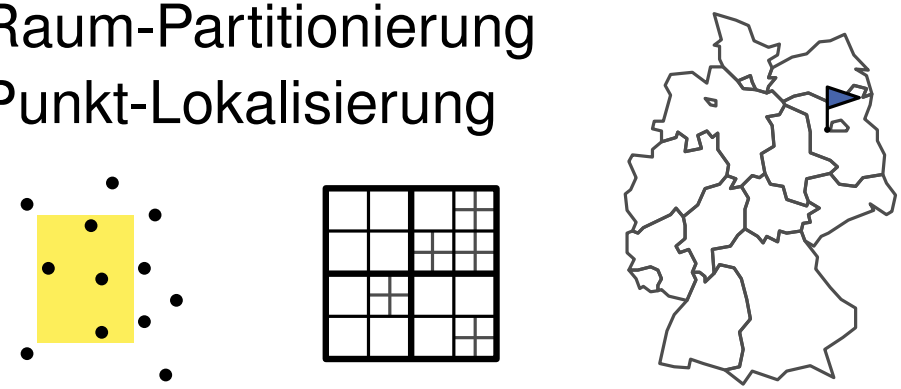
## Basic Toolbox

- konvexe Hülle
- Linienschnitt
- Triangulierung
- Ebenenschnitt



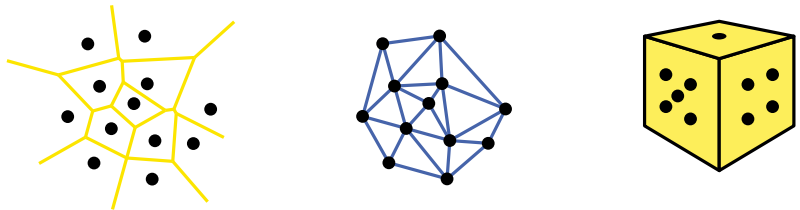
## Geometrische Datenstrukturen

- orthogonal range searching
- Raum-Partitionierung
- Punkt-Lokalisierung



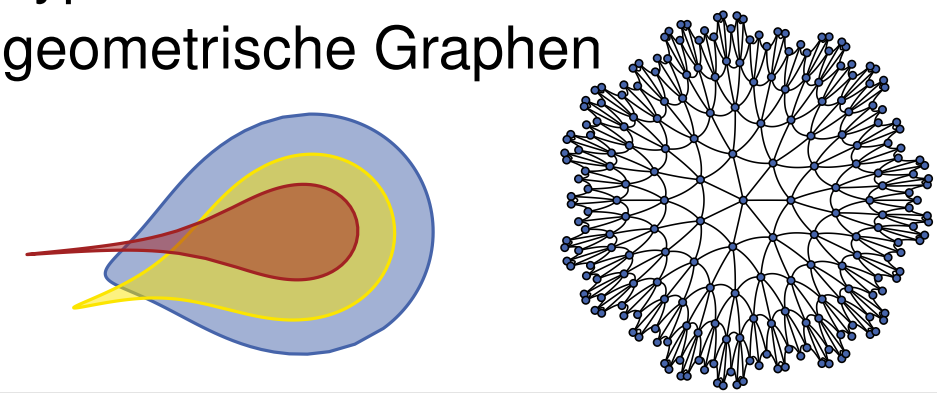
## Erweiterte Toolbox

- Voronoi-Diagramme
- Delaunay-Triangulierung
- Randomisierte Algorithmen
- Komplexität



## Verwandte Themen

- Was ist Geometrie überhaupt?
- hyperbolische Geometrie
- geometrische Graphen

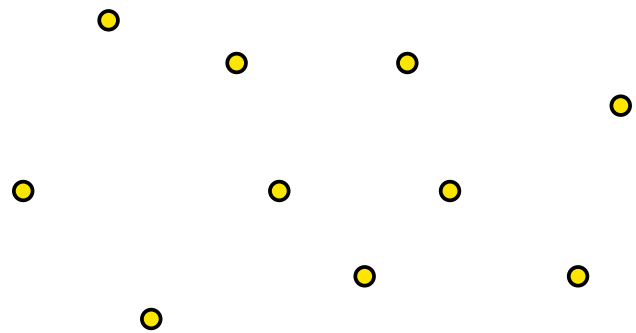


# Wer benutzt welchen Briefkasten?

## Situation

- gegeben: Menge $S$ von Standorten
- Welche Punkte liegen am nächsten zu welchem Standort?

(bei Euklidischer Metrik)

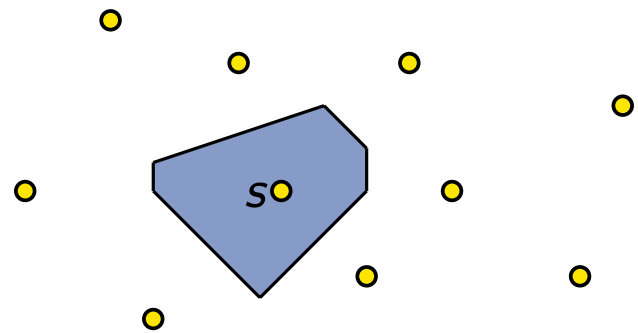


# Wer benutzt welchen Briefkasten?

## Situation

- gegeben: Menge $S$ von Standorten
- Welche Punkte liegen am nächsten zu welchem Standort?

(bei Euklidischer Metrik)




## Voronoi-Diagramm

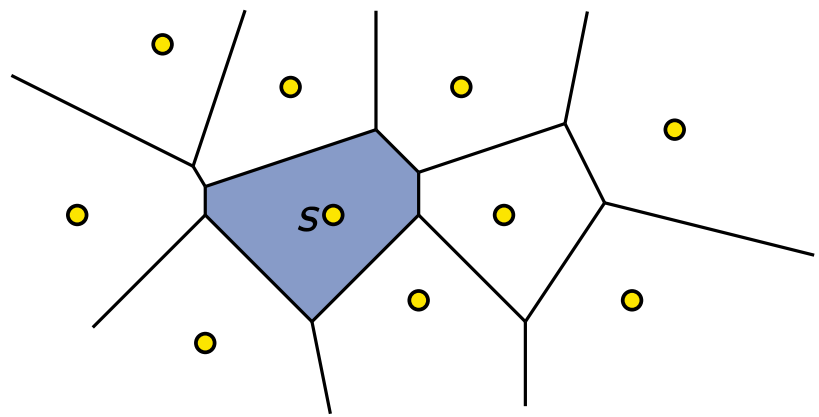
- **Voronoi-Zelle $\mathcal{V}(s)$ von $s \in S$:** Menge der Punkte mit min. Abstand zu $s$

# Wer benutzt welchen Briefkasten?

## Situation

- gegeben: Menge $S$ von Standorten
- Welche Punkte liegen am nächsten zu welchem Standort?

(bei Euklidischer Metrik)




## Voronoi-Diagramm

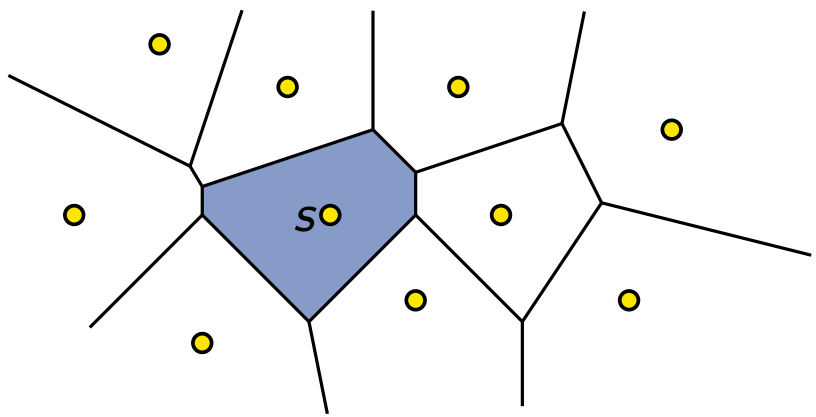
- **Voronoi-Zelle $\mathcal{V}(s)$ von $s \in S$:** Menge der Punkte mit min. Abstand zu $s$
- Vereinigung aller Zellen ist das **Voronoi-Diagramm** $\mathrm{Vor}(S)$

# Wer benutzt welchen Briefkasten?

## Situation

- gegeben: Menge $S$ von Standorten
- Welche Punkte liegen am nächsten zu welchem Standort?

(bei Euklidischer Metrik)




## Voronoi-Diagramm

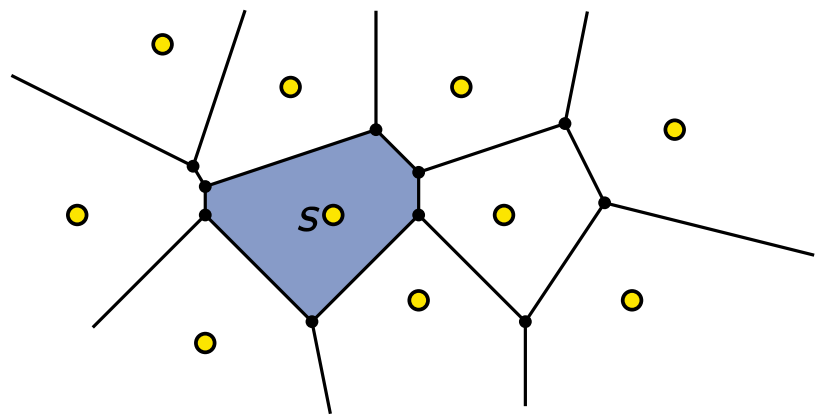
- **Voronoi-Zelle $\mathcal{V}(s)$ von $s \in S$:** Menge der Punkte mit min. Abstand zu $s$
- Vereinigung aller Zellen ist das **Voronoi-Diagramm** $\mathrm{Vor}(S)$
- planare Unterteilung der Ebene

# Wer benutzt welchen Briefkasten?

## Situation

- gegeben: Menge $S$ von Standorten
- Welche Punkte liegen am nächsten zu welchem Standort?

(bei Euklidischer Metrik)




## Voronoi-Diagramm

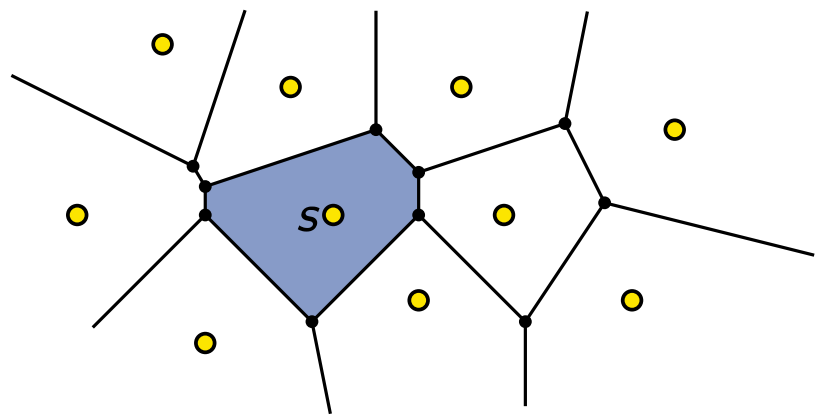
- **Voronoi-Zelle $\mathcal{V}(s)$ von $s \in S$:** Menge der Punkte mit min. Abstand zu $s$
- Vereinigung aller Zellen ist das **Voronoi-Diagramm** $\mathrm{Vor}(S)$
- planare Unterteilung der Ebene
- Begrenzungslinien zwischen Zellen nennen wir **Kanten**
- Endpunkte der Kanten sind **Knoten**

# Wer benutzt welchen Briefkasten?

## Situation

- gegeben: Menge $S$ von Standorten
- Welche Punkte liegen am nächsten zu welchem Standort?

(bei Euklidischer Metrik)

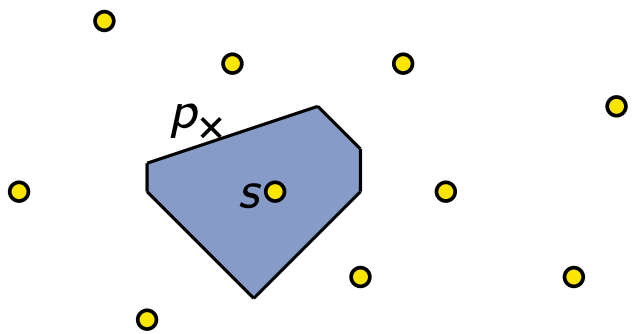



## Voronoi-Diagramm

- **Voronoi-Zelle $\mathcal{V}(s)$ von $s \in S$:** Menge der Punkte mit min. Abstand zu $s$
- Vereinigung aller Zellen ist das **Voronoi-Diagramm** $\mathrm{Vor}(S)$
- planare Unterteilung der Ebene
- Begrenzungslinien zwischen Zellen nennen wir **Kanten**
- Endpunkte der Kanten sind **Knoten**

**Ziel für heute:** berechne $\mathrm{Vor}(S)$

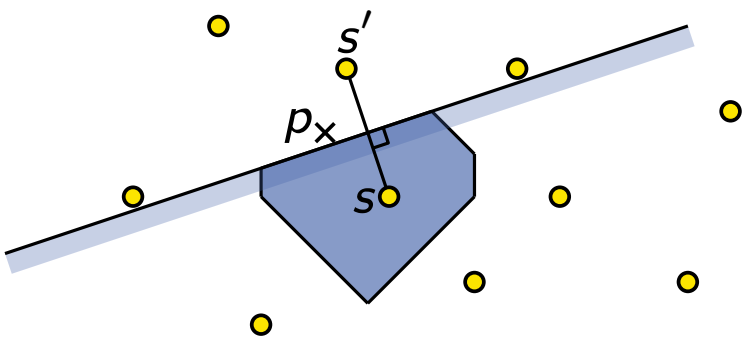
# Grundlegende Eigenschaften




**Punkte in der Zelle von $s$**

- Warum liegt $p$ nicht in der Zelle von $s$?

# Grundlegende Eigenschaften

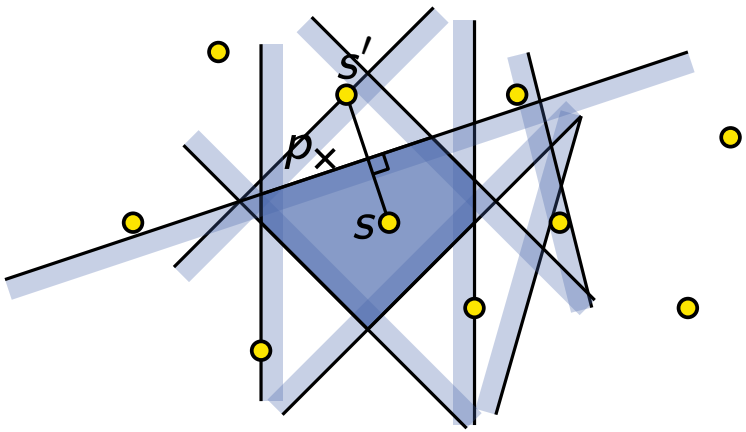



## Punkte in der Zelle von $s$

- Warum liegt $p$ nicht in der Zelle von $s$?
- $s'$ ist näher an $p \Leftrightarrow s \perp s'$ trennt $s$ von $p$

  Mittelsenkrechte von $s$ und $s'$

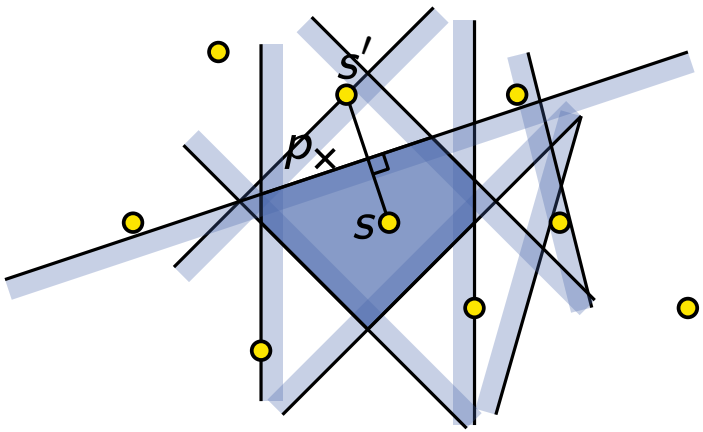
# Grundlegende Eigenschaften




**Punkte in der Zelle von $s$**

- Warum liegt $p$ nicht in der Zelle von $s$?
- $s'$ ist näher an $p \Leftrightarrow s \perp s'$ trennt $s$ von $p$
- die Zelle von $s$ ist der Schnitt von Halbebenen

# Grundlegende Eigenschaften

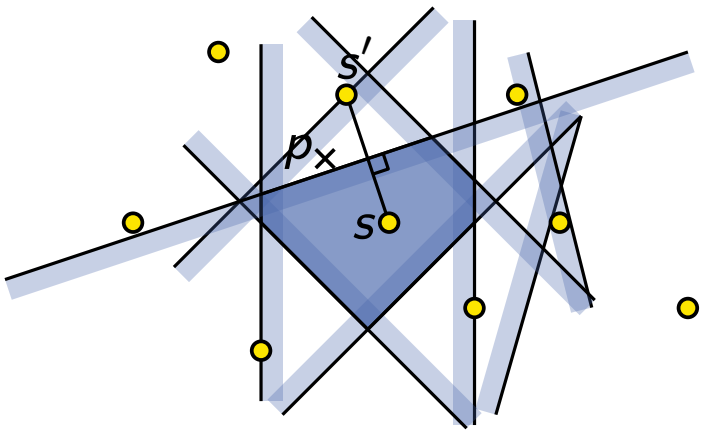



## Punkte in der Zelle von $s$

- Warum liegt $p$ nicht in der Zelle von $s$?
- $s'$ ist näher an $p \Leftrightarrow s \perp s'$ trennt $s$ von $p$
- die Zelle von $s$ ist der Schnitt von Halbebenen
- damit haben wir einen (langsamen) Algorithmus

Wie langsam genau?

# Grundlegende Eigenschaften



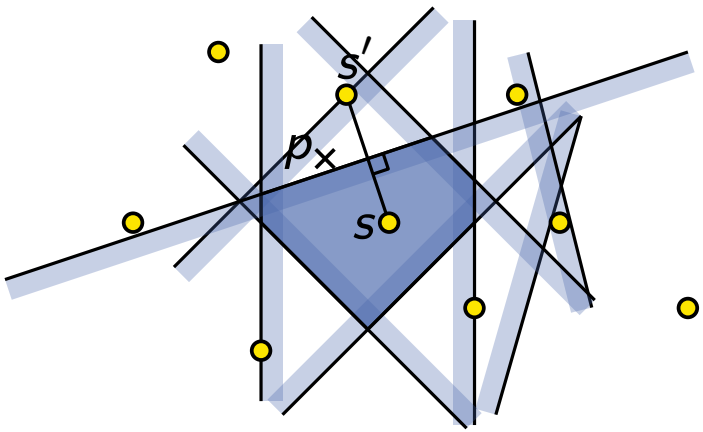

## Punkte in der Zelle von $s$

- Warum liegt $p$ nicht in der Zelle von $s$?
- $s'$ ist näher an $p \Leftrightarrow s \perp s'$ trennt $s$ von $p$
- die Zelle von $s$ ist der Schnitt von Halbebenen
- damit haben wir einen (langsamen) Algorithmus

Wie langsam genau?

## Zusammenhang

# Grundlegende Eigenschaften




## Punkte in der Zelle von $s$

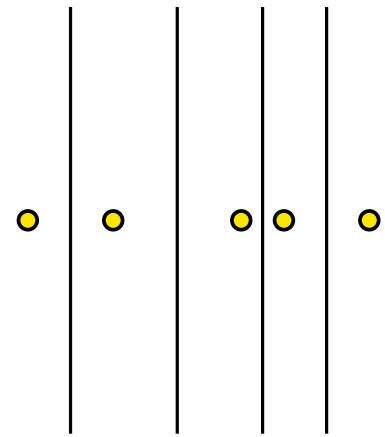
- Warum liegt $p$ nicht in der Zelle von $s$?
- $s'$ ist näher an $p \Leftrightarrow s \perp s'$ trennt $s$ von $p$
- die Zelle von $s$ ist der Schnitt von Halbebenen
- damit haben wir einen (langsamen) Algorithmus

Wie langsam genau?

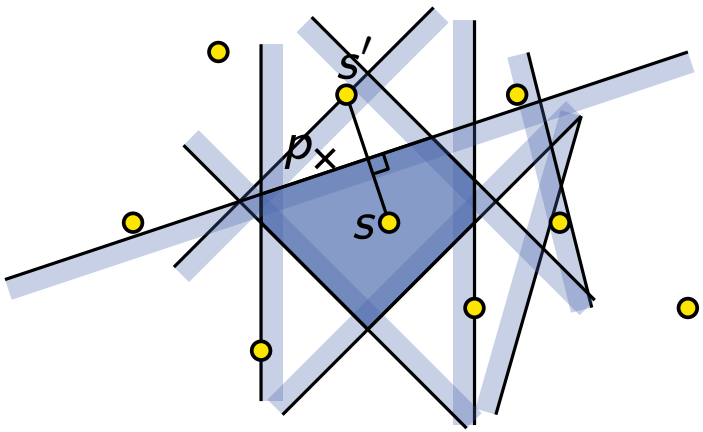
## Zusammenhang

- wenn nicht alle Punkte Kollinear sind, dann ist $\mathrm{Vor}(S)$ zusammenhängend

  ($\mathrm{Vor}(S)$ bezieht sich hier auf die Vereinigung aller Kanten, also quasi den „Graphen“)



# Grundlegende Eigenschaften



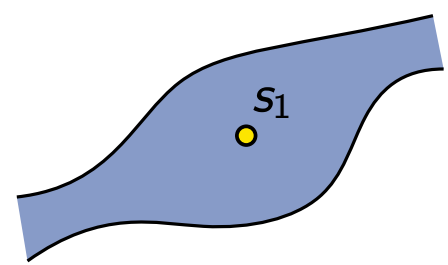

## Punkte in der Zelle von $s$

- Warum liegt $p$ nicht in der Zelle von $s$?
- $s'$ ist näher an $p \Leftrightarrow s \perp s'$ trennt $s$ von $p$
- die Zelle von $s$ ist der Schnitt von Halbebenen
- damit haben wir einen (langsamen) Algorithmus

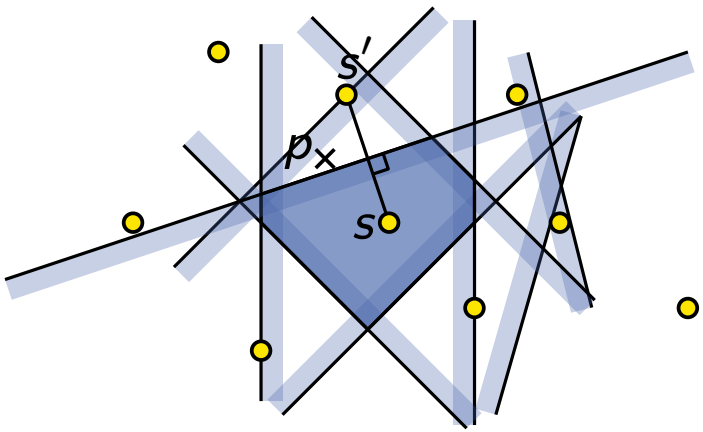
Wie langsam genau?

## Zusammenhang

- wenn nicht alle Punkte Kollinear sind, dann ist $\mathrm{Vor}(S)$ zusammenhängend
  ($\mathrm{Vor}(S)$ bezieht sich hier auf die Vereinigung aller Kanten, also quasi den „Graphen“)
- Beweisidee: nimm an, es wäre unzusammenhängend
  - $\Rightarrow$ es gibt $s_1 \in S$, sodass $\mathcal{V}(s_1)$ die Ebene zerteilt



# Grundlegende Eigenschaften



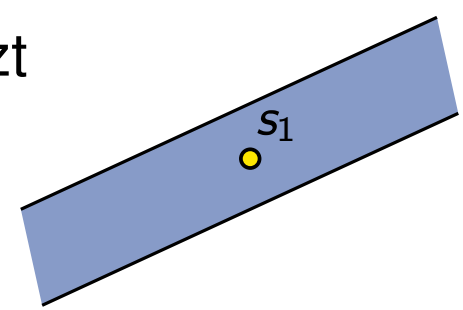

## Punkte in der Zelle von $s$

- Warum liegt $p$ nicht in der Zelle von $s$?
- $s'$ ist näher an $p \Leftrightarrow s \perp s'$ trennt $s$ von $p$
- die Zelle von $s$ ist der Schnitt von Halbebenen
- damit haben wir einen (langsamen) Algorithmus

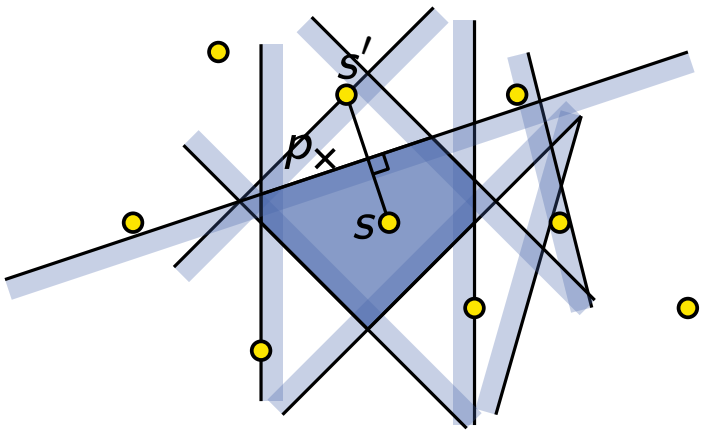
Wie langsam genau?

## Zusammenhang

- wenn nicht alle Punkte Kollinear sind, dann ist $\mathrm{Vor}(S)$ zusammenhängend
  ($\mathrm{Vor}(S)$ bezieht sich hier auf die Vereinigung aller Kanten, also quasi den „Graphen“)
- Beweisidee: nimm an, es wäre unzusammenhängend
  - $\Rightarrow$ es gibt $s_1 \in S$, sodass $\mathcal{V}(s_1)$ die Ebene zerteilt
  - $\mathcal{V}(s_1)$ konvex $\Rightarrow$ von zwei parallele Geraden begrenzt



# Grundlegende Eigenschaften



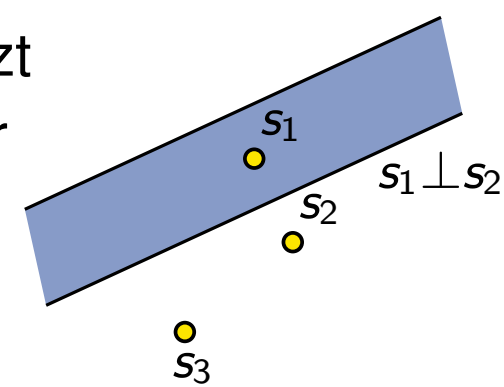

## Punkte in der Zelle von $s$

- Warum liegt $p$ nicht in der Zelle von $s$?
- $s'$ ist näher an $p \Leftrightarrow s \perp s'$ trennt $s$ von $p$
- die Zelle von $s$ ist der Schnitt von Halbebenen
- damit haben wir einen (langsamen) Algorithmus

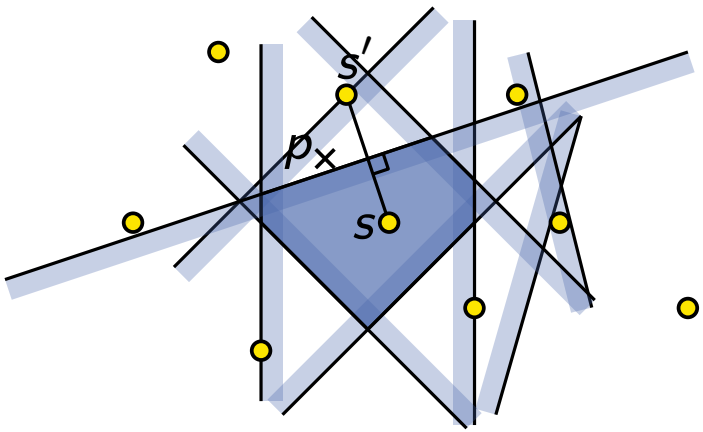
Wie langsam genau?

## Zusammenhang

- wenn nicht alle Punkte Kollinear sind, dann ist $\mathrm{Vor}(S)$ zusammenhängend
  ($\mathrm{Vor}(S)$ bezieht sich hier auf die Vereinigung aller Kanten, also quasi den „Graphen“)
- Beweisidee: nimm an, es wäre unzusammenhängend
  - $\Rightarrow$ es gibt $s_1 \in S$, sodass $\mathcal{V}(s_1)$ die Ebene zerteilt
  - $\mathcal{V}(s_1)$ konvex $\Rightarrow$ von zwei parallele Geraden begrenzt
  - sei $s_1 \perp s_2$ eine der Geraden und sei $s_3$ nicht-kollinear



# Grundlegende Eigenschaften



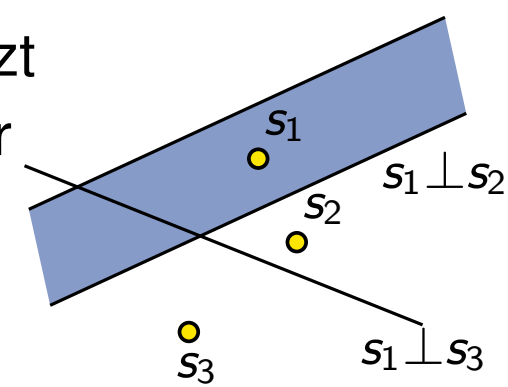

## Punkte in der Zelle von $s$

- Warum liegt $p$ nicht in der Zelle von $s$?
- $s'$ ist näher an $p \Leftrightarrow s \perp s'$ trennt $s$ von $p$
- die Zelle von $s$ ist der Schnitt von Halbebenen
- damit haben wir einen (langsamen) Algorithmus

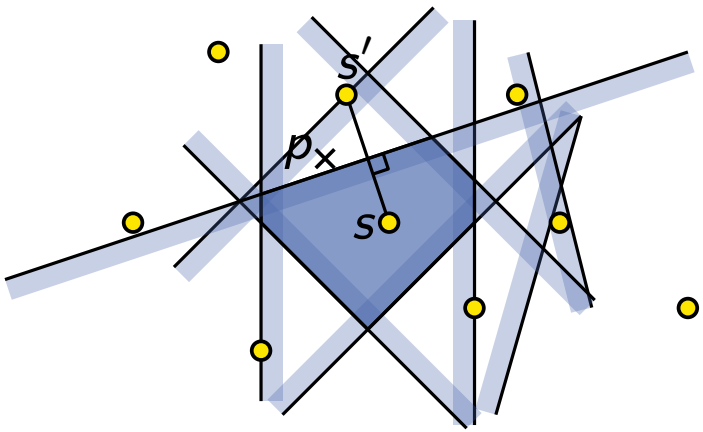
Wie langsam genau?

## Zusammenhang

- wenn nicht alle Punkte Kollinear sind, dann ist $\mathrm{Vor}(S)$ zusammenhängend
  ($\mathrm{Vor}(S)$ bezieht sich hier auf die Vereinigung aller Kanten, also quasi den „Graphen“)
- Beweisidee: nimm an, es wäre unzusammenhängend
  - $\Rightarrow$ es gibt $s_1 \in S$, sodass $\mathcal{V}(s_1)$ die Ebene zerteilt
  - $\mathcal{V}(s_1)$ konvex $\Rightarrow$ von zwei parallele Geraden begrenzt
  - sei $s_1 \perp s_2$ eine der Geraden und sei $s_3$ nicht-kollinear
  - $\Rightarrow$ $s_1 \perp s_2$ schneidet $s_1 \perp s_3$



# Grundlegende Eigenschaften



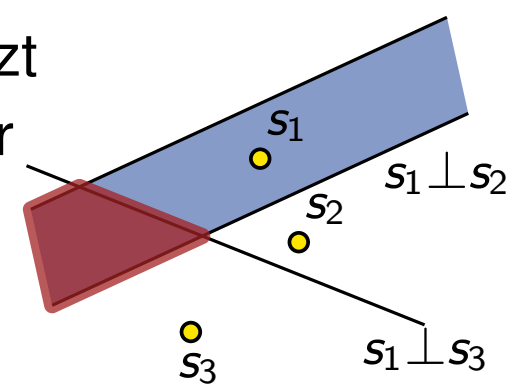

## Punkte in der Zelle von $s$

- Warum liegt $p$ nicht in der Zelle von $s$?
- $s'$ ist näher an $p \Leftrightarrow s \perp s'$ trennt $s$ von $p$
- die Zelle von $s$ ist der Schnitt von Halbebenen
- damit haben wir einen (langsamen) Algorithmus

Wie langsam genau?

## Zusammenhang

- wenn nicht alle Punkte Kollinear sind, dann ist $\mathrm{Vor}(S)$ zusammenhängend
  ($\mathrm{Vor}(S)$ bezieht sich hier auf die Vereinigung aller Kanten, also quasi den „Graphen“)
- Beweisidee: nimm an, es wäre unzusammenhängend
  - $\Rightarrow$ es gibt $s_1 \in S$, sodass $\mathcal{V}(s_1)$ die Ebene zerteilt
  - $\mathcal{V}(s_1)$ konvex $\Rightarrow$ von zwei parallele Geraden begrenzt
  - sei $s_1 \perp s_2$ eine der Geraden und sei $s_3$ nicht-kollinear
  - $\Rightarrow$ $s_1 \perp s_2$ schneidet $s_1 \perp s_3$
  - $\Rightarrow$ Widerspruch



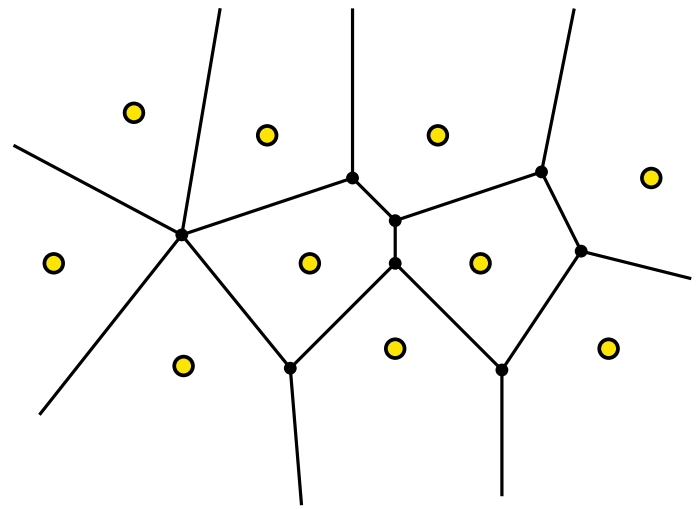
# Grundlegende Eigenschaften (2)

**Theorem** **(Beweis: Übung)**
Für $n \geq 3$ Standorte hat das Voronoi-Diagramm maximal $2n - 5$ Knoten und maximal $3n - 6$ Kanten.

# Grundlegende Eigenschaften (2)

**Theorem** **(Beweis: Übung)**
Für $n \geq 3$ Standorte hat das Voronoi-Diagramm maximal $2n - 5$ Knoten und maximal $3n - 6$ Kanten.

**Welche Punkte sind Knoten von $\mathrm{Vor}(S)$?**

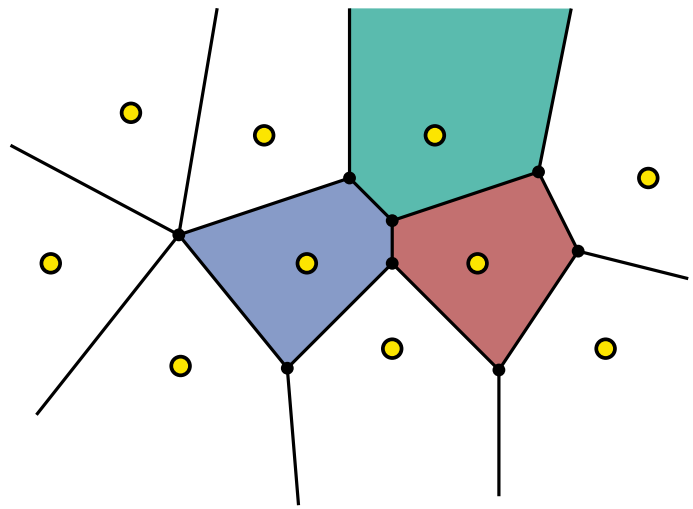


# Grundlegende Eigenschaften (2)

**Theorem** **(Beweis: Übung)**
Für $n \geq 3$ Standorte hat das Voronoi-Diagramm maximal $2n - 5$ Knoten und maximal $3n - 6$ Kanten.

**Welche Punkte sind Knoten von Vor($S$)?**

- an einem Knoten $v$ treffen sich $\geq$ drei Zellen

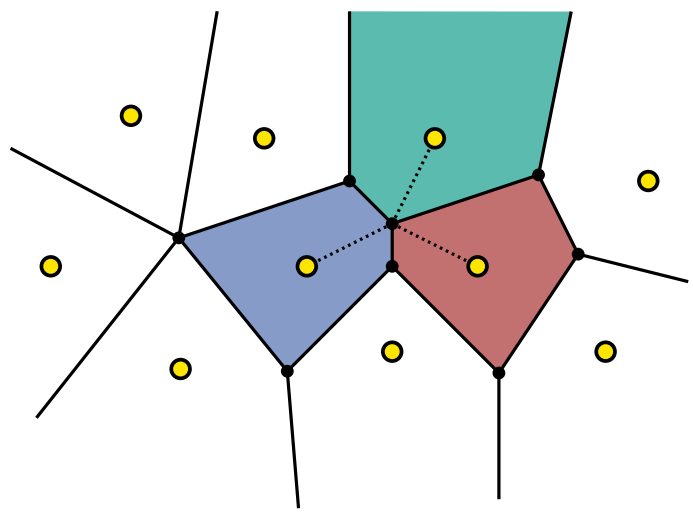


# Grundlegende Eigenschaften (2)

**Theorem** **(Beweis: Übung)**
Für $n \geq 3$ Standorte hat das Voronoi-Diagramm maximal $2n - 5$ Knoten und maximal $3n - 6$ Kanten.

**Welche Punkte sind Knoten von Vor($S$)?**

- an einem Knoten $v$ treffen sich $\geq$ drei Zellen
- $v$ hat gleichen Abstand von den Standorten

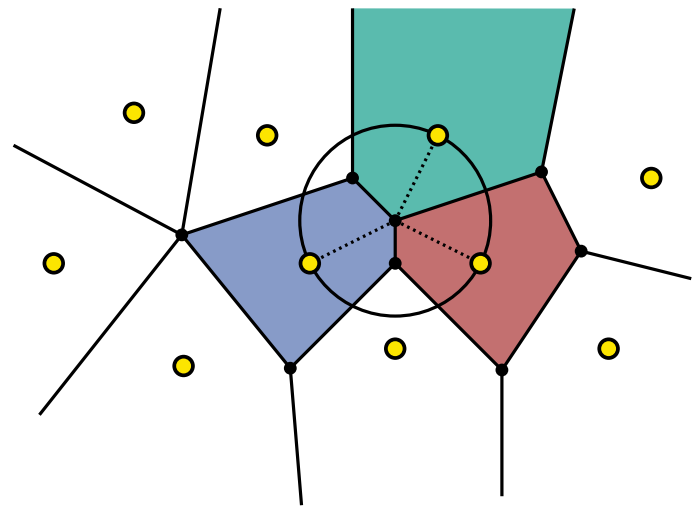


# Grundlegende Eigenschaften (2)

**Theorem** **(Beweis: Übung)**
Für $n \geq 3$ Standorte hat das Voronoi-Diagramm maximal $2n - 5$ Knoten und maximal $3n - 6$ Kanten.

**Welche Punkte sind Knoten von Vor($S$)?**

- an einem Knoten $v$ treffen sich $\geq$ drei Zellen
- $v$ hat gleichen Abstand von den Standorten
  $\Rightarrow$ Kreis mit Zentrum $v$

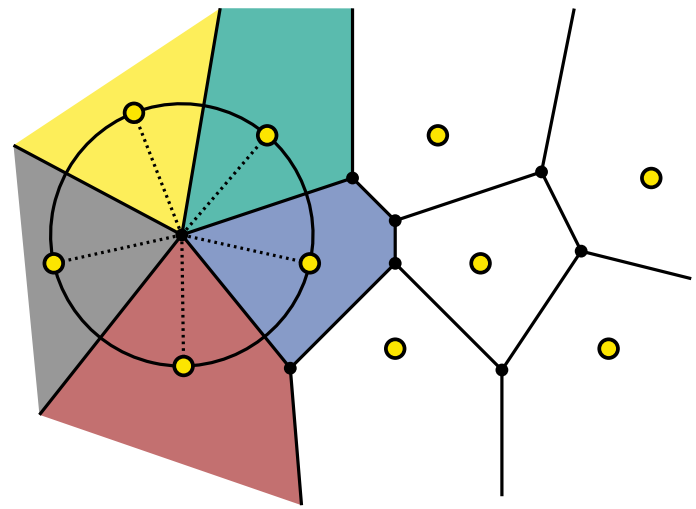


# Grundlegende Eigenschaften (2)

**Theorem** **(Beweis: Übung)**
Für $n \geq 3$ Standorte hat das Voronoi-Diagramm maximal $2n - 5$ Knoten und maximal $3n - 6$ Kanten.

**Welche Punkte sind Knoten von Vor($S$)?**

- an einem Knoten $v$ treffen sich $\geq$ drei Zellen
- $v$ hat gleichen Abstand von den Standorten
  $\Rightarrow$ Kreis mit Zentrum $v$

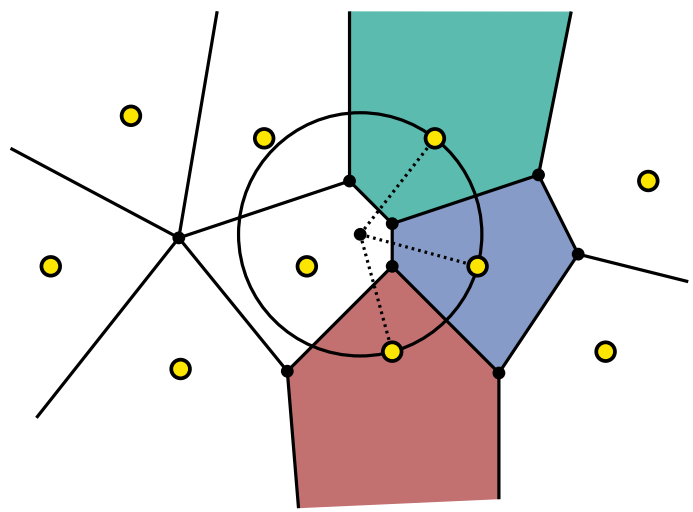


# Grundlegende Eigenschaften (2)

**Theorem** **(Beweis: Übung)**
Für $n \geq 3$ Standorte hat das Voronoi-Diagramm maximal $2n - 5$ Knoten und maximal $3n - 6$ Kanten.

**Welche Punkte sind Knoten von Vor($S$)?**

- an einem Knoten $v$ treffen sich $\geq$ drei Zellen
- $v$ hat gleichen Abstand von den Standorten
  $\Rightarrow$ Kreis mit Zentrum $v$
- nicht jeder Kreis durch $\geq 3$ Standorte hat einen Knoten als Mittelpunkt

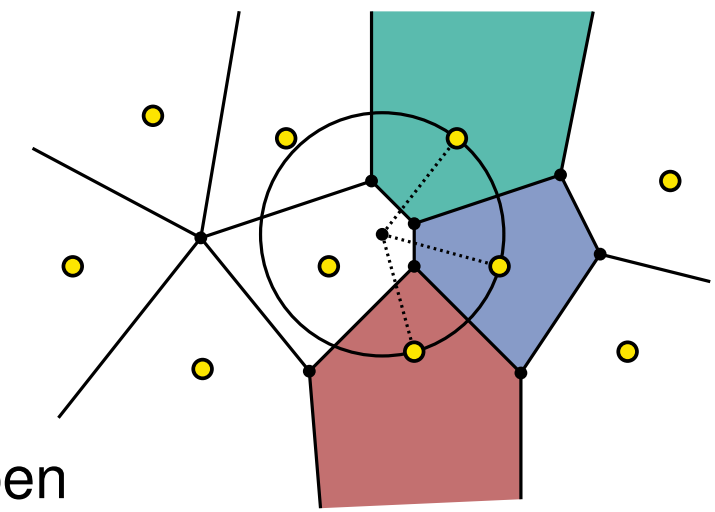


# Grundlegende Eigenschaften (2)

**Theorem** **(Beweis: Übung)**
Für $n \geq 3$ Standorte hat das Voronoi-Diagramm maximal $2n - 5$ Knoten und maximal $3n - 6$ Kanten.

**Welche Punkte sind Knoten von Vor($S$)?**

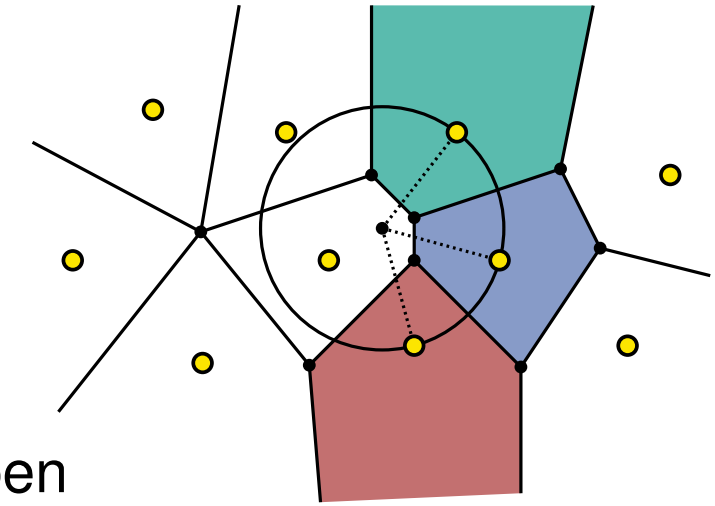
- an einem Knoten $v$ treffen sich $\geq$ drei Zellen
- $v$ hat gleichen Abstand von den Standorten
  $\Rightarrow$ Kreis mit Zentrum $v$
- nicht jeder Kreis durch $\geq 3$ Standorte hat einen Knoten als Mittelpunkt
- der Kreis darf keinen Standort im Inneren haben



# Grundlegende Eigenschaften (2)

**Theorem** **(Beweis: Übung)**
Für $n \geq 3$ Standorte hat das Voronoi-Diagramm maximal $2n - 5$ Knoten und maximal $3n - 6$ Kanten.

**Welche Punkte sind Knoten von Vor($S$)?**

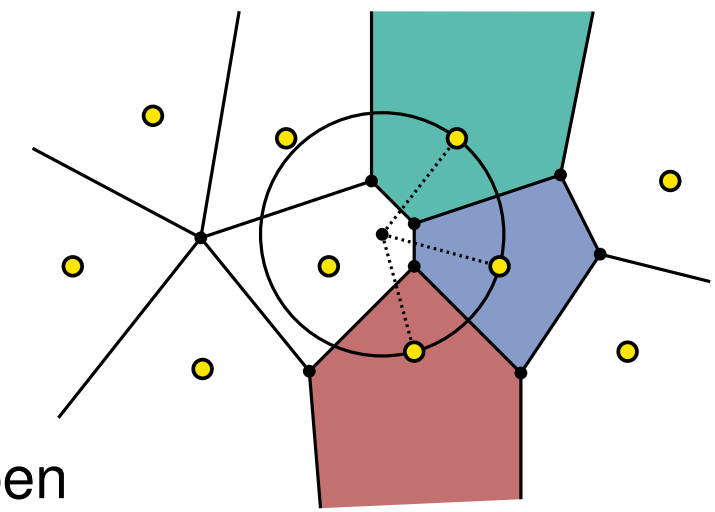


- an einem Knoten $v$ treffen sich $\geq$ drei Zellen
- $v$ hat gleichen Abstand von den Standorten
  $\Rightarrow$ Kreis mit Zentrum $v$
- nicht jeder Kreis durch $\geq 3$ Standorte hat einen Knoten als Mittelpunkt
- der Kreis darf keinen Standort im Inneren haben
- $C_S(p) =$ größter Kreis um $p$, der keinen Standort aus $S$ im Inneren enthält

# Grundlegende Eigenschaften (2)

**Theorem** **(Beweis: Übung)**
Für $n \geq 3$ Standorte hat das Voronoi-Diagramm maximal $2n - 5$ Knoten und maximal $3n - 6$ Kanten.

**Welche Punkte sind Knoten von Vor($S$)?**



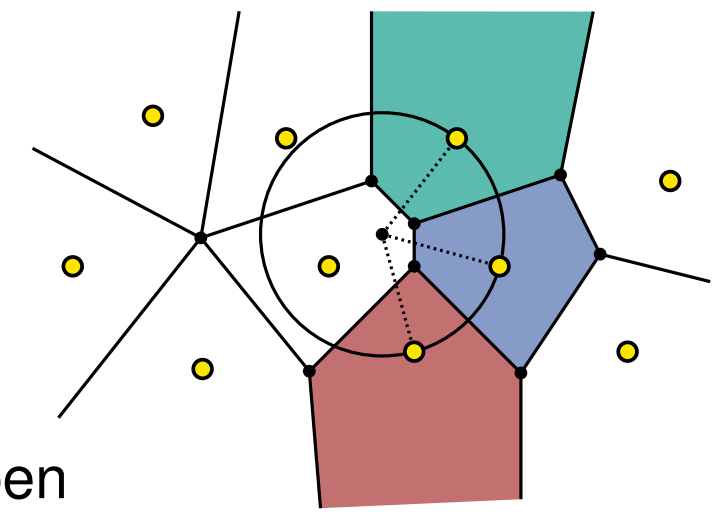
- an einem Knoten $v$ treffen sich $\geq$ drei Zellen
- $v$ hat gleichen Abstand von den Standorten
  $\Rightarrow$ Kreis mit Zentrum $v$
- nicht jeder Kreis durch $\geq 3$ Standorte hat einen Knoten als Mittelpunkt
- der Kreis darf keinen Standort im Inneren haben
- $C_S(p) =$ größter Kreis um $p$, der keinen Standort aus $S$ im Inneren enthält

**Theorem** **(Knoten des Voronoi-Diagramms)**
Der Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ ist ein Knoten von $\mathrm{Vor}(S)$ genau dann wenn auf dem Rand von $C_S(p)$ mindestens drei Standorte liegen.

# Grundlegende Eigenschaften (2)

**Theorem** **(Beweis: Übung)**
Für $n \geq 3$ Standorte hat das Voronoi-Diagramm maximal $2n - 5$ Knoten und maximal $3n - 6$ Kanten.

**Welche Punkte sind Knoten von Vor($S$)?**

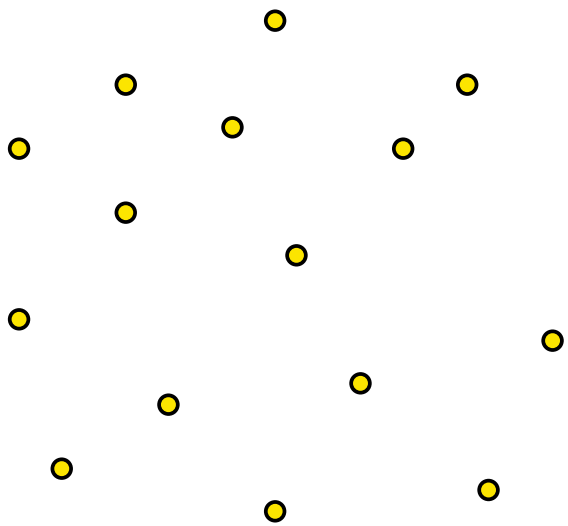


- an einem Knoten $v$ treffen sich $\geq$ drei Zellen
- $v$ hat gleichen Abstand von den Standorten
  $\Rightarrow$ Kreis mit Zentrum $v$
- nicht jeder Kreis durch $\geq 3$ Standorte hat einen Knoten als Mittelpunkt
- der Kreis darf keinen Standort im Inneren haben
- $C_S(p) =$ größter Kreis um $p$, der keinen Standort aus $S$ im Inneren enthält

**Theorem** **(Knoten des Voronoi-Diagramms)**
Der Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ ist ein Knoten von $\mathrm{Vor}(S)$ genau dann wenn auf dem Rand von $C_S(p)$ mindestens drei Standorte liegen.

Welche analoge Aussage gilt für Kanten?

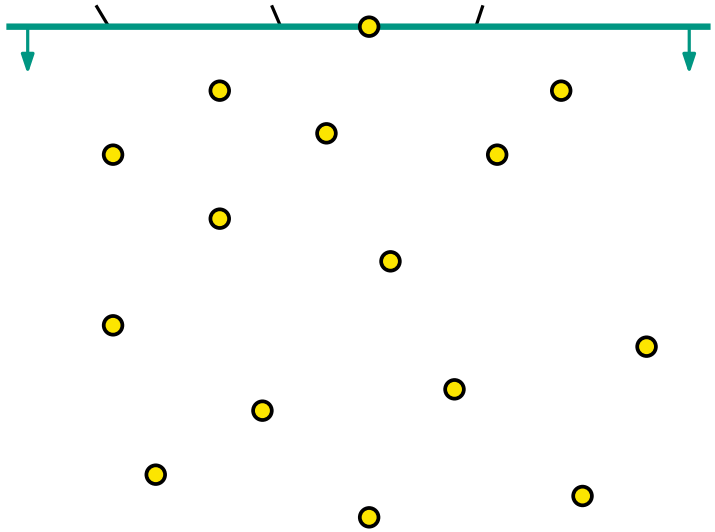
# Sweep-Line Algo



## Grundsätzlicher Ansatz: Sweep-Line

- schiebe Sweep-Line von oben nach unten
- zu jedem Zeitpunkt: kenne $\mathrm{Vor}(S)$ für die Halbebene über der Sweep-Line

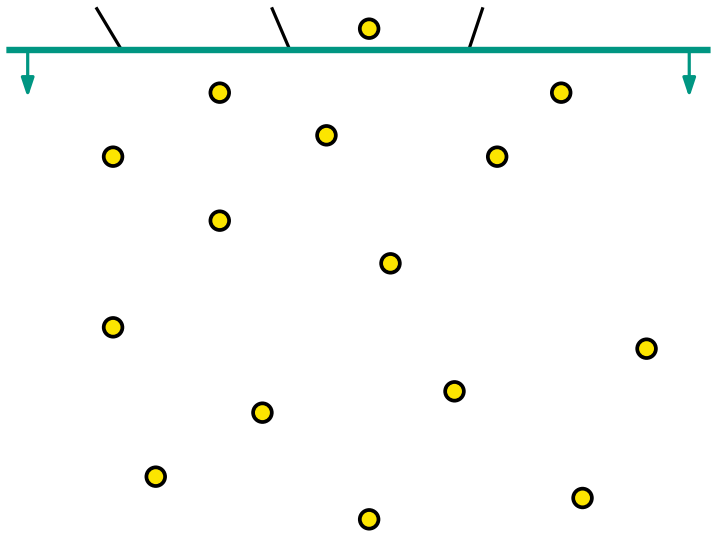
# Sweep-Line Algo



## Grundsätzlicher Ansatz: Sweep-Line

- schiebe Sweep-Line von oben nach unten
- zu jedem Zeitpunkt: kenne $\mathrm{Vor}(S)$ für die Halbebene über der Sweep-Line

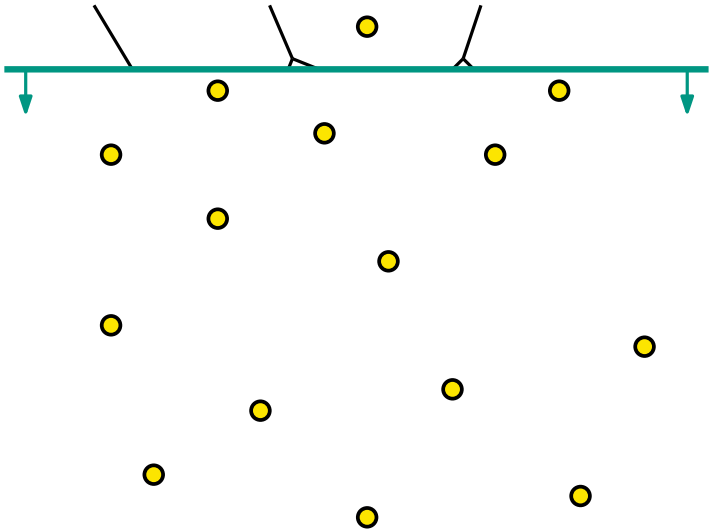
# Sweep-Line Algo



## Grundsätzlicher Ansatz: Sweep-Line

- schiebe Sweep-Line von oben nach unten
- zu jedem Zeitpunkt: kenne $\mathrm{Vor}(S)$ für die Halbebene über der Sweep-Line

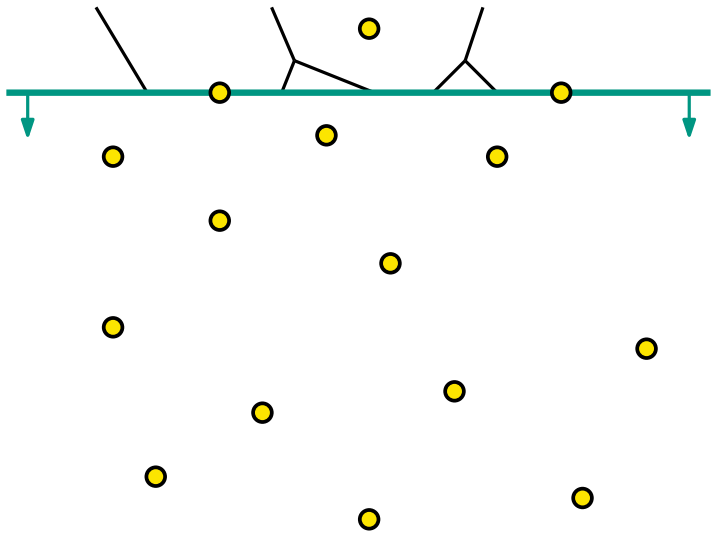
# Sweep-Line Algo



## Grundsätzlicher Ansatz: Sweep-Line

- schiebe Sweep-Line von oben nach unten
- zu jedem Zeitpunkt: kenne $\mathrm{Vor}(S)$ für die Halbebene über der Sweep-Line

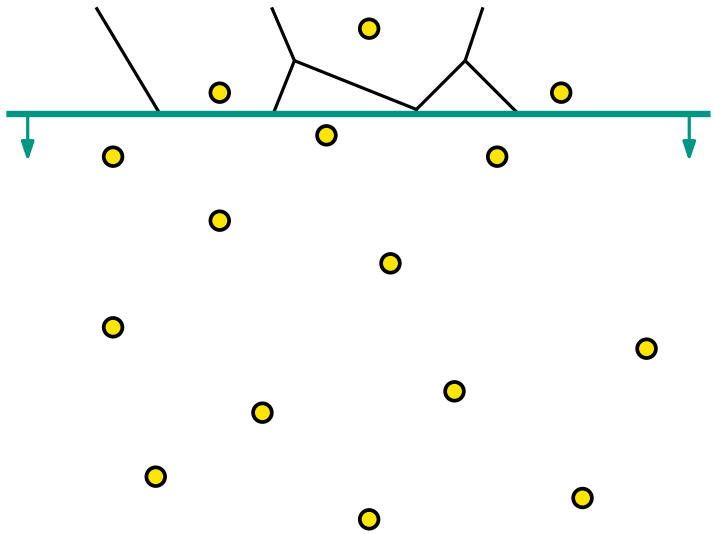
# Sweep-Line Algo



## Grundsätzlicher Ansatz: Sweep-Line

- schiebe Sweep-Line von oben nach unten
- zu jedem Zeitpunkt: kenne $\mathrm{Vor}(S)$ für die Halbebene über der Sweep-Line

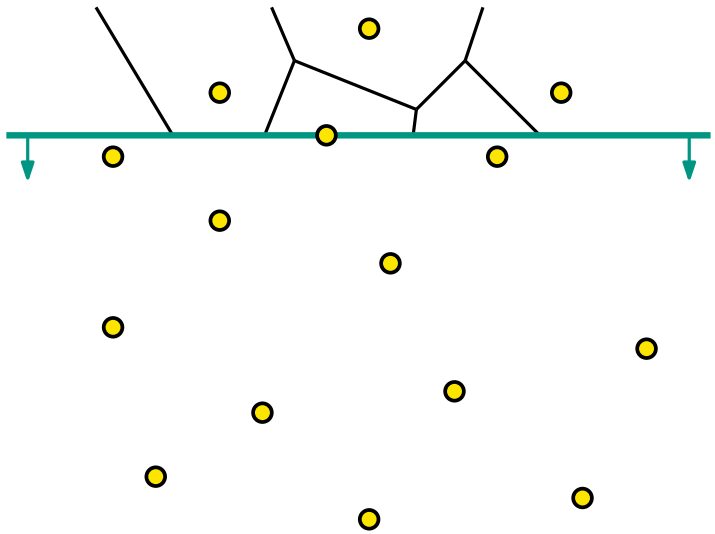
# Sweep-Line Algo



## Grundsätzlicher Ansatz: Sweep-Line

- schiebe Sweep-Line von oben nach unten
- zu jedem Zeitpunkt: kenne $\mathrm{Vor}(S)$ für die Halbebene über der Sweep-Line

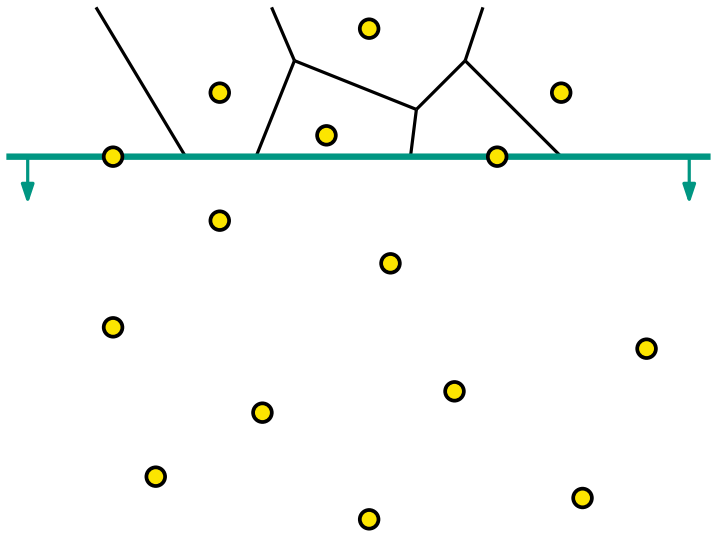
# Sweep-Line Algo



## Grundsätzlicher Ansatz: Sweep-Line

- schiebe Sweep-Line von oben nach unten
- zu jedem Zeitpunkt: kenne $\mathrm{Vor}(S)$ für die Halbebene über der Sweep-Line

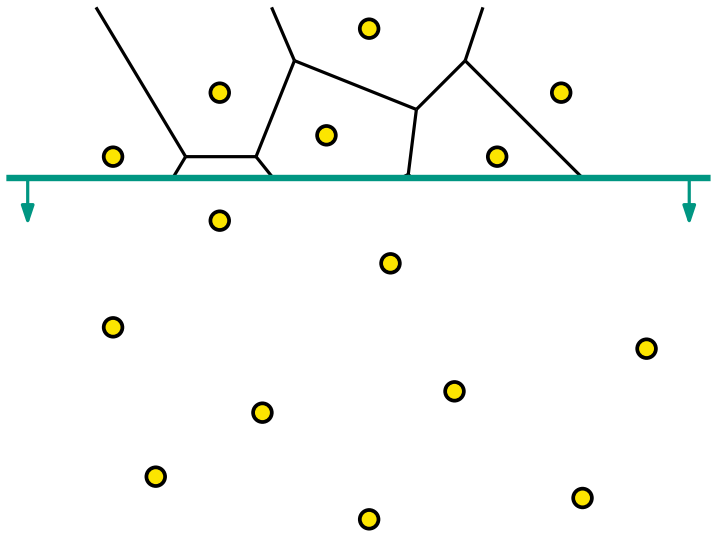
# Sweep-Line Algo



## Grundsätzlicher Ansatz: Sweep-Line

- schiebe Sweep-Line von oben nach unten
- zu jedem Zeitpunkt: kenne $\mathrm{Vor}(S)$ für die Halbebene über der Sweep-Line

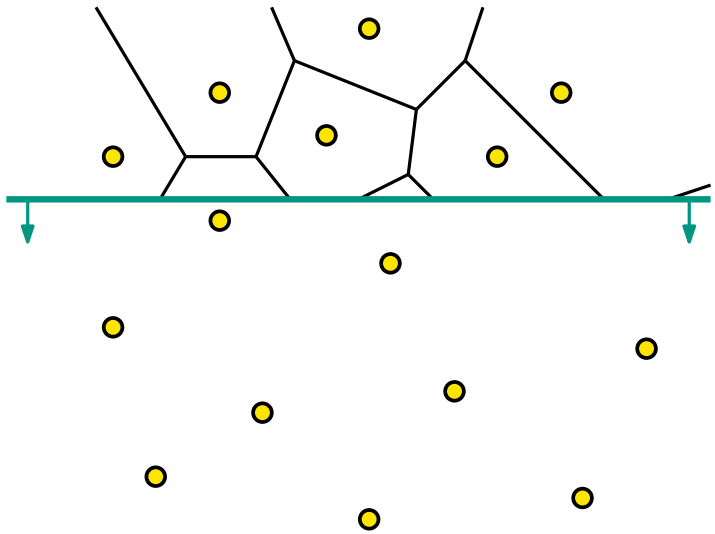
# Sweep-Line Algo



## Grundsätzlicher Ansatz: Sweep-Line

- schiebe Sweep-Line von oben nach unten
- zu jedem Zeitpunkt: kenne $\mathrm{Vor}(S)$ für die Halbebene über der Sweep-Line

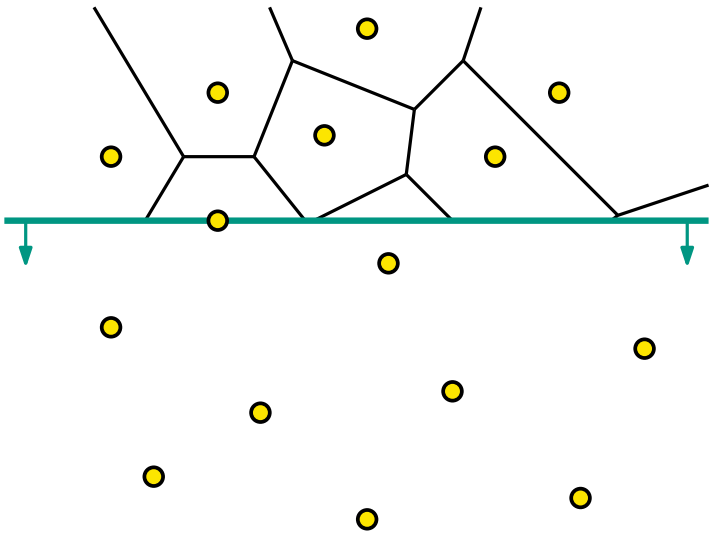
# Sweep-Line Algo



## Grundsätzlicher Ansatz: Sweep-Line

- schiebe Sweep-Line von oben nach unten
- zu jedem Zeitpunkt: kenne $\mathrm{Vor}(S)$ für die Halbebene über der Sweep-Line

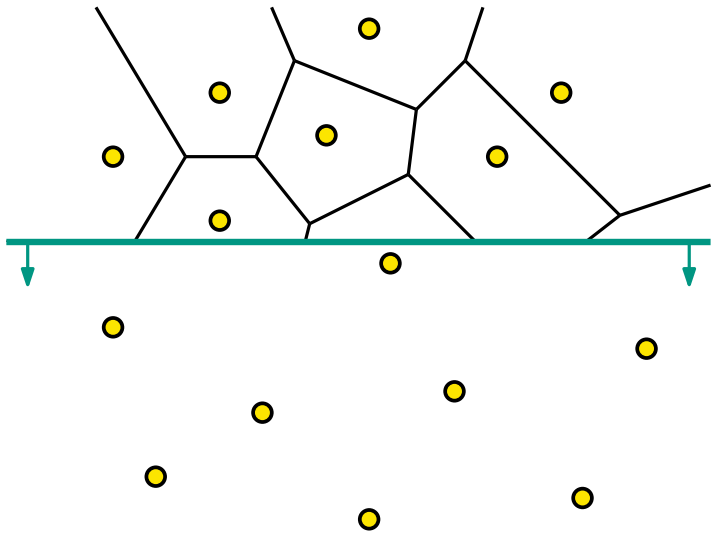
# Sweep-Line Algo



## Grundsätzlicher Ansatz: Sweep-Line

- schiebe Sweep-Line von oben nach unten
- zu jedem Zeitpunkt: kenne $\mathrm{Vor}(S)$ für die Halbebene über der Sweep-Line

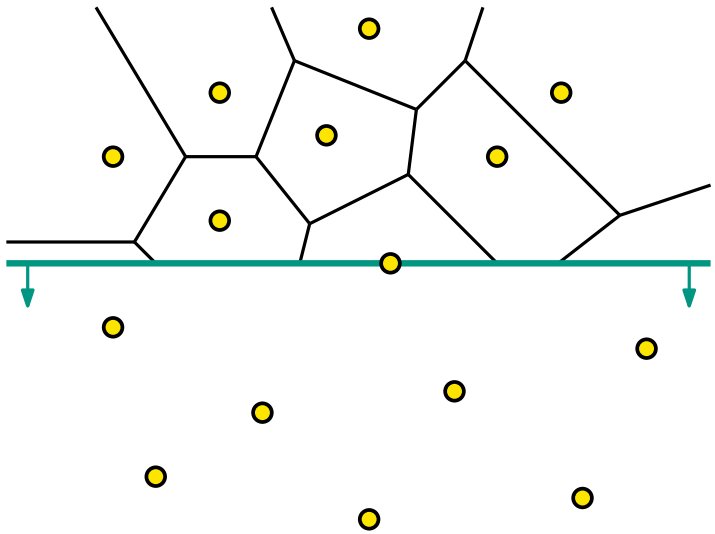
# Sweep-Line Algo



## Grundsätzlicher Ansatz: Sweep-Line

- schiebe Sweep-Line von oben nach unten
- zu jedem Zeitpunkt: kenne $\mathrm{Vor}(S)$ für die Halbebene über der Sweep-Line

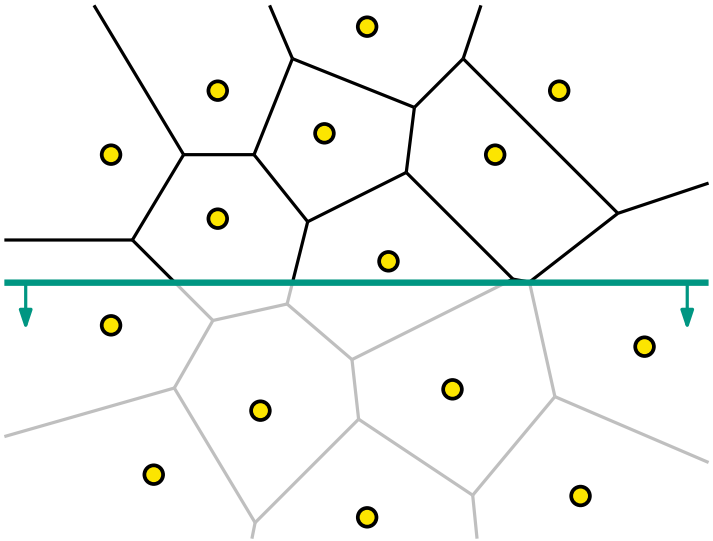
# Sweep-Line Algo



## Grundsätzlicher Ansatz: Sweep-Line

- schiebe Sweep-Line von oben nach unten
- zu jedem Zeitpunkt: kenne $\mathrm{Vor}(S)$ für die Halbebene über der Sweep-Line

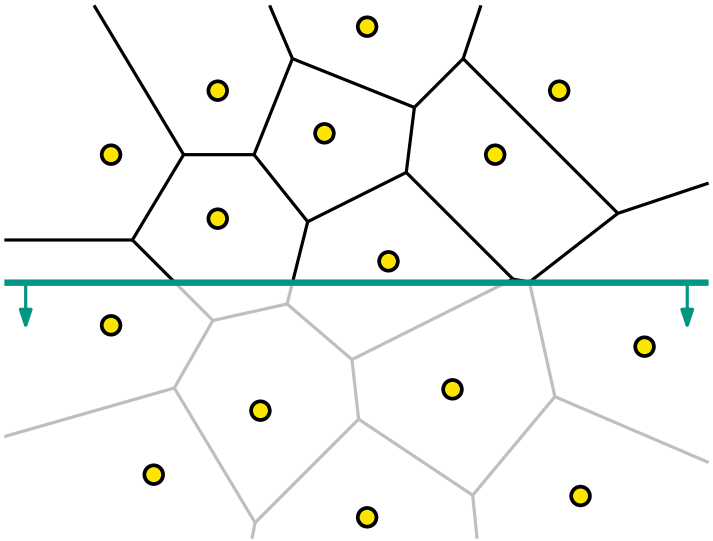
# Sweep-Line Algo



## Grundsätzlicher Ansatz: Sweep-Line

- schiebe Sweep-Line von oben nach unten
- zu jedem Zeitpunkt: kenne $\mathrm{Vor}(S)$ für die Halbebene über der Sweep-Line

# Sweep-Line Algo

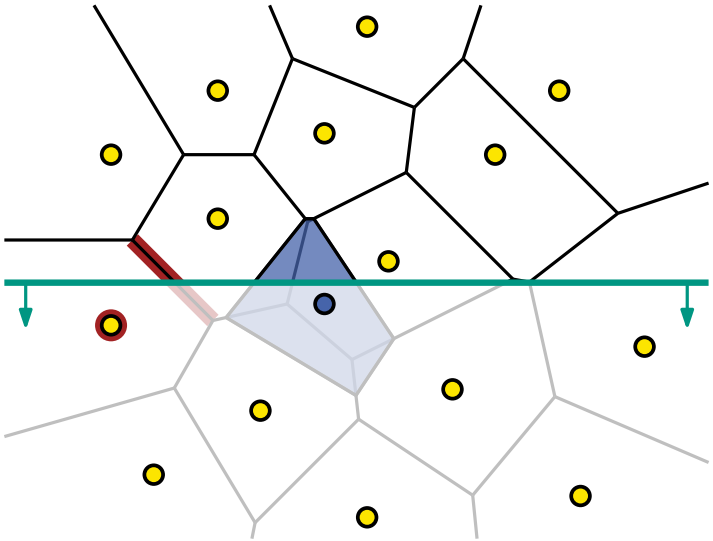


## Grundsätzlicher Ansatz: Sweep-Line

- schiebe Sweep-Line von oben nach unten
- zu jedem Zeitpunkt: kenne $\mathrm{Vor}(S)$ für die Halbebene über der Sweep-Line

## Problem

# Sweep-Line Algo



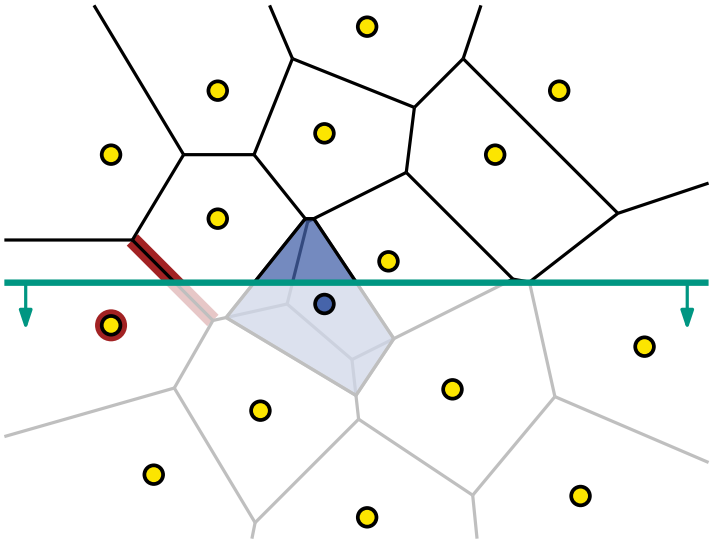
## Grundsätzlicher Ansatz: Sweep-Line

- schiebe Sweep-Line von oben nach unten
- zu jedem Zeitpunkt: kenne $\mathrm{Vor}(S)$ für die Halbebene über der Sweep-Line

## Problem

- der Teil oberhalb der Sweep-Line hängen von Standorten unterhalb der Sweep-Line ab

# Sweep-Line Algo



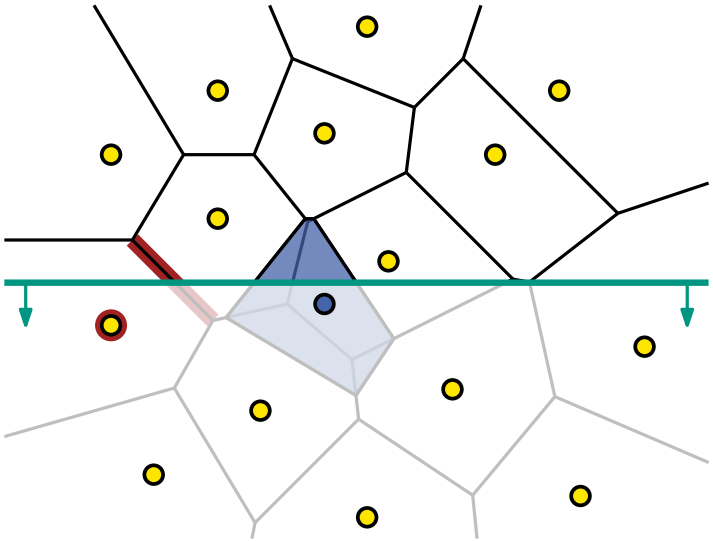
## Grundsätzlicher Ansatz: Sweep-Line

- schiebe Sweep-Line von oben nach unten
- zu jedem Zeitpunkt: kenne $\mathrm{Vor}(S)$ für die Halbebene über der Sweep-Line

## Problem

- der Teil oberhalb der Sweep-Line hängen von Standorten unterhalb der Sweep-Line ab
- aber das kann ja (hoffentlich) nur knapp über der Sweep-Line passieren!?!

# Sweep-Line Algo



## Grundsätzlicher Ansatz: Sweep-Line

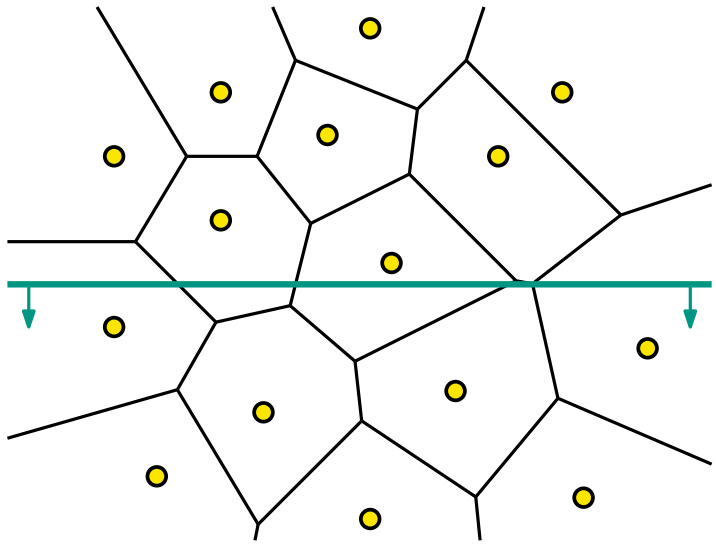
- schiebe Sweep-Line von oben nach unten
- zu jedem Zeitpunkt: kenne $\mathrm{Vor}(S)$ für die Halbebene über der Sweep-Line

## Problem

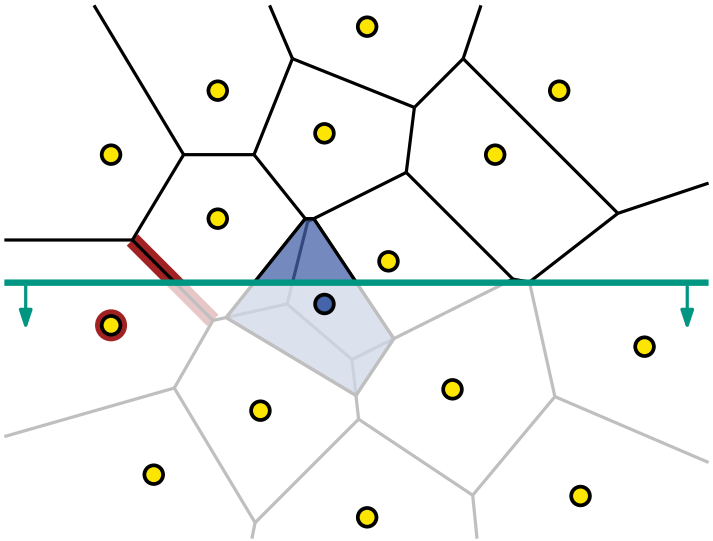
- der Teil oberhalb der Sweep-Line hängen von Standorten unterhalb der Sweep-Line ab
- aber das kann ja (hoffentlich) nur knapp über der Sweep-Line passieren!?!

## Abgewandelter Sweep-Line Ansatz

- Bereich gesehener Punkte muss nicht mit fertig berechnetem Bereich übereinstimmen



# Sweep-Line Algo



## Grundsätzlicher Ansatz: Sweep-Line

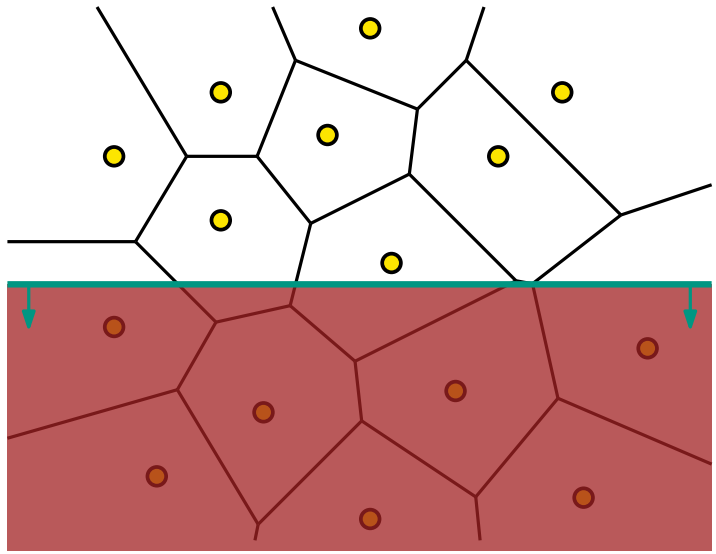
- schiebe Sweep-Line von oben nach unten
- zu jedem Zeitpunkt: kenne $\mathrm{Vor}(S)$ für die Halbebene über der Sweep-Line

## Problem

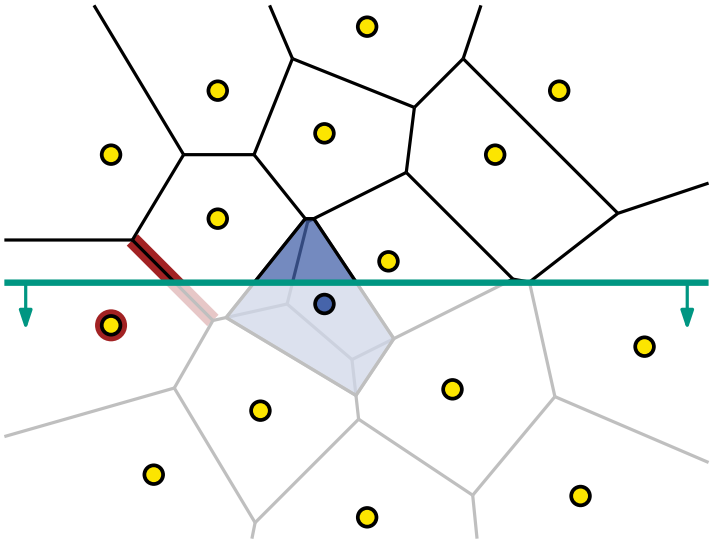
- der Teil oberhalb der Sweep-Line hängen von Standorten unterhalb der Sweep-Line ab
- aber das kann ja (hoffentlich) nur knapp über der Sweep-Line passieren!?!

## Abgewandelter Sweep-Line Ansatz

- Bereich gesehener Punkte muss nicht mit fertig berechnetem Bereich übereinstimmen
- unter der Sweep-Line: unbekannter Bereich



# Sweep-Line Algo



## Grundsätzlicher Ansatz: Sweep-Line

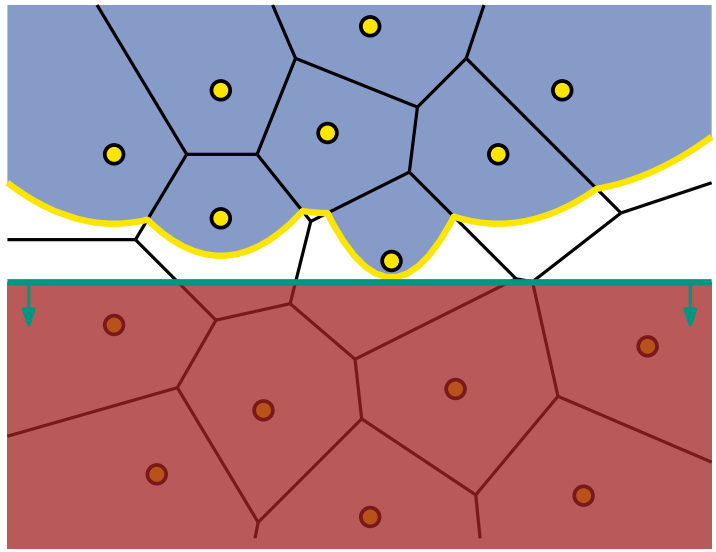
- schiebe Sweep-Line von oben nach unten
- zu jedem Zeitpunkt: kenne $\mathrm{Vor}(S)$ für die Halbebene über der Sweep-Line

## Problem

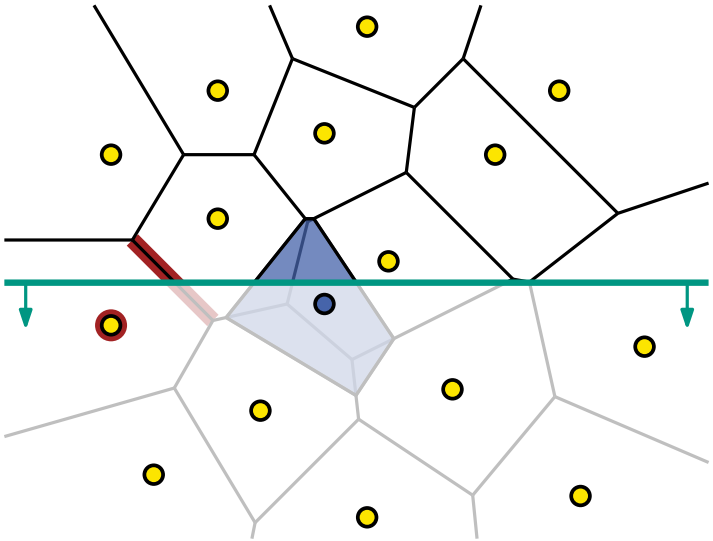
- der Teil oberhalb der Sweep-Line hängen von Standorten unterhalb der Sweep-Line ab
- aber das kann ja (hoffentlich) nur knapp über der Sweep-Line passieren!?!

## Abgewandelter Sweep-Line Ansatz

- Bereich gesehener Punkte muss nicht mit fertig berechnetem Bereich übereinstimmen
- unter der Sweep-Line: unbekannter Bereich
- gewisse Region oberhalb der Sweep-Line: bekannter Bereich



# Sweep-Line Algo



## Grundsätzlicher Ansatz: Sweep-Line

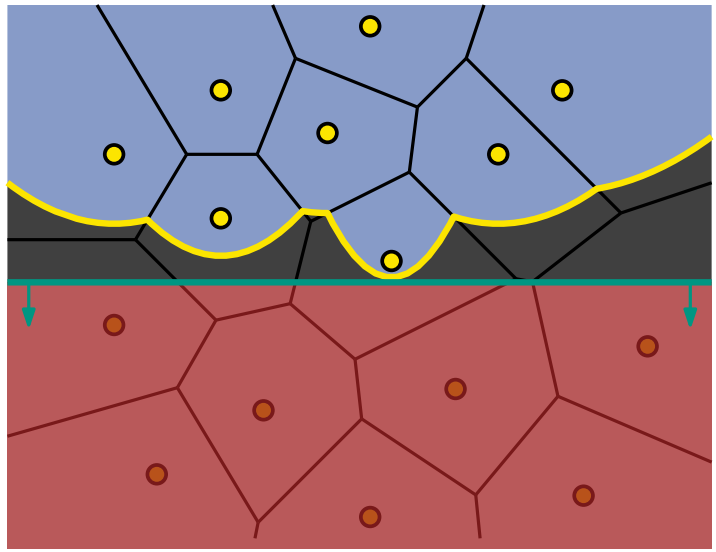
- schiebe Sweep-Line von oben nach unten
- zu jedem Zeitpunkt: kenne $\mathrm{Vor}(S)$ für die Halbebene über der Sweep-Line

## Problem

- der Teil oberhalb der Sweep-Line hängen von Standorten unterhalb der Sweep-Line ab
- aber das kann ja (hoffentlich) nur knapp über der Sweep-Line passieren!?!

## Abgewandelter Sweep-Line Ansatz

- Bereich gesehener Punkte muss nicht mit fertig berechnetem Bereich übereinstimmen
- unter der Sweep-Line: unbekannter Bereich
- gewisse Region oberhalb der Sweep-Line: bekannter Bereich
- Graubereich dazwischen



# Bekannter Bereich

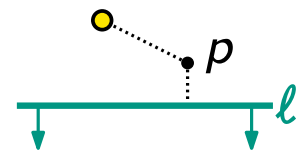
**Wo endet der bekannte Bereich?** (gegeben die Sweep-Line $\ell$)

- betrachte Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ oberhalb von $\ell$

# Bekannter Bereich

**Wo endet der bekannte Bereich?** (gegeben die Sweep-Line $\ell$)

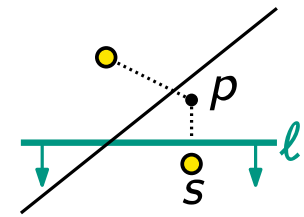
- betrachte Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ oberhalb von $\ell$
- Fall 1: $p$ ist näher an $\ell$ als an jedem Standort



# Bekannter Bereich

**Wo endet der bekannte Bereich?** (gegeben die Sweep-Line $\ell$)

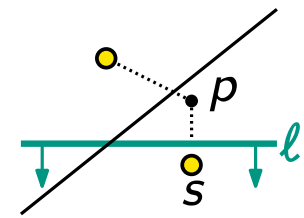
- betrachte Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ oberhalb von $\ell$
- Fall 1: $p$ ist näher an $\ell$ als an jedem Standort
  - es könnte Standort $s$ unter $\ell$ geben, sodass $p \in \mathcal{V}(s)$



# Bekannter Bereich

**Wo endet der bekannte Bereich?** (gegeben die Sweep-Line $\ell$)

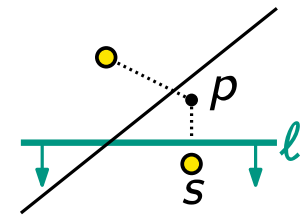
- betrachte Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ oberhalb von $\ell$
- Fall 1: $p$ ist näher an $\ell$ als an jedem Standort
  - es könnte Standort $s$ unter $\ell$ geben, sodass $p \in \mathcal{V}(s)$
  - $p$ ist also Teil des Graubereichs

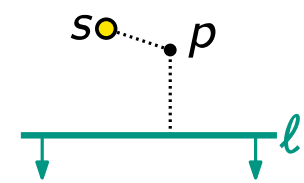


# Bekannter Bereich

**Wo endet der bekannte Bereich?** (gegeben die Sweep-Line $\ell$)

- betrachte Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ oberhalb von $\ell$
- Fall 1: $p$ ist näher an $\ell$ als an jedem Standort
  - es könnte Standort $s$ unter $\ell$ geben, sodass $p \in \mathcal{V}(s)$
  - $p$ ist also Teil des Graubereichs
- Fall 2: $p$ ist näher an einem Standort $s$ über $\ell$ als an $\ell$

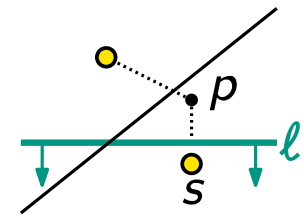


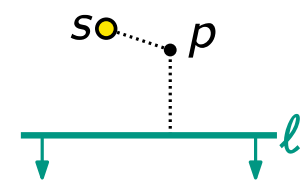



# Bekannter Bereich

**Wo endet der bekannte Bereich?** (gegeben die Sweep-Line $\ell$)

- betrachte Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ oberhalb von $\ell$
- Fall 1: $p$ ist näher an $\ell$ als an jedem Standort
  - es könnte Standort $s$ unter $\ell$ geben, sodass $p \in \mathcal{V}(s)$
  - $p$ ist also Teil des Graubereichs
- Fall 2: $p$ ist näher an einem Standort $s$ über $\ell$ als an $\ell$
  - es gibt keinen Standort unter $\ell$, der näher an $p$ liegt
  - die Voronoi-Zelle von $p$ ist also bekannt

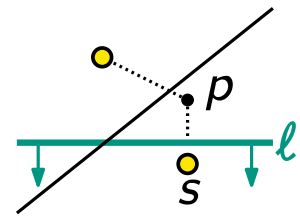


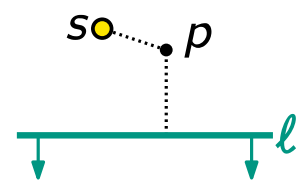



# Bekannter Bereich

**Wo endet der bekannte Bereich?** (gegeben die Sweep-Line $\ell$)

- betrachte Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ oberhalb von $\ell$
- Fall 1: $p$ ist näher an $\ell$ als an jedem Standort
  - es könnte Standort $s$ unter $\ell$ geben, sodass $p \in \mathcal{V}(s)$
  - $p$ ist also Teil des Graubereichs
- Fall 2: $p$ ist näher an einem Standort $s$ über $\ell$ als an $\ell$
  - es gibt keinen Standort unter $\ell$, der näher an $p$ liegt
  - die Voronoi-Zelle von $p$ ist also bekannt
- bekannter Bereich: $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid \exists s \in S \ \ \mathrm{dist}(p,s) \leq \mathrm{dist}(p,\ell)\}$

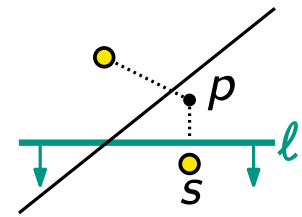


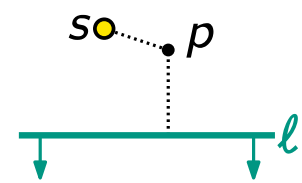



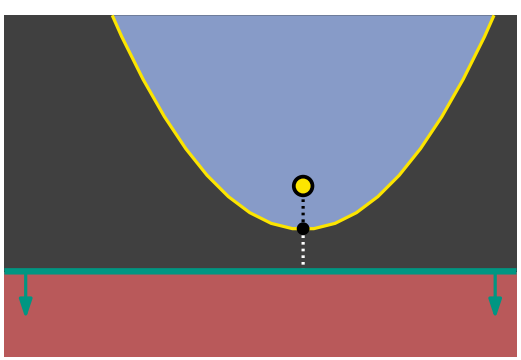
# Bekannter Bereich

**Wo endet der bekannte Bereich?** (gegeben die Sweep-Line $\ell$)

- betrachte Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ oberhalb von $\ell$
- Fall 1: $p$ ist näher an $\ell$ als an jedem Standort
  - es könnte Standort $s$ unter $\ell$ geben, sodass $p \in \mathcal{V}(s)$
  - $p$ ist also Teil des Graubereichs
- Fall 2: $p$ ist näher an einem Standort $s$ über $\ell$ als an $\ell$
  - es gibt keinen Standort unter $\ell$, der näher an $p$ liegt
  - die Voronoi-Zelle von $p$ ist also bekannt
- bekannter Bereich: $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid \exists s \in S \ \ \mathrm{dist}(p,s) \leq \mathrm{dist}(p,\ell)\}$



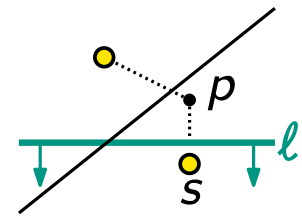



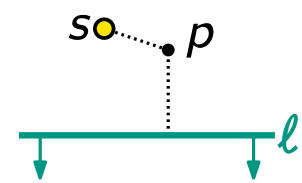



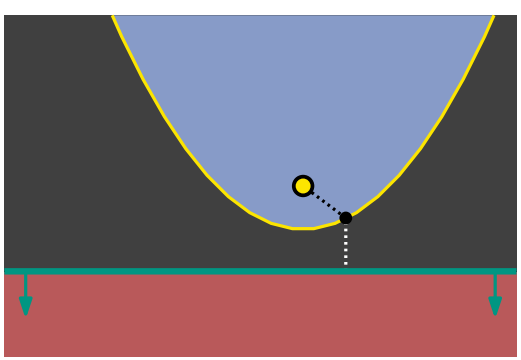
# Bekannter Bereich

**Wo endet der bekannte Bereich?** (gegeben die Sweep-Line $\ell$)

- betrachte Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ oberhalb von $\ell$
- Fall 1: $p$ ist näher an $\ell$ als an jedem Standort
  - es könnte Standort $s$ unter $\ell$ geben, sodass $p \in \mathcal{V}(s)$
  - $p$ ist also Teil des Graubereichs
- Fall 2: $p$ ist näher an einem Standort $s$ über $\ell$ als an $\ell$
  - es gibt keinen Standort unter $\ell$, der näher an $p$ liegt
  - die Voronoi-Zelle von $p$ ist also bekannt
- bekannter Bereich: $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid \exists s \in S \ \ \mathrm{dist}(p,s) \leq \mathrm{dist}(p,\ell)\}$



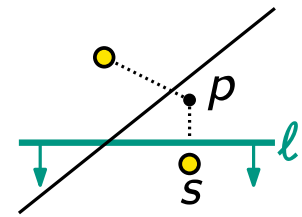



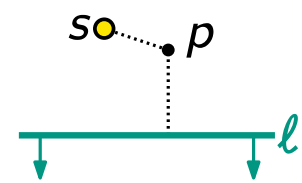



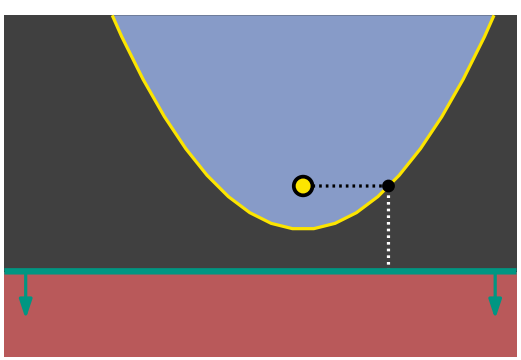
# Bekannter Bereich

**Wo endet der bekannte Bereich?** (gegeben die Sweep-Line $\ell$)

- betrachte Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ oberhalb von $\ell$
- Fall 1: $p$ ist näher an $\ell$ als an jedem Standort
  - es könnte Standort $s$ unter $\ell$ geben, sodass $p \in \mathcal{V}(s)$
  - $p$ ist also Teil des Graubereichs
- Fall 2: $p$ ist näher an einem Standort $s$ über $\ell$ als an $\ell$
  - es gibt keinen Standort unter $\ell$, der näher an $p$ liegt
  - die Voronoi-Zelle von $p$ ist also bekannt
- bekannter Bereich: $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid \exists s \in S \ \ \mathrm{dist}(p,s) \leq \mathrm{dist}(p,\ell)\}$



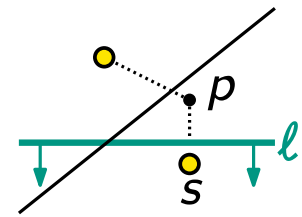



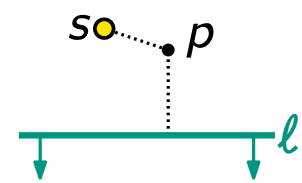



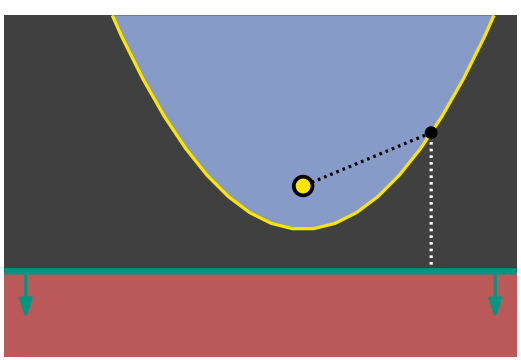
# Bekannter Bereich

**Wo endet der bekannte Bereich?** (gegeben die Sweep-Line $\ell$)

- betrachte Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ oberhalb von $\ell$
- Fall 1: $p$ ist näher an $\ell$ als an jedem Standort
  - es könnte Standort $s$ unter $\ell$ geben, sodass $p \in \mathcal{V}(s)$
  - $p$ ist also Teil des Graubereichs
- Fall 2: $p$ ist näher an einem Standort $s$ über $\ell$ als an $\ell$
  - es gibt keinen Standort unter $\ell$, der näher an $p$ liegt
  - die Voronoi-Zelle von $p$ ist also bekannt
- bekannter Bereich: $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid \exists s \in S \ \ \mathrm{dist}(p,s) \leq \mathrm{dist}(p,\ell)\}$



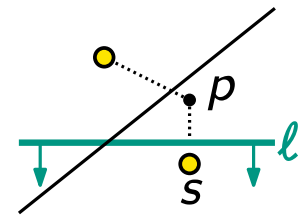



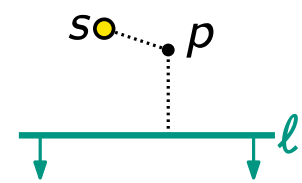



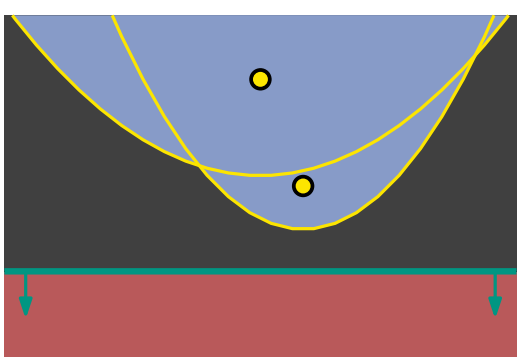
# Bekannter Bereich

**Wo endet der bekannte Bereich?** (gegeben die Sweep-Line $\ell$)

- betrachte Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ oberhalb von $\ell$
- Fall 1: $p$ ist näher an $\ell$ als an jedem Standort
  - es könnte Standort $s$ unter $\ell$ geben, sodass $p \in \mathcal{V}(s)$
  - $p$ ist also Teil des Graubereichs
- Fall 2: $p$ ist näher an einem Standort $s$ über $\ell$ als an $\ell$
  - es gibt keinen Standort unter $\ell$, der näher an $p$ liegt
  - die Voronoi-Zelle von $p$ ist also bekannt
- bekannter Bereich: $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid \exists s \in S \ \ \mathrm{dist}(p,s) \leq \mathrm{dist}(p,\ell)\}$



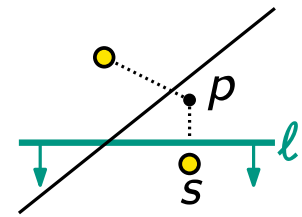



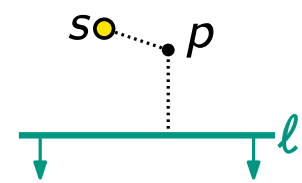



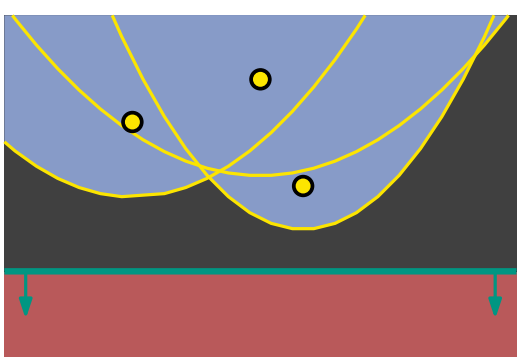
# Bekannter Bereich

**Wo endet der bekannte Bereich?** (gegeben die Sweep-Line $\ell$)

- betrachte Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ oberhalb von $\ell$
- Fall 1: $p$ ist näher an $\ell$ als an jedem Standort
  - es könnte Standort $s$ unter $\ell$ geben, sodass $p \in \mathcal{V}(s)$
  - $p$ ist also Teil des Graubereichs
- Fall 2: $p$ ist näher an einem Standort $s$ über $\ell$ als an $\ell$
  - es gibt keinen Standort unter $\ell$, der näher an $p$ liegt
  - die Voronoi-Zelle von $p$ ist also bekannt
- bekannter Bereich: $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid \exists s \in S \ \ \mathrm{dist}(p,s) \leq \mathrm{dist}(p,\ell)\}$



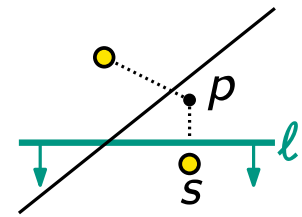



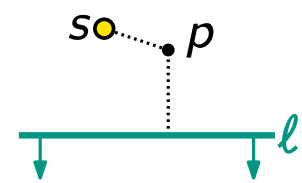



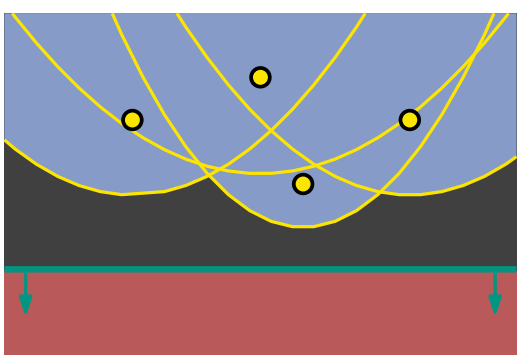
# Bekannter Bereich

**Wo endet der bekannte Bereich?** (gegeben die Sweep-Line $\ell$)

- betrachte Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ oberhalb von $\ell$
- Fall 1: $p$ ist näher an $\ell$ als an jedem Standort
  - es könnte Standort $s$ unter $\ell$ geben, sodass $p \in \mathcal{V}(s)$
  - $p$ ist also Teil des Graubereichs
- Fall 2: $p$ ist näher an einem Standort $s$ über $\ell$ als an $\ell$
  - es gibt keinen Standort unter $\ell$, der näher an $p$ liegt
  - die Voronoi-Zelle von $p$ ist also bekannt
- bekannter Bereich: $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid \exists s \in S \ \ \mathrm{dist}(p,s) \leq \mathrm{dist}(p,\ell)\}$



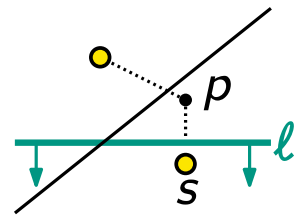



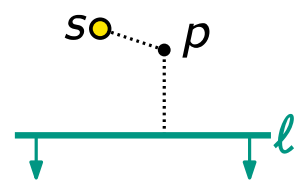



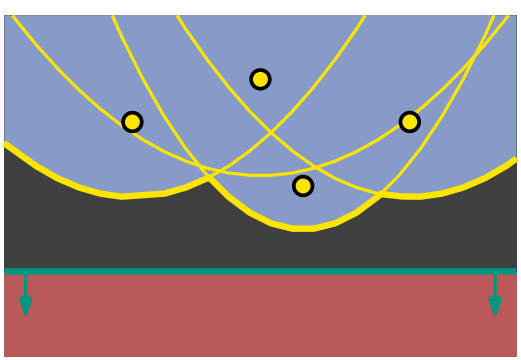
# Bekannter Bereich

**Wo endet der bekannte Bereich?** (gegeben die Sweep-Line $\ell$)

- betrachte Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ oberhalb von $\ell$
- Fall 1: $p$ ist näher an $\ell$ als an jedem Standort
  - es könnte Standort $s$ unter $\ell$ geben, sodass $p \in \mathcal{V}(s)$
  - $p$ ist also Teil des Graubereichs
- Fall 2: $p$ ist näher an einem Standort $s$ über $\ell$ als an $\ell$
  - es gibt keinen Standort unter $\ell$, der näher an $p$ liegt
  - die Voronoi-Zelle von $p$ ist also bekannt
- bekannter Bereich: $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid \exists s \in S \ \ \mathrm{dist}(p,s) \leq \mathrm{dist}(p,\ell)\}$



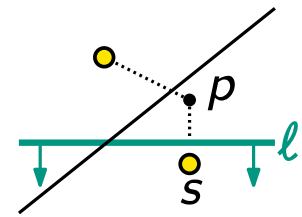



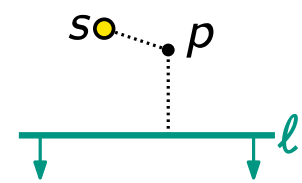
- die Grenze zwischen bekanntem Bereich und Graubereich heißt **Beach-Line**

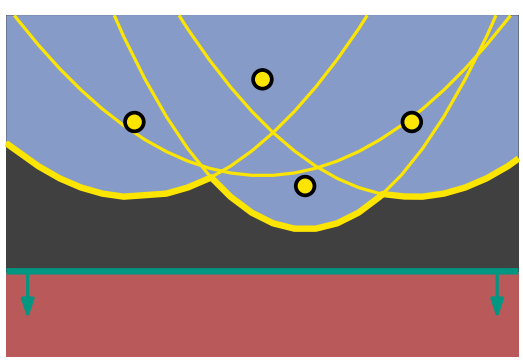
# Bekannter Bereich

**Wo endet der bekannte Bereich?** (gegeben die Sweep-Line $\ell$)

- betrachte Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ oberhalb von $\ell$
- Fall 1: $p$ ist näher an $\ell$ als an jedem Standort
  - es könnte Standort $s$ unter $\ell$ geben, sodass $p \in \mathcal{V}(s)$
  - $p$ ist also Teil des Graubereichs
- Fall 2: $p$ ist näher an einem Standort $s$ über $\ell$ als an $\ell$
  - es gibt keinen Standort unter $\ell$, der näher an $p$ liegt
  - die Voronoi-Zelle von $p$ ist also bekannt
- bekannter Bereich: $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid \exists s \in S \ \ \mathrm{dist}(p,s) \leq \mathrm{dist}(p,\ell)\}$



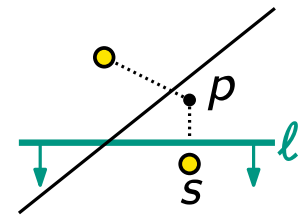



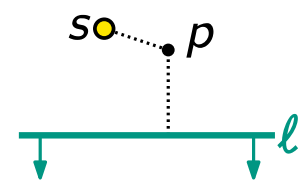
- die Grenze zwischen bekanntem Bereich und Graubereich heißt **Beach-Line**
- jede Teilkurve der Beach-Line gehört zu einem Standort

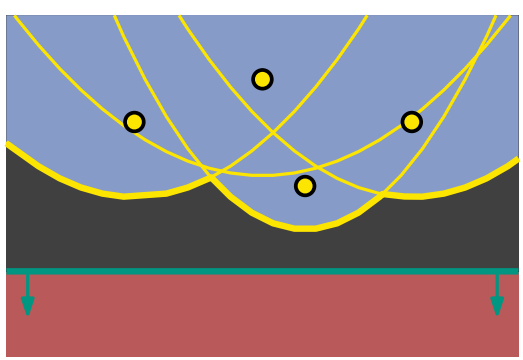
# Bekannter Bereich

**Wo endet der bekannte Bereich?** (gegeben die Sweep-Line $\ell$)

- betrachte Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ oberhalb von $\ell$
- Fall 1: $p$ ist näher an $\ell$ als an jedem Standort
  - es könnte Standort $s$ unter $\ell$ geben, sodass $p \in \mathcal{V}(s)$
  - $p$ ist also Teil des Graubereichs
- Fall 2: $p$ ist näher an einem Standort $s$ über $\ell$ als an $\ell$
  - es gibt keinen Standort unter $\ell$, der näher an $p$ liegt
  - die Voronoi-Zelle von $p$ ist also bekannt
- bekannter Bereich: $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid \exists s \in S \ \ \mathrm{dist}(p,s) \leq \mathrm{dist}(p,\ell)\}$



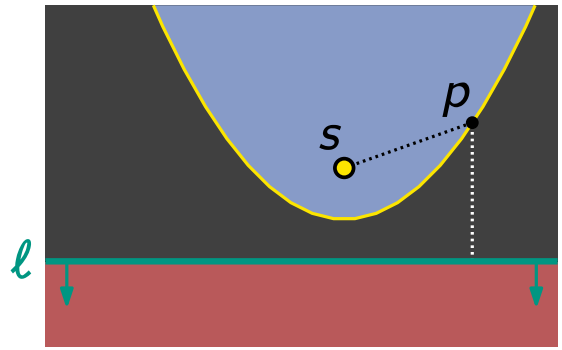



- die Grenze zwischen bekanntem Bereich und Graubereich heißt **Beach-Line**
- jede Teilkurve der Beach-Line gehört zu einem Standort
- gleich: jede Teilkurve ist eine Parabel

# Welche Form hat die Beach-Line?

## Relevante Koordinaten

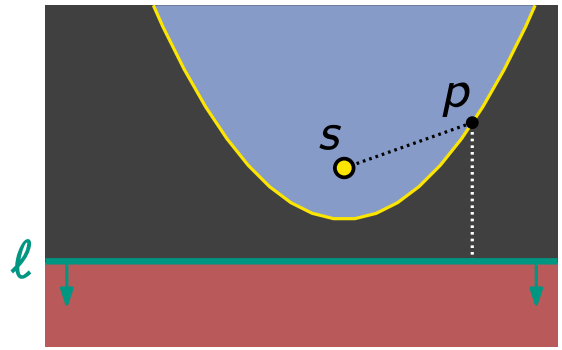
- $s = (s_x, s_y)$
- $p = (p_x, p_y)$
- $y$-Koordinate von $\ell$: $\ell_y$



# Welche Form hat die Beach-Line?

## Relevante Koordinaten

- $s = (s_x, s_y)$
- $p = (p_x, p_y)$
- $y$-Koordinate von $\ell$: $\ell_y$



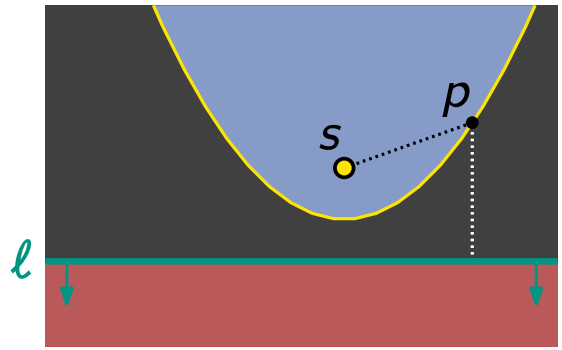

## Distanzen

- $\text{dist}(s, p) = \sqrt{(p_x - s_x)^2 + (p_y - s_y)^2}$
- $\text{dist}(\ell, p) = p_y - \ell_y$

# Welche Form hat die Beach-Line?

## Relevante Koordinaten

- $s = (s_x, s_y)$
- $p = (p_x, p_y)$
- $y$-Koordinate von $\ell$: $\ell_y$



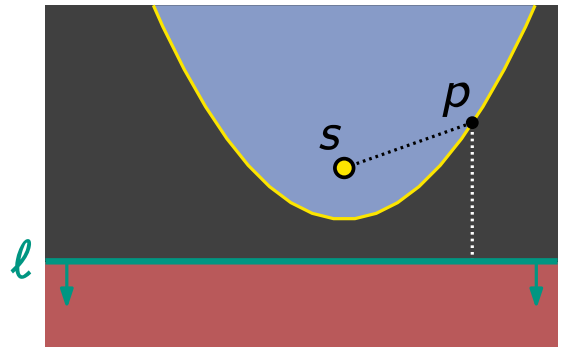

## Distanzen

- $\text{dist}(s, p) = \sqrt{(p_x - s_x)^2 + (p_y - s_y)^2}$
- $\text{dist}(\ell, p) = p_y - \ell_y$
- $p$ liegt auf der Beach-Line $\Leftrightarrow \text{dist}(s, p) = \text{dist}(\ell, p)$

# Welche Form hat die Beach-Line?

## Relevante Koordinaten

- $s = (s_x, s_y)$
- $p = (p_x, p_y)$
- $y$-Koordinate von $\ell$: $\ell_y$




## Distanzen

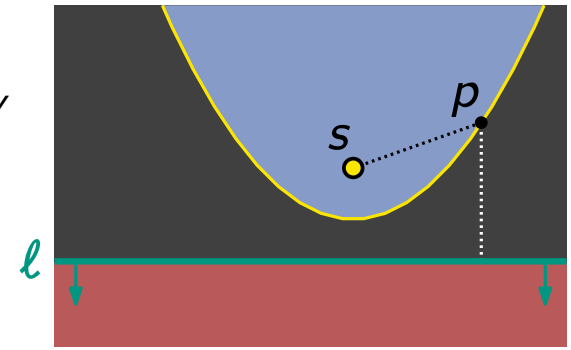
- $\text{dist}(s, p) = \sqrt{(p_x - s_x)^2 + (p_y - s_y)^2}$
- $\text{dist}(\ell, p) = p_y - \ell_y$
- $p$ liegt auf der Beach-Line $\Leftrightarrow \text{dist}(s, p) = \text{dist}(\ell, p)$

$$(p_x - s_x)^2 + (p_y - s_y)^2 = (p_y - \ell_y)^2$$

# Welche Form hat die Beach-Line?

## Relevante Koordinaten

- $s = (s_x, s_y)$
- $p = (p_x, p_y)$
- $y$-Koordinate von $\ell$: $\ell_y$




## Distanzen

- $\text{dist}(s, p) = \sqrt{(p_x - s_x)^2 + (p_y - s_y)^2}$
- $\text{dist}(\ell, p) = p_y - \ell_y$
- $p$ liegt auf der Beach-Line $\Leftrightarrow \text{dist}(s, p) = \text{dist}(\ell, p)$

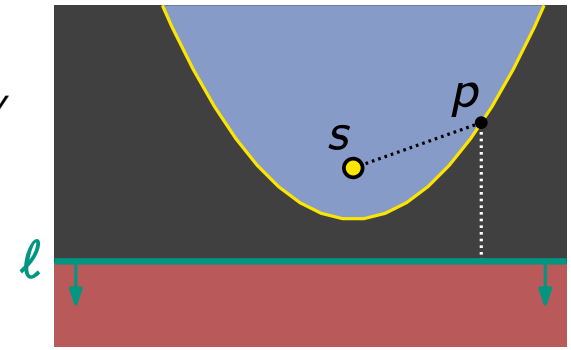
$$(p_x - s_x)^2 + (p_y - s_y)^2 = (p_y - \ell_y)^2$$

$$(p_x - s_x)^2 + p_y^2 - 2p_y s_y + s_y^2 = p_y^2 - 2p_y \ell_y + \ell_y^2$$

# Welche Form hat die Beach-Line?

## Relevante Koordinaten

- $s = (s_x, s_y)$
- $p = (p_x, p_y)$
- $y$-Koordinate von $\ell$: $\ell_y$




## Distanzen

- $\text{dist}(s, p) = \sqrt{(p_x - s_x)^2 + (p_y - s_y)^2}$
- $\text{dist}(\ell, p) = p_y - \ell_y$
- $p$ liegt auf der Beach-Line $\Leftrightarrow \text{dist}(s, p) = \text{dist}(\ell, p)$

$$(p_x - s_x)^2 + (p_y - s_y)^2 = (p_y - \ell_y)^2$$

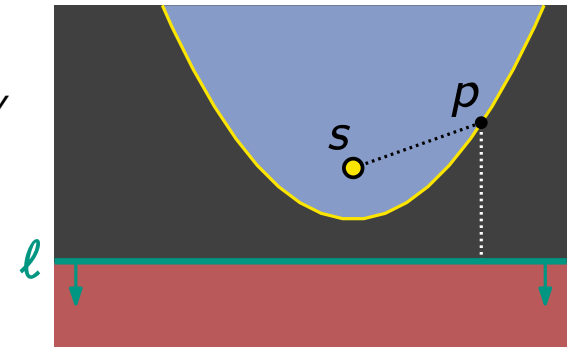
$$(p_x - s_x)^2 + p_y^2 - 2p_y s_y + s_y^2 = p_y^2 - 2p_y \ell_y + \ell_y^2$$

$$(p_x - s_x)^2 + s_y^2 - \ell_y^2 = 2p_y s_y - 2p_y \ell_y$$

# Welche Form hat die Beach-Line?

## Relevante Koordinaten

- $s = (s_x, s_y)$
- $p = (p_x, p_y)$
- $y$-Koordinate von $\ell$: $\ell_y$




## Distanzen

- $\text{dist}(s, p) = \sqrt{(p_x - s_x)^2 + (p_y - s_y)^2}$
- $\text{dist}(\ell, p) = p_y - \ell_y$
- $p$ liegt auf der Beach-Line $\Leftrightarrow \text{dist}(s, p) = \text{dist}(\ell, p)$

$$(p_x - s_x)^2 + (p_y - s_y)^2 = (p_y - \ell_y)^2$$

$$(p_x - s_x)^2 + p_y^2 - 2p_y s_y + s_y^2 = p_y^2 - 2p_y \ell_y + \ell_y^2$$

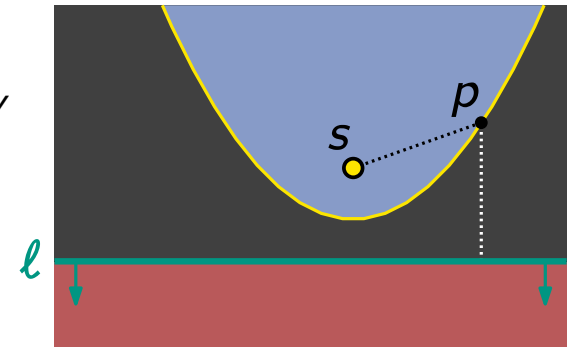
$$(p_x - s_x)^2 + s_y^2 - \ell_y^2 = 2p_y s_y - 2p_y \ell_y$$

$$\frac{(p_x - s_x)^2}{2s_y - 2\ell_y} + \frac{s_y^2 - \ell_y^2}{2s_y - 2\ell_y} = p_y$$

# Welche Form hat die Beach-Line?

## Relevante Koordinaten

- $s = (s_x, s_y)$
- $p = (p_x, p_y)$
- $y$-Koordinate von $\ell$: $\ell_y$




## Distanzen

- $\text{dist}(s, p) = \sqrt{(p_x - s_x)^2 + (p_y - s_y)^2}$
- $\text{dist}(\ell, p) = p_y - \ell_y$
- $p$ liegt auf der Beach-Line $\Leftrightarrow \text{dist}(s, p) = \text{dist}(\ell, p)$

$$(p_x - s_x)^2 + (p_y - s_y)^2 = (p_y - \ell_y)^2$$

$$(p_x - s_x)^2 + p_y^2 - 2p_y s_y + s_y^2 = p_y^2 - 2p_y \ell_y + \ell_y^2$$

$$(p_x - s_x)^2 + s_y^2 - \ell_y^2 = 2p_y s_y - 2p_y \ell_y$$

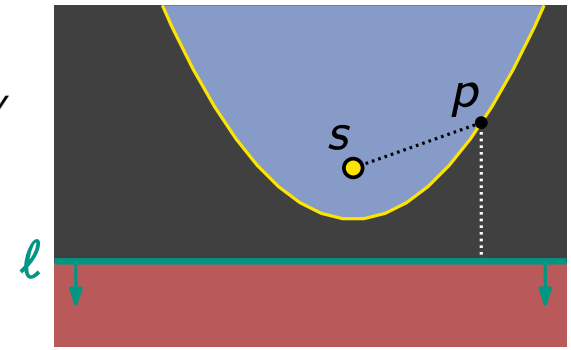
$$\frac{(p_x - s_x)^2}{2s_y - 2\ell_y} + \frac{s_y^2 - \ell_y^2}{2s_y - 2\ell_y} = p_y$$

$$\frac{(p_x - s_x)^2}{2s_y - 2\ell_y} + \frac{s_y + \ell_y}{2} = p_y$$

# Welche Form hat die Beach-Line?

## Relevante Koordinaten

- $s = (s_x, s_y)$
- $p = (p_x, p_y)$
- $y$-Koordinate von $\ell$: $\ell_y$




## Distanzen

- $\text{dist}(s, p) = \sqrt{(p_x - s_x)^2 + (p_y - s_y)^2}$
- $\text{dist}(\ell, p) = p_y - \ell_y$
- $p$ liegt auf der Beach-Line $\Leftrightarrow \text{dist}(s, p) = \text{dist}(\ell, p)$

$$(p_x - s_x)^2 + (p_y - s_y)^2 = (p_y - \ell_y)^2$$

$$(p_x - s_x)^2 + p_y^2 - 2p_y s_y + s_y^2 = p_y^2 - 2p_y \ell_y + \ell_y^2$$

$$(p_x - s_x)^2 + s_y^2 - \ell_y^2 = 2p_y s_y - 2p_y \ell_y$$

$$\frac{(p_x - s_x)^2}{2s_y - 2\ell_y} + \frac{s_y^2 - \ell_y^2}{2s_y - 2\ell_y} = p_y$$

Verschiebung in $x$-Richtung

$$\frac{(p_x - s_x)^2}{2s_y - 2\ell_y} + \frac{s_y + \ell_y}{2} = p_y$$

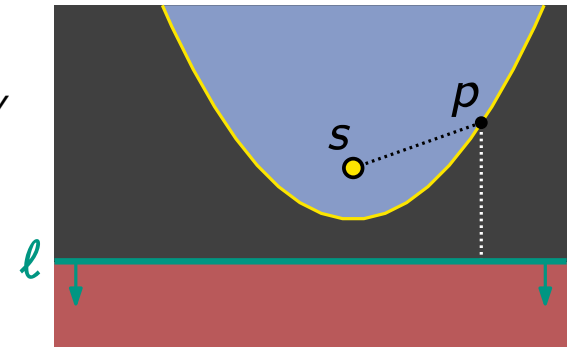
Parabel

Verschiebung in $y$-Richtung

# Welche Form hat die Beach-Line?

## Relevante Koordinaten

- $s = (s_x, s_y)$
- $p = (p_x, p_y)$
- $y$-Koordinate von $\ell$: $\ell_y$




## Distanzen

- $\text{dist}(s, p) = \sqrt{(p_x - s_x)^2 + (p_y - s_y)^2}$
- $\text{dist}(\ell, p) = p_y - \ell_y$
- $p$ liegt auf der Beach-Line $\Leftrightarrow \text{dist}(s, p) = \text{dist}(\ell, p)$

$$(p_x - s_x)^2 + (p_y - s_y)^2 = (p_y - \ell_y)^2$$

$$(p_x - s_x)^2 + p_y^2 - 2p_y s_y + s_y^2 = p_y^2 - 2p_y \ell_y + \ell_y^2$$

$$(p_x - s_x)^2 + s_y^2 - \ell_y^2 = 2p_y s_y - 2p_y \ell_y$$

$$\frac{(p_x - s_x)^2}{2s_y - 2\ell_y} + \frac{s_y^2 - \ell_y^2}{2s_y - 2\ell_y} = p_y$$

Verschiebung in $x$-Richtung

$$\frac{(p_x - s_x)^2}{2s_y - 2\ell_y} + \frac{s_y + \ell_y}{2} = p_y$$

Parabel

Verschiebung in $y$-Richtung

- Parabel mit Scheitelpunkt auf halber Strecke zwischen $s$ und $\ell$
- je größer $\text{dist}(s, \ell)$, desto weiter die Parabel

# Wann verändert sich die Beach-Line?

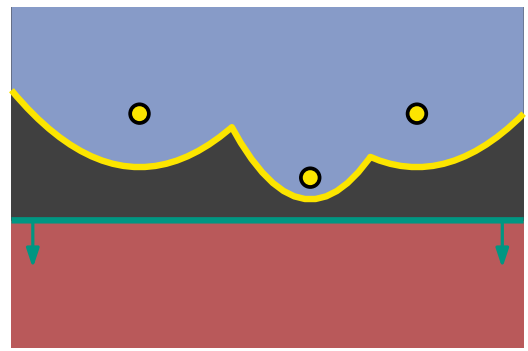
## Sweep-Line Algo

- Sweep-Line Status: Zustand der Beach-Line
- Events: Zeitpunkte an denen sich die BL ändert

# Wann verändert sich die Beach-Line?

## Sweep-Line Algo

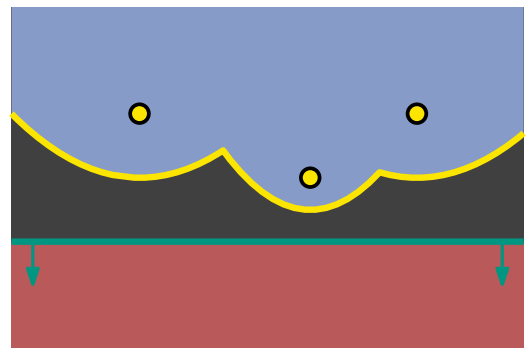
- Sweep-Line Status: Zustand der Beach-Line
- Events: Zeitpunkte an denen sich die BL ändert
- Was heißt „ändert“ in diesem Zusammenhang?



# Wann verändert sich die Beach-Line?

## Sweep-Line Algo

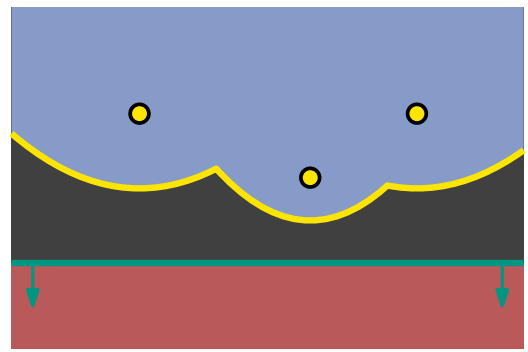
- Sweep-Line Status: Zustand der Beach-Line
- Events: Zeitpunkte an denen sich die BL ändert
- Was heißt „ändert“ in diesem Zusammenhang?



# Wann verändert sich die Beach-Line?

## Sweep-Line Algo

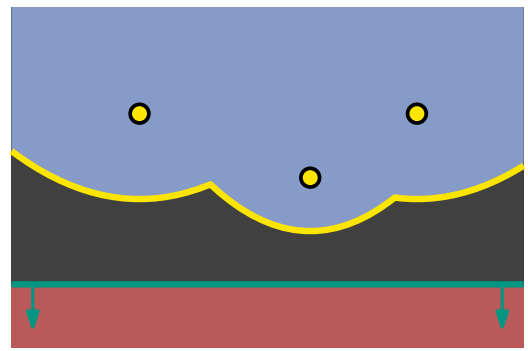
- Sweep-Line Status: Zustand der Beach-Line
- Events: Zeitpunkte an denen sich die BL ändert
- Was heißt „ändert“ in diesem Zusammenhang?



# Wann verändert sich die Beach-Line?

## Sweep-Line Algo

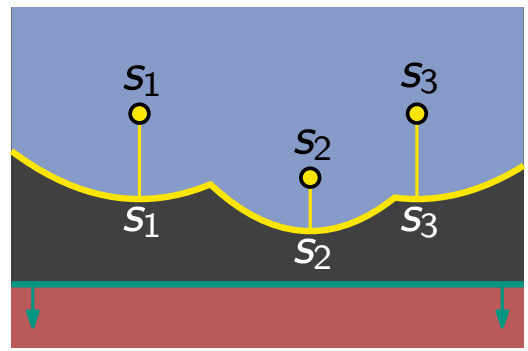
- Sweep-Line Status: Zustand der Beach-Line
- Events: Zeitpunkte an denen sich die BL ändert
- Was heißt „ändert“ in diesem Zusammenhang?
  - ändert sich irgendwie ständig



# Wann verändert sich die Beach-Line?

## Sweep-Line Algo

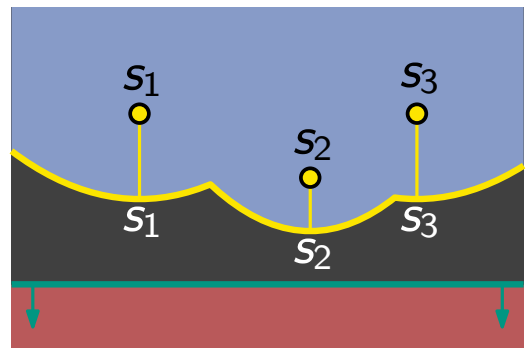
- Sweep-Line Status: Zustand der Beach-Line
- Events: Zeitpunkte an denen sich die BL ändert
- Was heißt „ändert“ in diesem Zusammenhang?
  - ändert sich irgendwie ständig
  - Sequenz zugehöriger Standorte ändert sich selten



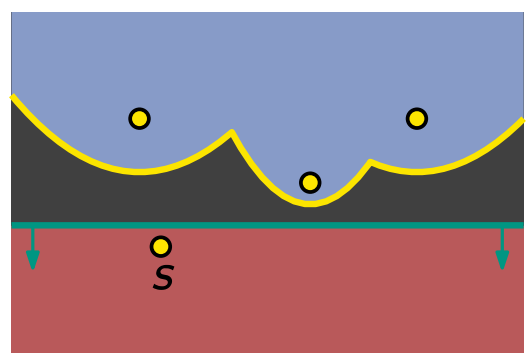
# Wann verändert sich die Beach-Line?

## Sweep-Line Algo

- Sweep-Line Status: Zustand der Beach-Line
- Events: Zeitpunkte an denen sich die BL ändert
- Was heißt „ändert“ in diesem Zusammenhang?
  - ändert sich irgendwie ständig
  - Sequenz zugehöriger Standorte ändert sich selten



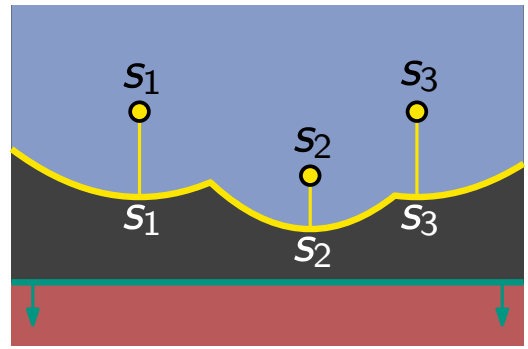

## Event-Punkt: neuer Standort *s*



# Wann verändert sich die Beach-Line?

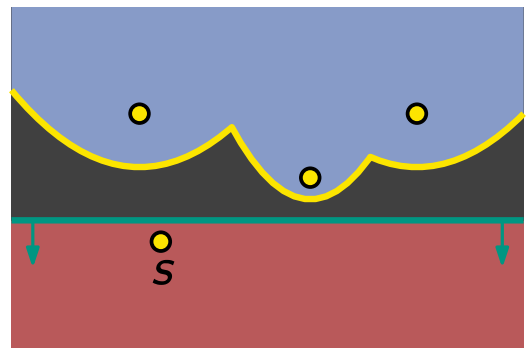
## Sweep-Line Algo

- Sweep-Line Status: Zustand der Beach-Line
- Events: Zeitpunkte an denen sich die BL ändert
- Was heißt „ändert“ in diesem Zusammenhang?
  - ändert sich irgendwie ständig
  - Sequenz zugehöriger Standorte ändert sich selten




## Event-Punkt: neuer Standort *s*

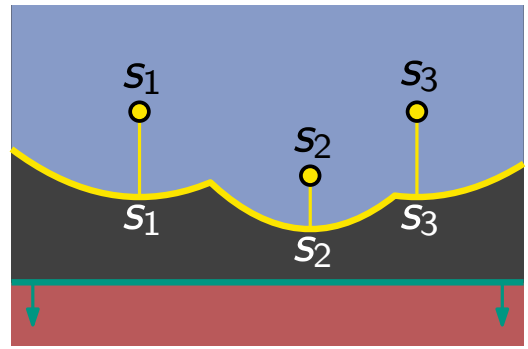
- neue Parabel wird in Beach-Line eingefügt



# Wann verändert sich die Beach-Line?

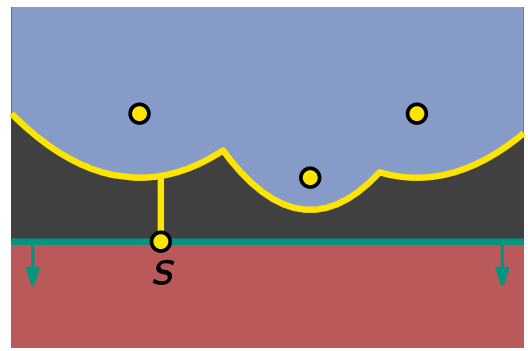
## Sweep-Line Algo

- Sweep-Line Status: Zustand der Beach-Line
- Events: Zeitpunkte an denen sich die BL ändert
- Was heißt „ändert“ in diesem Zusammenhang?
  - ändert sich irgendwie ständig
  - Sequenz zugehöriger Standorte ändert sich selten




## Event-Punkt: neuer Standort *s*

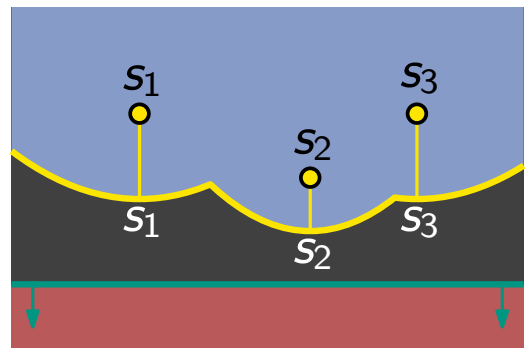
- neue Parabel wird in Beach-Line eingefügt



# Wann verändert sich die Beach-Line?

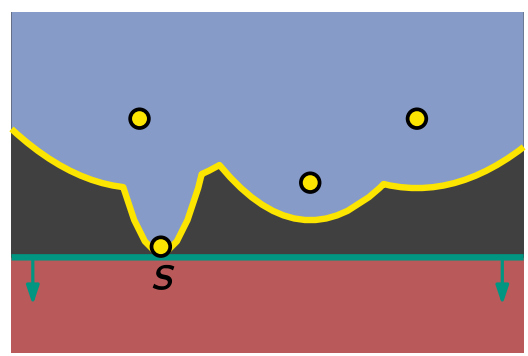
## Sweep-Line Algo

- Sweep-Line Status: Zustand der Beach-Line
- Events: Zeitpunkte an denen sich die BL ändert
- Was heißt „ändert“ in diesem Zusammenhang?
  - ändert sich irgendwie ständig
  - Sequenz zugehöriger Standorte ändert sich selten




## Event-Punkt: neuer Standort *s*

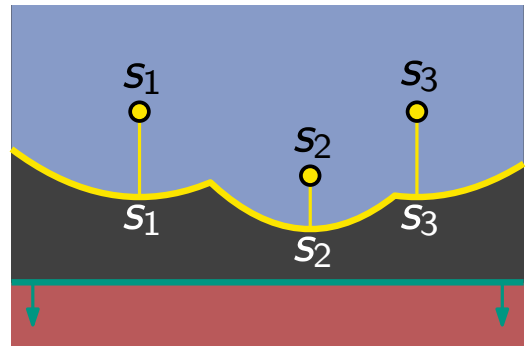
- neue Parabel wird in Beach-Line eingefügt



# Wann verändert sich die Beach-Line?

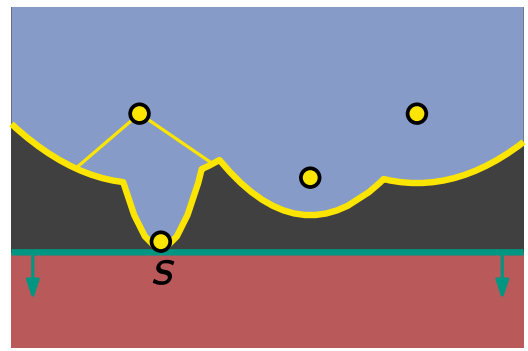
## Sweep-Line Algo

- Sweep-Line Status: Zustand der Beach-Line
- Events: Zeitpunkte an denen sich die BL ändert
- Was heißt „ändert“ in diesem Zusammenhang?
  - ändert sich irgendwie ständig
  - Sequenz zugehöriger Standorte ändert sich selten




## Event-Punkt: neuer Standort *s*

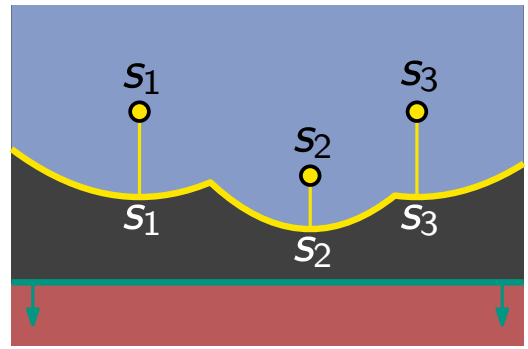
- neue Parabel wird in Beach-Line eingefügt
- spalte Parabel aus aktueller BL über *s* auf



# Wann verändert sich die Beach-Line?

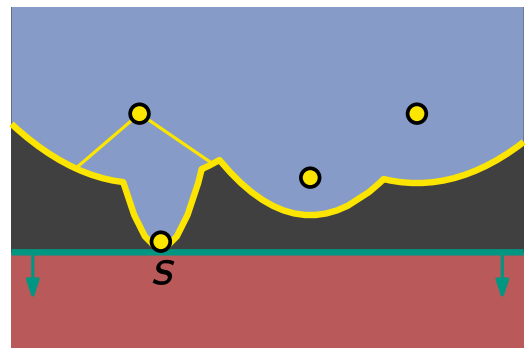
## Sweep-Line Algo

- Sweep-Line Status: Zustand der Beach-Line
- Events: Zeitpunkte an denen sich die BL ändert
- Was heißt „ändert“ in diesem Zusammenhang?
  - ändert sich irgendwie ständig
  - Sequenz zugehöriger Standorte ändert sich selten




## Event-Punkt: neuer Standort *s*

- neue Parabel wird in Beach-Line eingefügt
- spalte Parabel aus aktueller BL über *s* auf

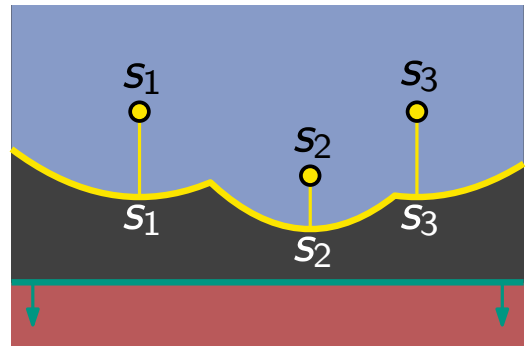



## Event-Punkt: Parabelstück verschwindet

# Wann verändert sich die Beach-Line?

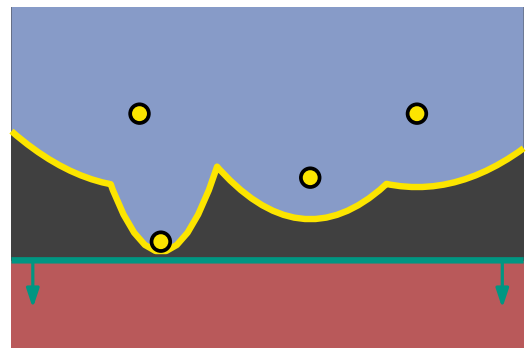
## Sweep-Line Algo

- Sweep-Line Status: Zustand der Beach-Line
- Events: Zeitpunkte an denen sich die BL ändert
- Was heißt „ändert“ in diesem Zusammenhang?
  - ändert sich irgendwie ständig
  - Sequenz zugehöriger Standorte ändert sich selten




## Event-Punkt: neuer Standort *s*

- neue Parabel wird in Beach-Line eingefügt
- spalte Parabel aus aktueller BL über *s* auf

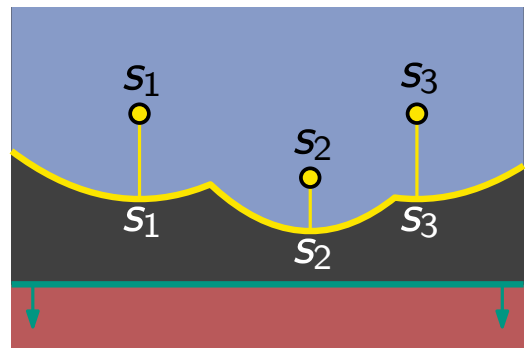


## Event-Punkt: Parabelstück verschwindet

# Wann verändert sich die Beach-Line?

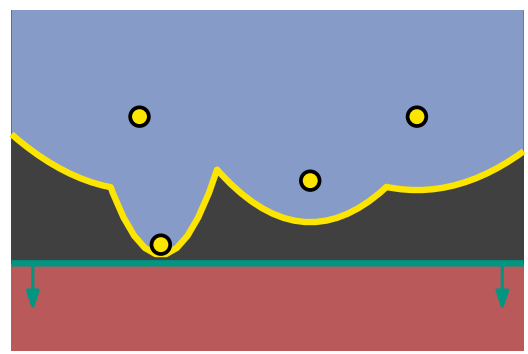
## Sweep-Line Algo

- Sweep-Line Status: Zustand der Beach-Line
- Events: Zeitpunkte an denen sich die BL ändert
- Was heißt „ändert“ in diesem Zusammenhang?
  - ändert sich irgendwie ständig
  - Sequenz zugehöriger Standorte ändert sich selten




## Event-Punkt: neuer Standort *s*

- neue Parabel wird in Beach-Line eingefügt
- spalte Parabel aus aktueller BL über *s* auf



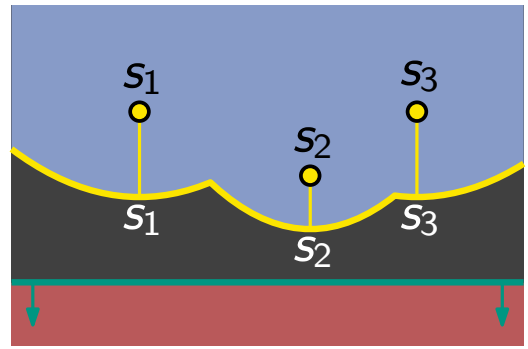
## Event-Punkt: Parabelstück verschwindet

- Wie können wir wissen, wann das passiert?

# Wann verändert sich die Beach-Line?

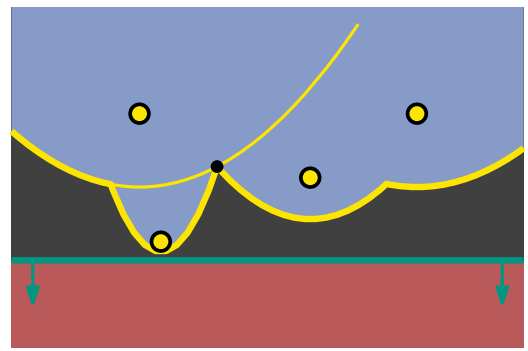
## Sweep-Line Algo

- Sweep-Line Status: Zustand der Beach-Line
- Events: Zeitpunkte an denen sich die BL ändert
- Was heißt „ändert“ in diesem Zusammenhang?
  - ändert sich irgendwie ständig
  - Sequenz zugehöriger Standorte ändert sich selten




## Event-Punkt: neuer Standort *s*

- neue Parabel wird in Beach-Line eingefügt
- spalte Parabel aus aktueller BL über *s* auf



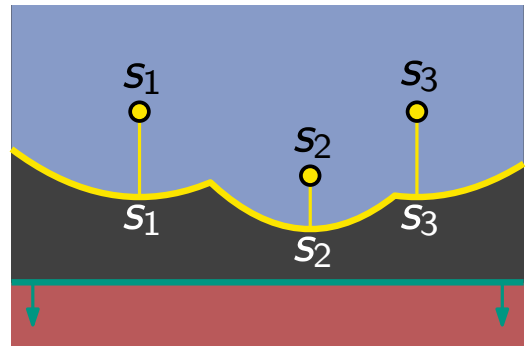
## Event-Punkt: Parabelstück verschwindet

- Wie können wir wissen, wann das passiert?
- die Parabeln dreier Punkte schneiden sich dort

# Wann verändert sich die Beach-Line?

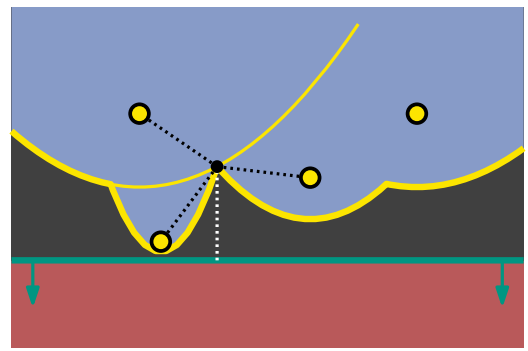
## Sweep-Line Algo

- Sweep-Line Status: Zustand der Beach-Line
- Events: Zeitpunkte an denen sich die BL ändert
- Was heißt „ändert“ in diesem Zusammenhang?
  - ändert sich irgendwie ständig
  - Sequenz zugehöriger Standorte ändert sich selten




## Event-Punkt: neuer Standort *s*

- neue Parabel wird in Beach-Line eingefügt
- spalte Parabel aus aktueller BL über *s* auf



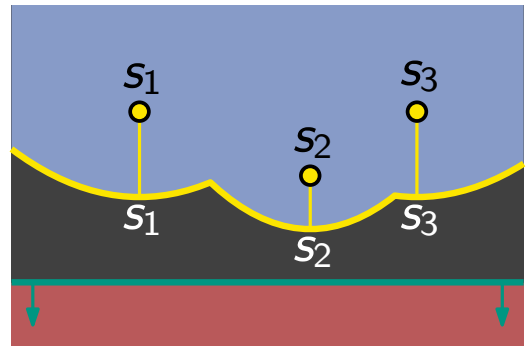
## Event-Punkt: Parabelstück verschwindet

- Wie können wir wissen, wann das passiert?
- die Parabeln dreier Punkte schneiden sich dort
- Schnittpunkt hat von Standorten und Sweep-Line denselben Abstand

# Wann verändert sich die Beach-Line?

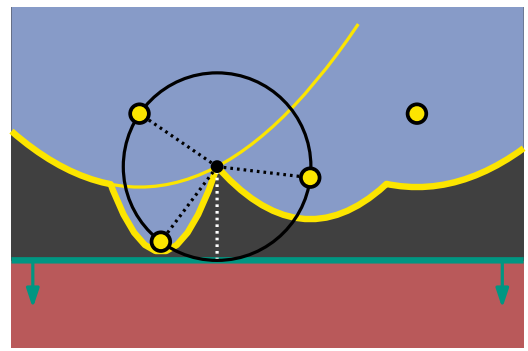
## Sweep-Line Algo

- Sweep-Line Status: Zustand der Beach-Line
- Events: Zeitpunkte an denen sich die BL ändert
- Was heißt „ändert“ in diesem Zusammenhang?
  - ändert sich irgendwie ständig
  - Sequenz zugehöriger Standorte ändert sich selten




## Event-Punkt: neuer Standort *s*

- neue Parabel wird in Beach-Line eingefügt
- spalte Parabel aus aktueller BL über *s* auf



## Event-Punkt: Parabelstück verschwindet

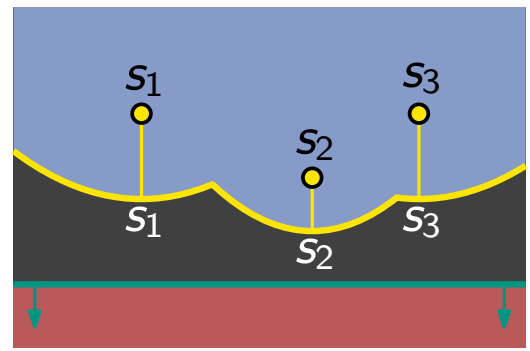
- Wie können wir wissen, wann das passiert?
- die Parabeln dreier Punkte schneiden sich dort
- Schnittpunkt hat von Standorten und Sweep-Line denselben Abstand
- kein anderer Standort ist dem Schnittpunkt näher

Warum nicht?

# Wann verändert sich die Beach-Line?

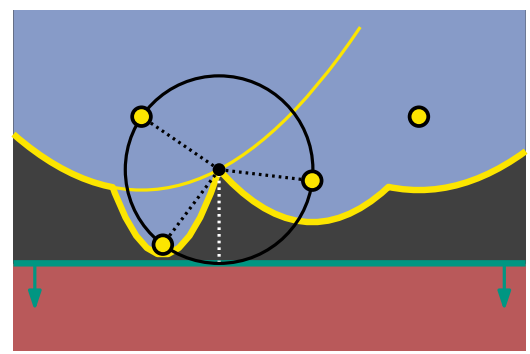
## Sweep-Line Algo

- Sweep-Line Status: Zustand der Beach-Line
- Events: Zeitpunkte an denen sich die BL ändert
- Was heißt „ändert“ in diesem Zusammenhang?
  - ändert sich irgendwie ständig
  - Sequenz zugehöriger Standorte ändert sich selten




## Event-Punkt: neuer Standort *s*

- neue Parabel wird in Beach-Line eingefügt
- spalte Parabel aus aktueller BL über *s* auf



## Event-Punkt: Parabelstück verschwindet

- Wie können wir wissen, wann das passiert?
- die Parabeln dreier Punkte schneiden sich dort
- Schnittpunkt hat von Standorten und Sweep-Line denselben Abstand
- kein anderer Standort ist dem Schnittpunkt näher

Warum nicht?

- diese Events heißen Kreis-Events
- definiert durch die Standorte dreier aufeinanderfolgender Parabelstücke

# Zwischenstand

# Zwischenstand

**Event-Punkte: Veränderung der Beach-Line**

- Standort-Event $\rightarrow$ neues Parabelstück einfügen
- Kreis-Event $\rightarrow$ Parabelstück verschwindet

(nicht bewiesen: das sind die einzigen Situationen, in denen sich die BL ändert)

# Zwischenstand

**Event-Punkte: Veränderung der Beach-Line**

- Standort-Event $\rightarrow$ neues Parabelstück einfügen
- Kreis-Event $\rightarrow$ Parabelstück verschwindet

(nicht bewiesen: das sind die einzigen Situationen, in denen sich die BL ändert)

**Kreis-Events finden**

- bei jeder Veränderung der Beach-Line:
  neue Tripel konsekutiver Parabelstücke $\rightarrow$ ggf. neues Kreis-Event

# Zwischenstand

**Event-Punkte: Veränderung der Beach-Line**

- Standort-Event $\rightarrow$ neues Parabelstück einfügen
- Kreis-Event $\rightarrow$ Parabelstück verschwindet

(nicht bewiesen: das sind die einzigen Situationen, in denen sich die BL ändert)

**Kreis-Events finden**

- bei jeder Veränderung der Beach-Line:
  neue Tripel konsekutiver Parabelstücke $\rightarrow$ ggf. neues Kreis-Event

**Voronoi-Diagramm**

- Kreis-Event $\rightarrow$ neuer Knoten im Voronoi Diagramm
- jeder Knoten wird so gefunden Warum?

# Zwischenstand

**Event-Punkte: Veränderung der Beach-Line**

- Standort-Event $\rightarrow$ neues Parabelstück einfügen
- Kreis-Event $\rightarrow$ Parabelstück verschwindet

(nicht bewiesen: das sind die einzigen Situationen, in denen sich die BL ändert)

**Kreis-Events finden**

- bei jeder Veränderung der Beach-Line:
  neue Tripel konsekutiver Parabelstücke $\rightarrow$ ggf. neues Kreis-Event

**Voronoi-Diagramm**

- Kreis-Event $\rightarrow$ neuer Knoten im Voronoi Diagramm
- jeder Knoten wird so gefunden Warum?

**Offene Fragen**

- Wie verwalten wir die Beach-Line?

# Zwischenstand

**Event-Punkte: Veränderung der Beach-Line**

- Standort-Event $\rightarrow$ neues Parabelstück einfügen
- Kreis-Event $\rightarrow$ Parabelstück verschwindet

(nicht bewiesen: das sind die einzigen Situationen, in denen sich die BL ändert)

**Kreis-Events finden**

- bei jeder Veränderung der Beach-Line:
  neue Tripel konsekutiver Parabelstücke $\rightarrow$ ggf. neues Kreis-Event

**Voronoi-Diagramm**

- Kreis-Event $\rightarrow$ neuer Knoten im Voronoi Diagramm
- jeder Knoten wird so gefunden Warum?

**Offene Fragen**

- Wie verwalten wir die Beach-Line?
- Wie verwalten wir die Events?

# Zwischenstand

**Event-Punkte: Veränderung der Beach-Line**

- Standort-Event $\rightarrow$ neues Parabelstück einfügen
- Kreis-Event $\rightarrow$ Parabelstück verschwindet

(nicht bewiesen: das sind die einzigen Situationen, in denen sich die BL ändert)

**Kreis-Events finden**

- bei jeder Veränderung der Beach-Line:
  neue Tripel konsekutiver Parabelstücke $\rightarrow$ ggf. neues Kreis-Event

**Voronoi-Diagramm**

- Kreis-Event $\rightarrow$ neuer Knoten im Voronoi Diagramm
- jeder Knoten wird so gefunden Warum?

**Offene Fragen**

- Wie verwalten wir die Beach-Line?
- Wie verwalten wir die Events?
- Wie bekommen wir am Ende das Voronoi-Diagramm?

# Zwischenstand

**Event-Punkte: Veränderung der Beach-Line**

- Standort-Event $\rightarrow$ neues Parabelstück einfügen
- Kreis-Event $\rightarrow$ Parabelstück verschwindet

(nicht bewiesen: das sind die einzigen Situationen, in denen sich die BL ändert)

**Kreis-Events finden**

- bei jeder Veränderung der Beach-Line:
  neue Tripel konsekutiver Parabelstücke $\rightarrow$ ggf. neues Kreis-Event

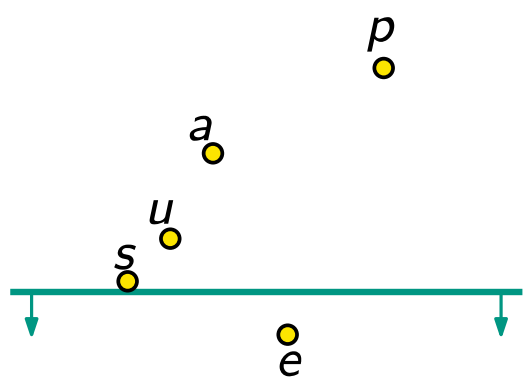
**Voronoi-Diagramm**

- Kreis-Event $\rightarrow$ neuer Knoten im Voronoi Diagramm
- jeder Knoten wird so gefunden Warum?

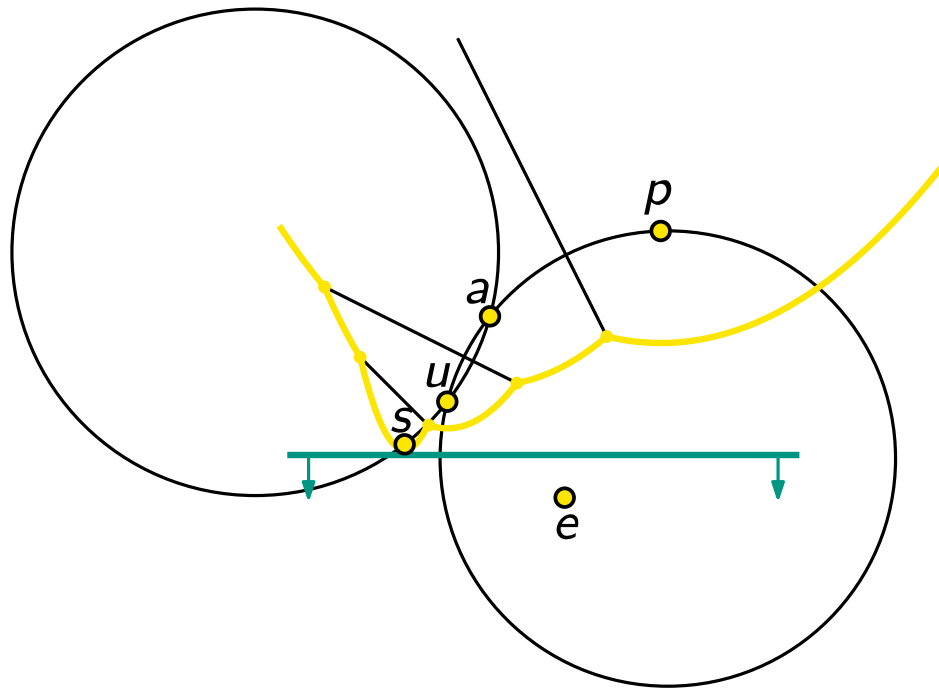
**Offene Fragen**

- Wie verwalten wir die Beach-Line?
- Wie verwalten wir die Events?
- Wie bekommen wir am Ende das Voronoi-Diagramm?
- Was machen wir mit Sonderfällen?
  - Standorte mit gleicher $y$-Koordinate
  - Knoten mit Grad $> 3$
  - sonstige?

# Wie viele Events sind in der Queue?

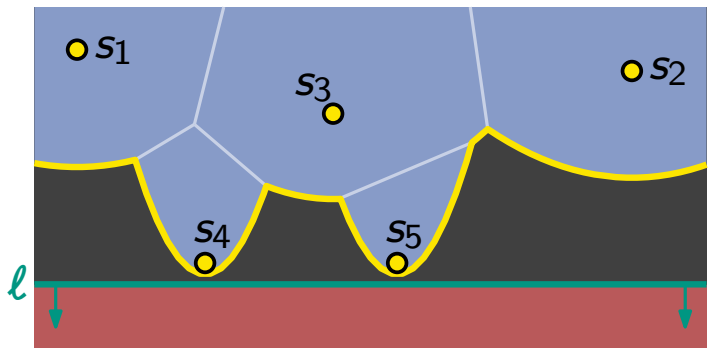


# Wie viele Events sind in der Queue?




**Antwort:** 3 (ein Standort- und zwei Kreis-Events)

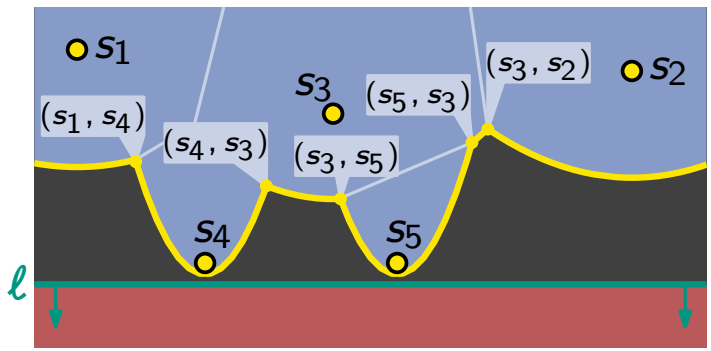
# Verwaltung der Beach-Line




## Beobachtung

- Parabeln können in mehrere Teile zerlegt sein
- es genügt nicht den Standort zu kennen

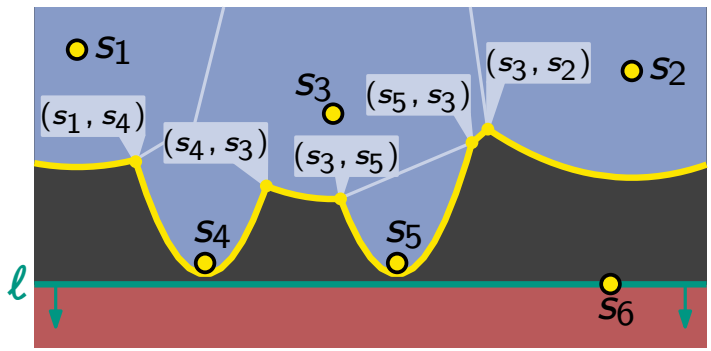
# Verwaltung der Beach-Line




## Beobachtung

- Parabeln können in mehrere Teile zerlegt sein
- es genügt nicht den Standort zu kennen
- speichere stattdessen eine Repräsentation der Schnittpunkte, die von $\ell$ unabhängig ist

# Verwaltung der Beach-Line

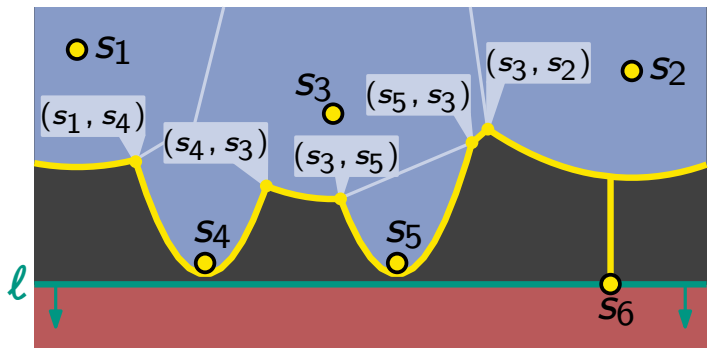



## Beobachtung

- Parabeln können in mehrere Teile zerlegt sein
- es genügt nicht den Standort zu kennen
- speichere stattdessen eine Repräsentation der Schnittpunkte, die von $\ell$ unabhängig ist

## Standort-Event

# Verwaltung der Beach-Line



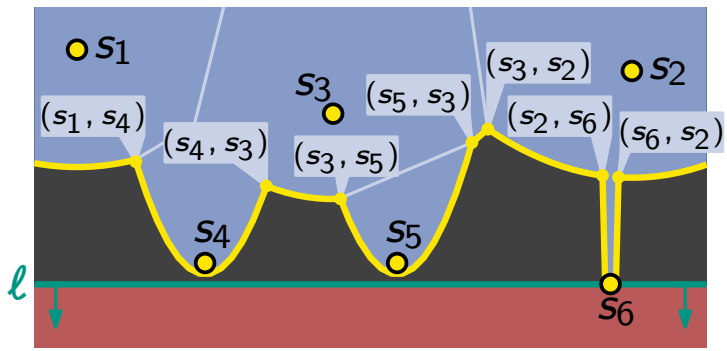

## Beobachtung

- Parabeln können in mehrere Teile zerlegt sein
- es genügt nicht den Standort zu kennen
- speichere stattdessen eine Repräsentation der Schnittpunkte, die von $\ell$ unabhängig ist

## Standort-Event

- finde $x$-Koordinate des neuen Standorts in der Menge der Schnittpunkte

# Verwaltung der Beach-Line



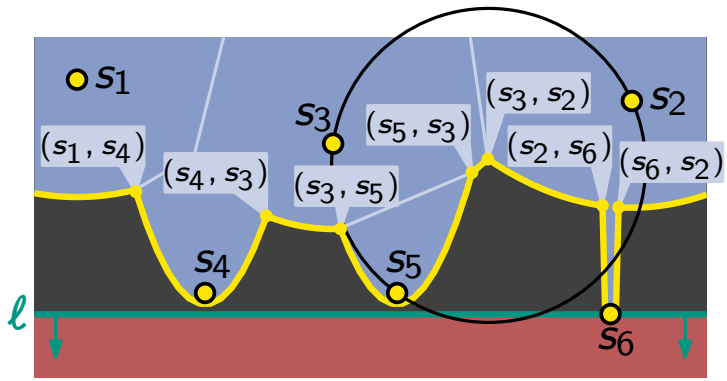

## Beobachtung

- Parabeln können in mehrere Teile zerlegt sein
- es genügt nicht den Standort zu kennen
- speichere stattdessen eine Repräsentation der Schnittpunkte, die von $\ell$ unabhängig ist

## Standort-Event

- finde $x$-Koordinate des neuen Standorts in der Menge der Schnittpunkte
- füge zwei neue Schnittpunkte ein

# Verwaltung der Beach-Line




## Beobachtung

- Parabeln können in mehrere Teile zerlegt sein
- es genügt nicht den Standort zu kennen
- speichere stattdessen eine Repräsentation der Schnittpunkte, die von $\ell$ unabhängig ist

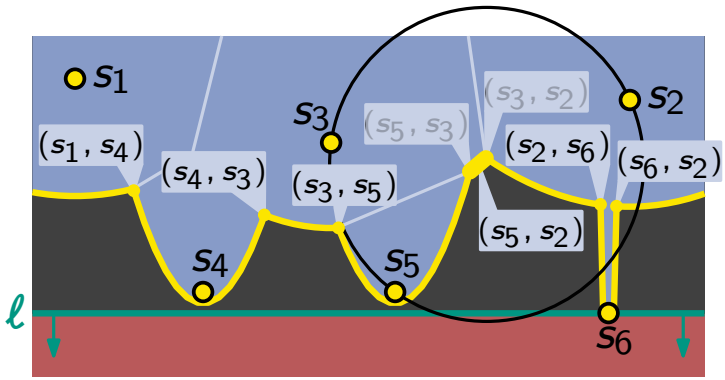
## Standort-Event

- finde $x$-Koordinate des neuen Standorts in der Menge der Schnittpunkte
- füge zwei neue Schnittpunkte ein

## Kreis-Event

- gehört zu zwei konsekutiven Schnittpunkten (hier: $(s_5, s_3)$ und $(s_3, s_2)$)

# Verwaltung der Beach-Line




## Beobachtung

- Parabeln können in mehrere Teile zerlegt sein
- es genügt nicht den Standort zu kennen
- speichere stattdessen eine Repräsentation der Schnittpunkte, die von $\ell$ unabhängig ist

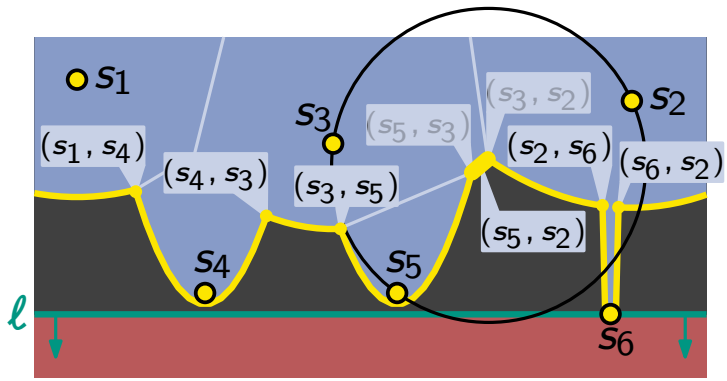
## Standort-Event

- finde $x$-Koordinate des neuen Standorts in der Menge der Schnittpunkte
- füge zwei neue Schnittpunkte ein

## Kreis-Event

- gehört zu zwei konsekutiven Schnittpunkten (hier: $(s_5, s_3)$ und $(s_3, s_2)$)
- entferne die beiden und füge entsprechenden neuen ein (hier: $(s_5, s_2)$)

# Verwaltung der Beach-Line




## Beobachtung

- Parabeln können in mehrere Teile zerlegt sein
- es genügt nicht den Standort zu kennen
- speichere stattdessen eine Repräsentation der Schnittpunkte, die von $\ell$ unabhängig ist

## Standort-Event

- finde $x$-Koordinate des neuen Standorts in der Menge der Schnittpunkte
- füge zwei neue Schnittpunkte ein

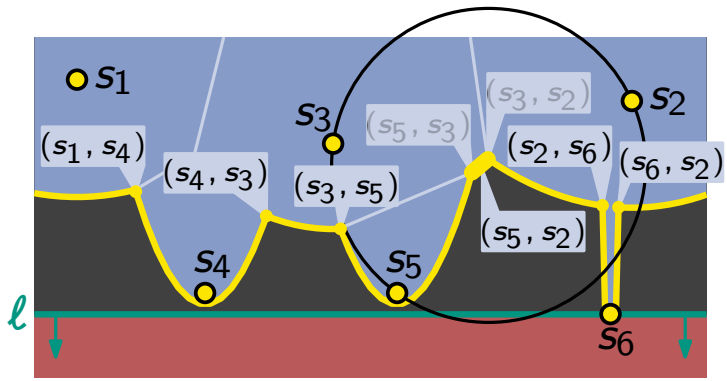
## Kreis-Event

- gehört zu zwei konsekutiven Schnittpunkten (hier: $(s_5, s_3)$ und $(s_3, s_2)$)
- entferne die beiden und füge entsprechenden neuen ein (hier: $(s_5, s_2)$)

## Datenstruktur

- wir wollen suchen (bezüglich $x$), einfügen und löschen

# Verwaltung der Beach-Line




## Beobachtung

- Parabeln können in mehrere Teile zerlegt sein
- es genügt nicht den Standort zu kennen
- speichere stattdessen eine Repräsentation der Schnittpunkte, die von $\ell$ unabhängig ist

## Standort-Event

- finde $x$-Koordinate des neuen Standorts in der Menge der Schnittpunkte
- füge zwei neue Schnittpunkte ein

## Kreis-Event

- gehört zu zwei konsekutiven Schnittpunkten (hier: $(s_5, s_3)$ und $(s_3, s_2)$)
- entferne die beiden und füge entsprechenden neuen ein (hier: $(s_5, s_2)$)

## Datenstruktur

- wir wollen suchen (bezüglich $x$), einfügen und löschen
- Binärer Suchbaum bietet sich an ($O(\log n)$ pro Operation)

# Verwaltung der Events

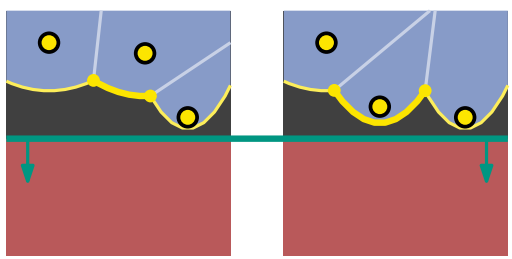
## Beobachtung

- Standort-Events kennen wir alle zu Beginn
- Kreis-Events: gegeben durch benachbarte Schnittpunkten in der BL

# Verwaltung der Events

## Beobachtung

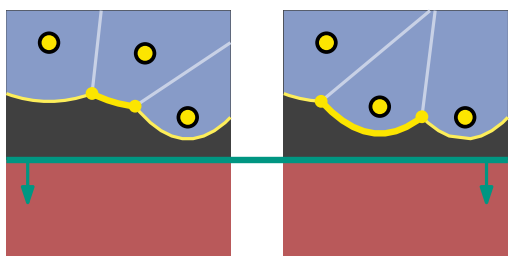
- Standort-Events kennen wir alle zu Beginn
- Kreis-Events: gegeben durch benachbarte Schnittpunkten in der BL
- nicht jedes Paar benachbarter Schnittpunkte führt zu einem Kreis-Event



# Verwaltung der Events

## Beobachtung

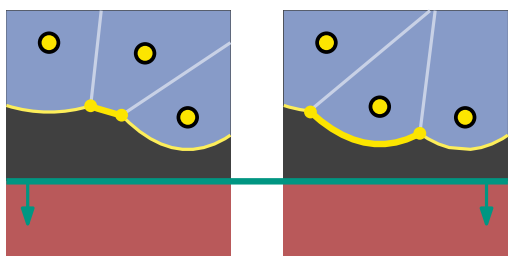
- Standort-Events kennen wir alle zu Beginn
- Kreis-Events: gegeben durch benachbarte Schnittpunkten in der BL
- nicht jedes Paar benachbarter Schnittpunkte führt zu einem Kreis-Event



# Verwaltung der Events

## Beobachtung

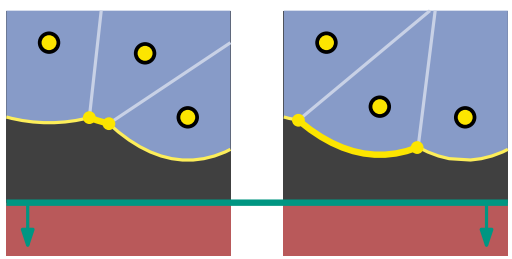
- Standort-Events kennen wir alle zu Beginn
- Kreis-Events: gegeben durch benachbarte Schnittpunkten in der BL
- nicht jedes Paar benachbarter Schnittpunkte führt zu einem Kreis-Event



# Verwaltung der Events

## Beobachtung

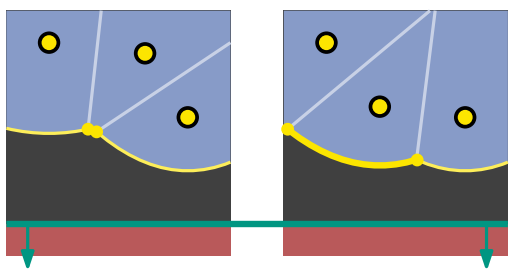
- Standort-Events kennen wir alle zu Beginn
- Kreis-Events: gegeben durch benachbarte Schnittpunkten in der BL
- nicht jedes Paar benachbarter Schnittpunkte führt zu einem Kreis-Event



# Verwaltung der Events

## Beobachtung

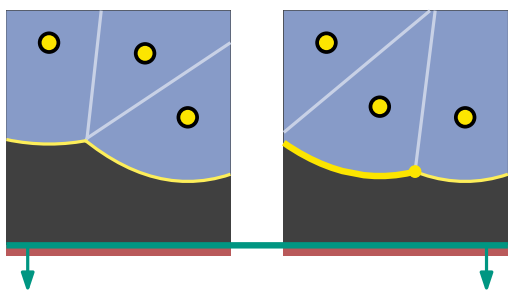
- Standort-Events kennen wir alle zu Beginn
- Kreis-Events: gegeben durch benachbarte Schnittpunkten in der BL
- nicht jedes Paar benachbarter Schnittpunkte führt zu einem Kreis-Event



# Verwaltung der Events

## Beobachtung

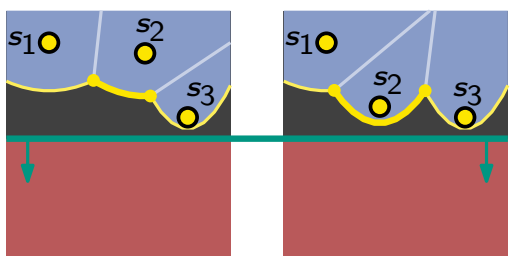
- Standort-Events kennen wir alle zu Beginn
- Kreis-Events: gegeben durch benachbarte Schnittpunkten in der BL
- nicht jedes Paar benachbarter Schnittpunkte führt zu einem Kreis-Event



# Verwaltung der Events

## Beobachtung

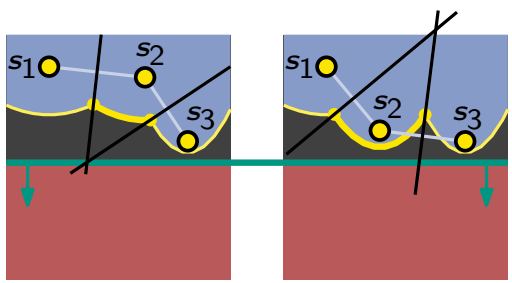
- Standort-Events kennen wir alle zu Beginn
- Kreis-Events: gegeben durch benachbarte Schnittpunkten in der BL
- nicht jedes Paar benachbarter Schnittpunkte führt zu einem Kreis-Event
  - ob wir ein Kreis-Event haben kann an den drei zugehörigen Punkten abgelesen werden



# Verwaltung der Events

## Beobachtung

- Standort-Events kennen wir alle zu Beginn
- Kreis-Events: gegeben durch benachbarte Schnittpunkten in der BL
- nicht jedes Paar benachbarter Schnittpunkte führt zu einem Kreis-Event

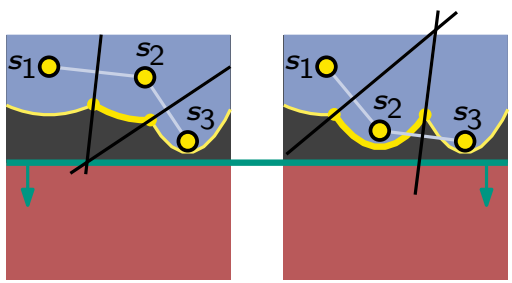



- ob wir ein Kreis-Event haben kann an den drei zugehörigen Punkten abgelesen werden
- Mittelsenkrechten konvergieren (divergieren) $\rightarrow$ Parabelstück schrumpft (wächst) $\rightarrow$ (kein) Kreisevent

# Verwaltung der Events

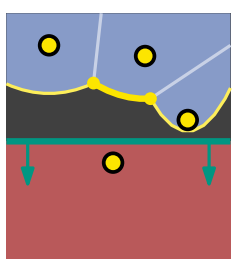
## Beobachtung

- Standort-Events kennen wir alle zu Beginn
- Kreis-Events: gegeben durch benachbarte Schnittpunkten in der BL
- nicht jedes Paar benachbarter Schnittpunkte führt zu einem Kreis-Event




- ob wir ein Kreis-Event haben kann an den drei zugehörigen Punkten abgelesen werden
- Mittelsenkrechten konvergieren (divergieren) $\rightarrow$ Parabelstück schrumpft (wächst) $\rightarrow$ (kein) Kreisevent

## Falscher Alarm

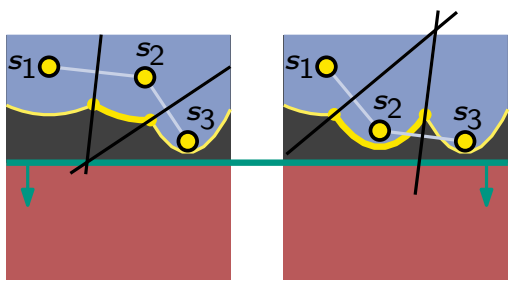


- ggf. findet ein Kreis-Event gar nicht statt

# Verwaltung der Events

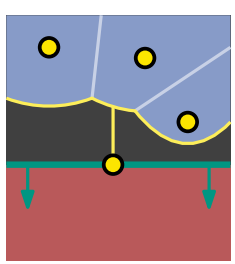
## Beobachtung

- Standort-Events kennen wir alle zu Beginn
- Kreis-Events: gegeben durch benachbarte Schnittpunkten in der BL
- nicht jedes Paar benachbarter Schnittpunkte führt zu einem Kreis-Event




- ob wir ein Kreis-Event haben kann an den drei zugehörigen Punkten abgelesen werden
- Mittelsenkrechten konvergieren (divergieren) $\rightarrow$ Parabelstück schrumpft (wächst) $\rightarrow$ (kein) Kreisevent

## Falscher Alarm

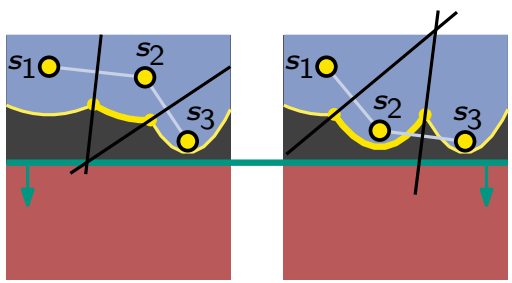


- ggf. findet ein Kreis-Event gar nicht statt

# Verwaltung der Events

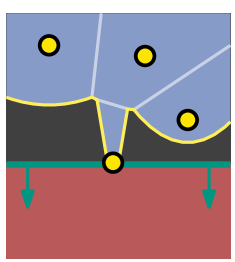
## Beobachtung

- Standort-Events kennen wir alle zu Beginn
- Kreis-Events: gegeben durch benachbarte Schnittpunkten in der BL
- nicht jedes Paar benachbarter Schnittpunkte führt zu einem Kreis-Event




- ob wir ein Kreis-Event haben kann an den drei zugehörigen Punkten abgelesen werden
- Mittelsenkrechten konvergieren (divergieren) $\rightarrow$ Parabelstück schrumpft (wächst) $\rightarrow$ (kein) Kreisevent

## Falscher Alarm

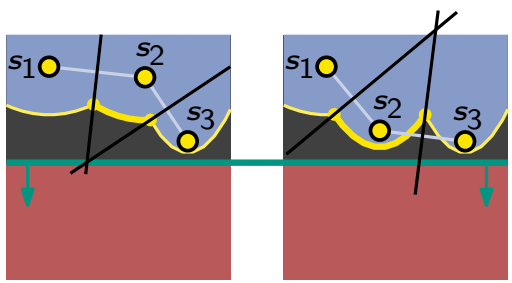


- ggf. findet ein Kreis-Event gar nicht statt

# Verwaltung der Events

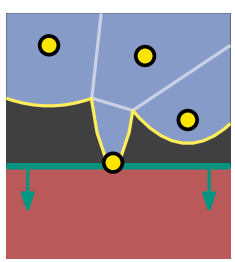
## Beobachtung

- Standort-Events kennen wir alle zu Beginn
- Kreis-Events: gegeben durch benachbarte Schnittpunkten in der BL
- nicht jedes Paar benachbarter Schnittpunkte führt zu einem Kreis-Event




- ob wir ein Kreis-Event haben kann an den drei zugehörigen Punkten abgelesen werden
- Mittelsenkrechten konvergieren (divergieren) $\rightarrow$ Parabelstück schrumpft (wächst) $\rightarrow$ (kein) Kreisevent

## Falscher Alarm

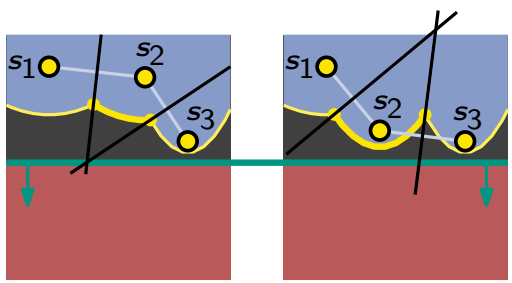


- ggf. findet ein Kreis-Event gar nicht statt

# Verwaltung der Events

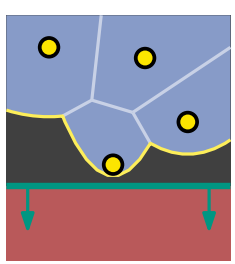
## Beobachtung

- Standort-Events kennen wir alle zu Beginn
- Kreis-Events: gegeben durch benachbarte Schnittpunkten in der BL
- nicht jedes Paar benachbarter Schnittpunkte führt zu einem Kreis-Event




- ob wir ein Kreis-Event haben kann an den drei zugehörigen Punkten abgelesen werden
- Mittelsenkrechten konvergieren (divergieren) $\rightarrow$ Parabelstück schrumpft (wächst) $\rightarrow$ (kein) Kreisevent

## Falscher Alarm

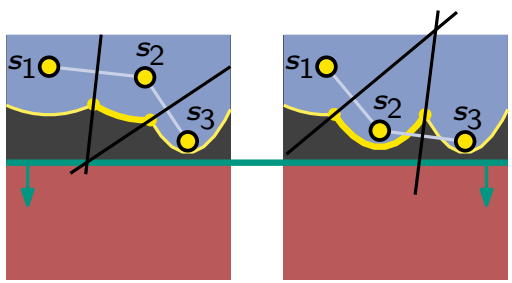


- ggf. findet ein Kreis-Event gar nicht statt

# Verwaltung der Events

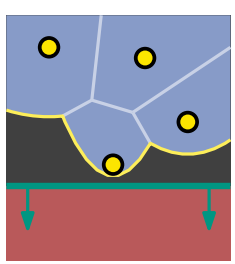
## Beobachtung

- Standort-Events kennen wir alle zu Beginn
- Kreis-Events: gegeben durch benachbarte Schnittpunkten in der BL
- nicht jedes Paar benachbarter Schnittpunkte führt zu einem Kreis-Event




- ob wir ein Kreis-Event haben kann an den drei zugehörigen Punkten abgelesen werden
- Mittelsenkrechten konvergieren (divergieren) $\rightarrow$ Parabelstück schrumpft (wächst) $\rightarrow$ (kein) Kreisevent

## Falscher Alarm

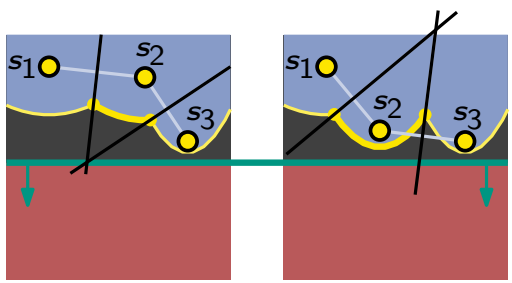


- ggf. findet ein Kreis-Event gar nicht statt
- bei jedem Standort-Event müssen wir das Kreis-Event für die aufgespaltene Parabel entfernen (falls es existiert)

# Verwaltung der Events

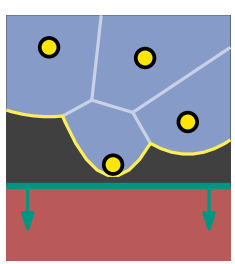
## Beobachtung

- Standort-Events kennen wir alle zu Beginn
- Kreis-Events: gegeben durch benachbarte Schnittpunkten in der BL
- nicht jedes Paar benachbarter Schnittpunkte führt zu einem Kreis-Event




- ob wir ein Kreis-Event haben kann an den drei zugehörigen Punkten abgelesen werden
- Mittelsenkrechten konvergieren (divergieren) $\rightarrow$ Parabelstück schrumpft (wächst) $\rightarrow$ (kein) Kreisevent

## Falscher Alarm



- ggf. findet ein Kreis-Event gar nicht statt
- bei jedem Standort-Event müssen wir das Kreis-Event für die aufgespaltene Parabel entfernen (falls es existiert)

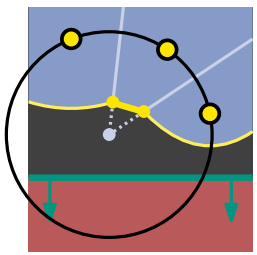
## Alles kein Problem

- Benutze binären Suchbaum für die Queue
- jede der Operationen braucht $O(\log n)$ Zeit

# Konstruktion des Voronoi-Diagramms

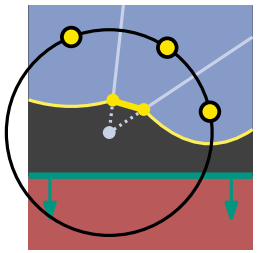
## Schon gesehen

- Punkt $p$ ist Knoten $\Leftrightarrow$ $p$ ist Kreismittelpunkt eines Kreis-Events
- $p$ liegt auf einer Kante $\Leftrightarrow$ $p$ ist irgendwann Schnittpunkt von Parabelstücken



# Konstruktion des Voronoi-Diagramms

## Schon gesehen



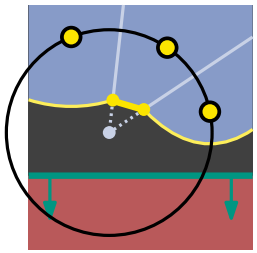
- Punkt $p$ ist Knoten $\Leftrightarrow$ $p$ ist Kreismittelpunkt eines Kreis-Events
- $p$ liegt auf einer Kante $\Leftrightarrow$ $p$ ist irgendwann Schnittpunkt von Parabelstücken

## Plan

- berechne doppelt verkettete Kantenliste von $\mathrm{Vor}(S)$ beim Sweepen
  (unendlich lange Kanten muss man irgendwie handhaben; z.B. mit einer Bounding-Box)

# Konstruktion des Voronoi-Diagramms

## Schon gesehen



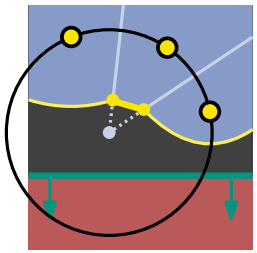
- Punkt $p$ ist Knoten $\Leftrightarrow$ $p$ ist Kreismittelpunkt eines Kreis-Events
- $p$ liegt auf einer Kante $\Leftrightarrow$ $p$ ist irgendwann Schnittpunkt von Parabelstücken

## Plan

- berechne doppelt verkettete Kantenliste von $\mathrm{Vor}(S)$ beim Sweepen
  (unendlich lange Kanten muss man irgendwie handhaben; z.B. mit einer Bounding-Box)
- Standort-Event: neue Parabel mit Schnittpunkten $\rightarrow$ neue Halbkanten

# Konstruktion des Voronoi-Diagramms

## Schon gesehen



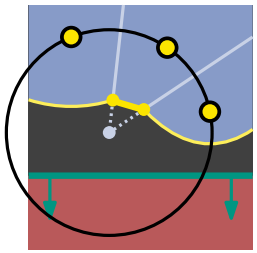
- Punkt $p$ ist Knoten $\Leftrightarrow$ $p$ ist Kreismittelpunkt eines Kreis-Events
- $p$ liegt auf einer Kante $\Leftrightarrow$ $p$ ist irgendwann Schnittpunkt von Parabelstücken

## Plan

- berechne doppelt verkettete Kantenliste von $\mathrm{Vor}(S)$ beim Sweepen
  (unendlich lange Kanten muss man irgendwie handhaben; z.B. mit einer Bounding-Box)
- Standort-Event: neue Parabel mit Schnittpunkten $\rightarrow$ neue Halbkanten
- Kreis-Event: neuer Knoten $\rightarrow$ hänge Halbkanten an neuen Knoten
  neuer Schnittpunkt $\rightarrow$ neue Halbkante

# Konstruktion des Voronoi-Diagramms

## Schon gesehen

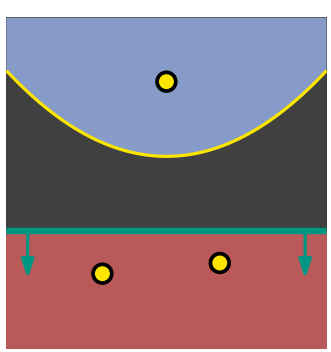


- Punkt $p$ ist Knoten $\Leftrightarrow$ $p$ ist Kreismittelpunkt eines Kreis-Events
- $p$ liegt auf einer Kante $\Leftrightarrow$ $p$ ist irgendwann Schnittpunkt von Parabelstücken

## Plan

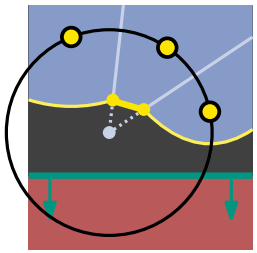
- berechne doppelt verkettete Kantenliste von $\mathrm{Vor}(S)$ beim Sweepen
  (unendlich lange Kanten muss man irgendwie handhaben; z.B. mit einer Bounding-Box)
- Standort-Event: neue Parabel mit Schnittpunkten $\rightarrow$ neue Halbkanten
- Kreis-Event: neuer Knoten $\rightarrow$ hänge Halbkanten an neuen Knoten
  neuer Schnittpunkt $\rightarrow$ neue Halbkante

## Beispiel



# Konstruktion des Voronoi-Diagramms

## Schon gesehen

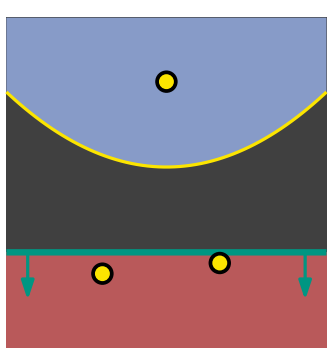


- Punkt $p$ ist Knoten $\Leftrightarrow$ $p$ ist Kreismittelpunkt eines Kreis-Events
- $p$ liegt auf einer Kante $\Leftrightarrow$ $p$ ist irgendwann Schnittpunkt von Parabelstücken

## Plan

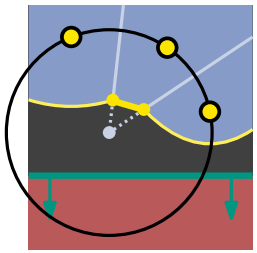
- berechne doppelt verkettete Kantenliste von $\mathrm{Vor}(S)$ beim Sweepen
  (unendlich lange Kanten muss man irgendwie handhaben; z.B. mit einer Bounding-Box)
- Standort-Event: neue Parabel mit Schnittpunkten $\rightarrow$ neue Halbkanten
- Kreis-Event: neuer Knoten $\rightarrow$ hänge Halbkanten an neuen Knoten
  neuer Schnittpunkt $\rightarrow$ neue Halbkante

## Beispiel



# Konstruktion des Voronoi-Diagramms

## Schon gesehen

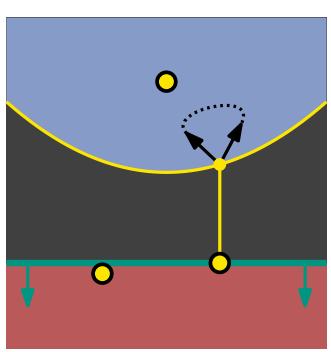


- Punkt $p$ ist Knoten $\Leftrightarrow$ $p$ ist Kreismittelpunkt eines Kreis-Events
- $p$ liegt auf einer Kante $\Leftrightarrow$ $p$ ist irgendwann Schnittpunkt von Parabelstücken

## Plan

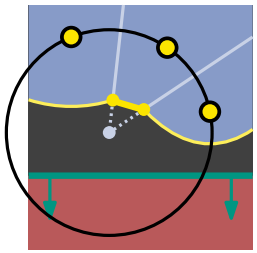
- berechne doppelt verkettete Kantenliste von $\mathrm{Vor}(S)$ beim Sweepen
  (unendlich lange Kanten muss man irgendwie handhaben; z.B. mit einer Bounding-Box)
- Standort-Event: neue Parabel mit Schnittpunkten $\rightarrow$ neue Halbkanten
- Kreis-Event: neuer Knoten $\rightarrow$ hänge Halbkanten an neuen Knoten
  neuer Schnittpunkt $\rightarrow$ neue Halbkante

## Beispiel



# Konstruktion des Voronoi-Diagramms

## Schon gesehen

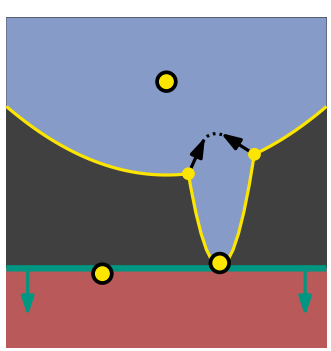


- Punkt $p$ ist Knoten $\Leftrightarrow$ $p$ ist Kreismittelpunkt eines Kreis-Events
- $p$ liegt auf einer Kante $\Leftrightarrow$ $p$ ist irgendwann Schnittpunkt von Parabelstücken

## Plan

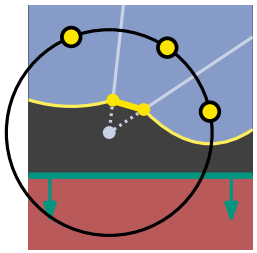
- berechne doppelt verkettete Kantenliste von $\mathrm{Vor}(S)$ beim Sweepen
  (unendlich lange Kanten muss man irgendwie handhaben; z.B. mit einer Bounding-Box)
- Standort-Event: neue Parabel mit Schnittpunkten $\rightarrow$ neue Halbkanten
- Kreis-Event: neuer Knoten $\rightarrow$ hänge Halbkanten an neuen Knoten
  neuer Schnittpunkt $\rightarrow$ neue Halbkante

## Beispiel



# Konstruktion des Voronoi-Diagramms

## Schon gesehen

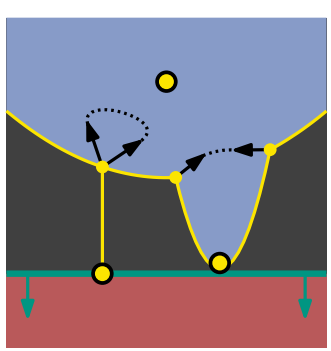


- Punkt $p$ ist Knoten $\Leftrightarrow$ $p$ ist Kreismittelpunkt eines Kreis-Events
- $p$ liegt auf einer Kante $\Leftrightarrow$ $p$ ist irgendwann Schnittpunkt von Parabelstücken

## Plan

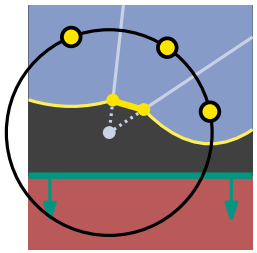
- berechne doppelt verkettete Kantenliste von $\mathrm{Vor}(S)$ beim Sweepen
  (unendlich lange Kanten muss man irgendwie handhaben; z.B. mit einer Bounding-Box)
- Standort-Event: neue Parabel mit Schnittpunkten $\rightarrow$ neue Halbkanten
- Kreis-Event: neuer Knoten $\rightarrow$ hänge Halbkanten an neuen Knoten
  neuer Schnittpunkt $\rightarrow$ neue Halbkante

## Beispiel



# Konstruktion des Voronoi-Diagramms

## Schon gesehen

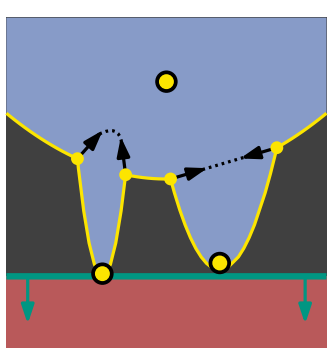


- Punkt $p$ ist Knoten $\Leftrightarrow$ $p$ ist Kreismittelpunkt eines Kreis-Events
- $p$ liegt auf einer Kante $\Leftrightarrow$ $p$ ist irgendwann Schnittpunkt von Parabelstücken

## Plan

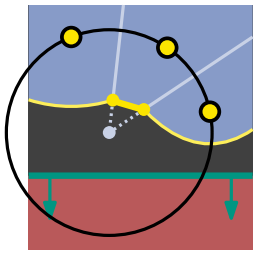
- berechne doppelt verkettete Kantenliste von $\mathrm{Vor}(S)$ beim Sweepen
  (unendlich lange Kanten muss man irgendwie handhaben; z.B. mit einer Bounding-Box)
- Standort-Event: neue Parabel mit Schnittpunkten $\rightarrow$ neue Halbkanten
- Kreis-Event: neuer Knoten $\rightarrow$ hänge Halbkanten an neuen Knoten
  neuer Schnittpunkt $\rightarrow$ neue Halbkante

## Beispiel



# Konstruktion des Voronoi-Diagramms

## Schon gesehen

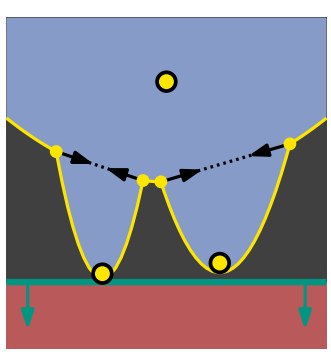


- Punkt $p$ ist Knoten $\Leftrightarrow$ $p$ ist Kreismittelpunkt eines Kreis-Events
- $p$ liegt auf einer Kante $\Leftrightarrow$ $p$ ist irgendwann Schnittpunkt von Parabelstücken

## Plan

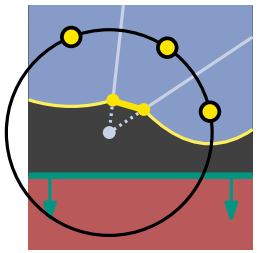
- berechne doppelt verkettete Kantenliste von $\mathrm{Vor}(S)$ beim Sweepen
  (unendlich lange Kanten muss man irgendwie handhaben; z.B. mit einer Bounding-Box)
- Standort-Event: neue Parabel mit Schnittpunkten $\rightarrow$ neue Halbkanten
- Kreis-Event: neuer Knoten $\rightarrow$ hänge Halbkanten an neuen Knoten
  neuer Schnittpunkt $\rightarrow$ neue Halbkante

## Beispiel



# Konstruktion des Voronoi-Diagramms

## Schon gesehen

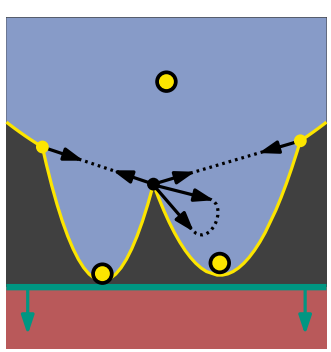


- Punkt $p$ ist Knoten $\Leftrightarrow$ $p$ ist Kreismittelpunkt eines Kreis-Events
- $p$ liegt auf einer Kante $\Leftrightarrow$ $p$ ist irgendwann Schnittpunkt von Parabelstücken

## Plan

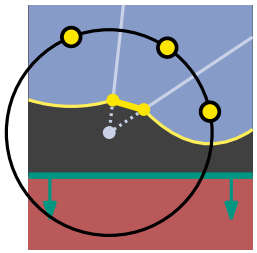
- berechne doppelt verkettete Kantenliste von $\mathrm{Vor}(S)$ beim Sweepen
  (unendlich lange Kanten muss man irgendwie handhaben; z.B. mit einer Bounding-Box)
- Standort-Event: neue Parabel mit Schnittpunkten $\rightarrow$ neue Halbkanten
- Kreis-Event: neuer Knoten $\rightarrow$ hänge Halbkanten an neuen Knoten
  neuer Schnittpunkt $\rightarrow$ neue Halbkante

## Beispiel



# Konstruktion des Voronoi-Diagramms

## Schon gesehen

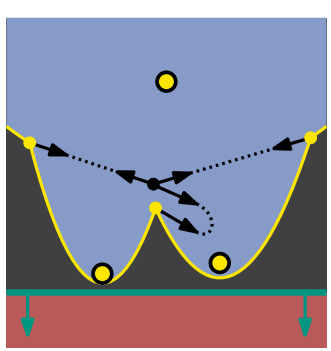


- Punkt $p$ ist Knoten $\Leftrightarrow$ $p$ ist Kreismittelpunkt eines Kreis-Events
- $p$ liegt auf einer Kante $\Leftrightarrow$ $p$ ist irgendwann Schnittpunkt von Parabelstücken

## Plan

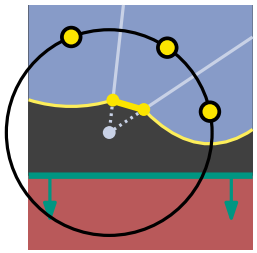
- berechne doppelt verkettete Kantenliste von $\mathrm{Vor}(S)$ beim Sweepen
  (unendlich lange Kanten muss man irgendwie handhaben; z.B. mit einer Bounding-Box)
- Standort-Event: neue Parabel mit Schnittpunkten $\rightarrow$ neue Halbkanten
- Kreis-Event: neuer Knoten $\rightarrow$ hänge Halbkanten an neuen Knoten
  neuer Schnittpunkt $\rightarrow$ neue Halbkante

## Beispiel



# Konstruktion des Voronoi-Diagramms

## Schon gesehen

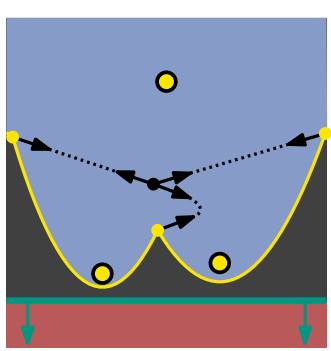


- Punkt $p$ ist Knoten $\Leftrightarrow$ $p$ ist Kreismittelpunkt eines Kreis-Events
- $p$ liegt auf einer Kante $\Leftrightarrow$ $p$ ist irgendwann Schnittpunkt von Parabelstücken

## Plan

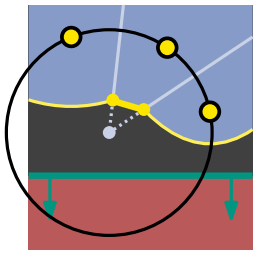
- berechne doppelt verkettete Kantenliste von $\mathrm{Vor}(S)$ beim Sweepen
  (unendlich lange Kanten muss man irgendwie handhaben; z.B. mit einer Bounding-Box)
- Standort-Event: neue Parabel mit Schnittpunkten $\rightarrow$ neue Halbkanten
- Kreis-Event: neuer Knoten $\rightarrow$ hänge Halbkanten an neuen Knoten
  neuer Schnittpunkt $\rightarrow$ neue Halbkante

## Beispiel



# Konstruktion des Voronoi-Diagramms

## Schon gesehen



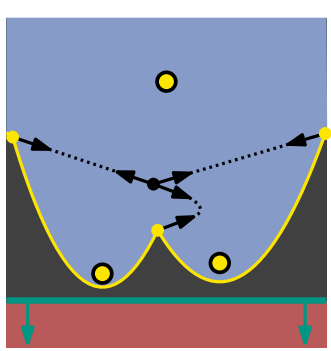
- Punkt $p$ ist Knoten $\Leftrightarrow$ $p$ ist Kreismittelpunkt eines Kreis-Events
- $p$ liegt auf einer Kante $\Leftrightarrow$ $p$ ist irgendwann Schnittpunkt von Parabelstücken

## Plan

- berechne doppelt verkettete Kantenliste von $\mathrm{Vor}(S)$ beim Sweepen
  (unendlich lange Kanten muss man irgendwie handhaben; z.B. mit einer Bounding-Box)
- Standort-Event: neue Parabel mit Schnittpunkten $\rightarrow$ neue Halbkanten
- Kreis-Event: neuer Knoten $\rightarrow$ hänge Halbkanten an neuen Knoten
  neuer Schnittpunkt $\rightarrow$ neue Halbkante

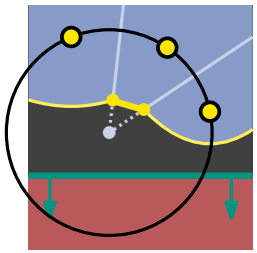
## Beispiel

## Unendlich lange Kanten



# Konstruktion des Voronoi-Diagramms

## Schon gesehen

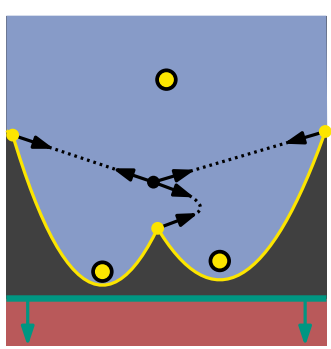


- Punkt $p$ ist Knoten $\Leftrightarrow$ $p$ ist Kreismittelpunkt eines Kreis-Events
- $p$ liegt auf einer Kante $\Leftrightarrow$ $p$ ist irgendwann Schnittpunkt von Parabelstücken

## Plan

- berechne doppelt verkettete Kantenliste von $\mathrm{Vor}(S)$ beim Sweepen
  (unendlich lange Kanten muss man irgendwie handhaben; z.B. mit einer Bounding-Box)
- Standort-Event: neue Parabel mit Schnittpunkten $\rightarrow$ neue Halbkanten
- Kreis-Event: neuer Knoten $\rightarrow$ hänge Halbkanten an neuen Knoten
  neuer Schnittpunkt $\rightarrow$ neue Halbkante

## Beispiel

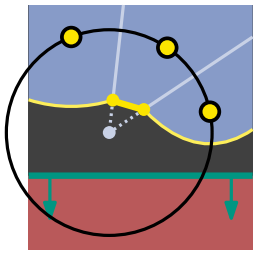


## Unendlich lange Kanten

- manche Halbkanten werden nicht fertig, da ihr Parabelstück nicht verschwindet

# Konstruktion des Voronoi-Diagramms

## Schon gesehen

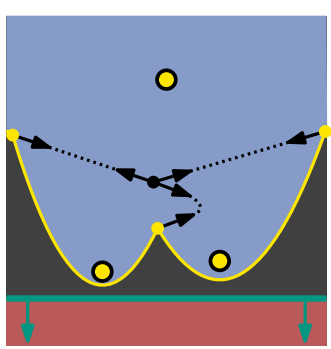


- Punkt $p$ ist Knoten $\Leftrightarrow$ $p$ ist Kreismittelpunkt eines Kreis-Events
- $p$ liegt auf einer Kante $\Leftrightarrow$ $p$ ist irgendwann Schnittpunkt von Parabelstücken

## Plan

- berechne doppelt verkettete Kantenliste von $\mathrm{Vor}(S)$ beim Sweepen
  (unendlich lange Kanten muss man irgendwie handhaben; z.B. mit einer Bounding-Box)
- Standort-Event: neue Parabel mit Schnittpunkten $\rightarrow$ neue Halbkanten
- Kreis-Event: neuer Knoten $\rightarrow$ hänge Halbkanten an neuen Knoten
  neuer Schnittpunkt $\rightarrow$ neue Halbkante

## Beispiel

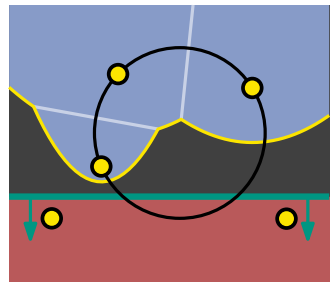


## Unendlich lange Kanten

- manche Halbkanten werden nicht fertig, da ihr Parabelstück nicht verschwindet
- bei leerer Queue muss man die Schnittpunkte in der Beach-Line im Nachgang noch aufräumen
  (abhängig vom Umgang mit unendlichen Kanten in der doppelt-verketteten Kantenliste)

# Sonderfälle

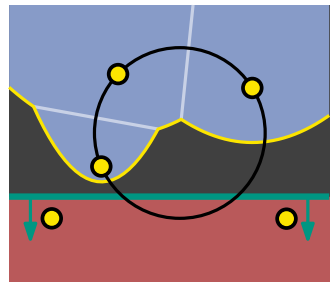
## Events mit gleicher $y$-Koordinate



# Sonderfälle

## Events mit gleicher $y$-Koordinate

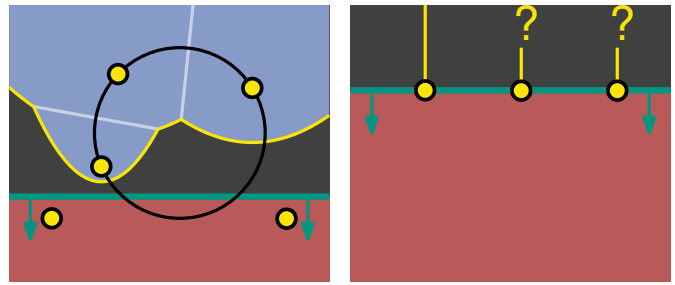
- behandle in beliebiger Reihenfolge



# Sonderfälle

## Events mit gleicher $y$-Koordinate

- behandle in beliebiger Reihenfolge
- Ausnahme: initiale Standort-Events
  (noch keine Parabel über sich)

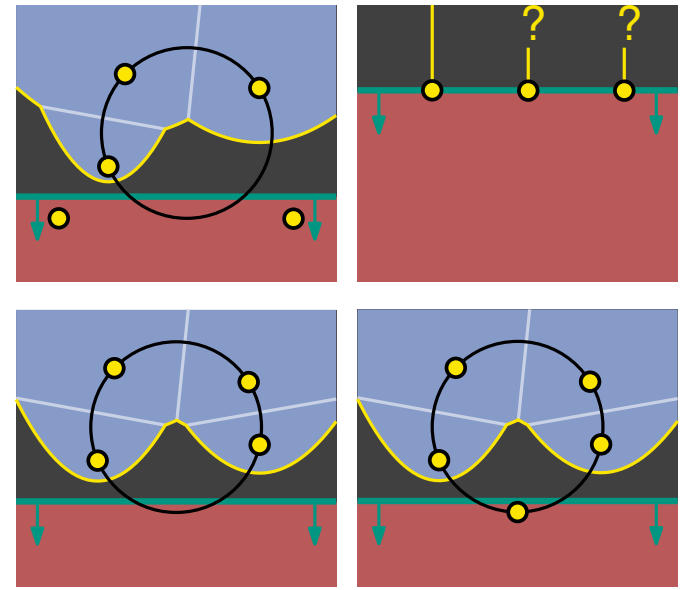


# Sonderfälle

## Events mit gleicher $y$-Koordinate

- behandle in beliebiger Reihenfolge
- Ausnahme: initiale Standort-Events
  (noch keine Parabel über sich)

## Gleiche $x$- und $y$-Koordinate



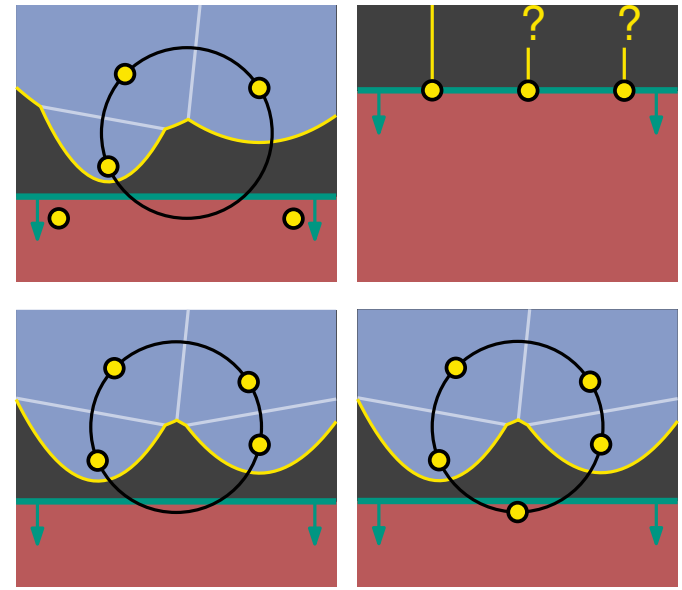
# Sonderfälle

## Events mit gleicher $y$-Koordinate

- behandle in beliebiger Reihenfolge
- Ausnahme: initiale Standort-Events
  (noch keine Parabel über sich)

## Gleiche $x$- und $y$-Koordinate

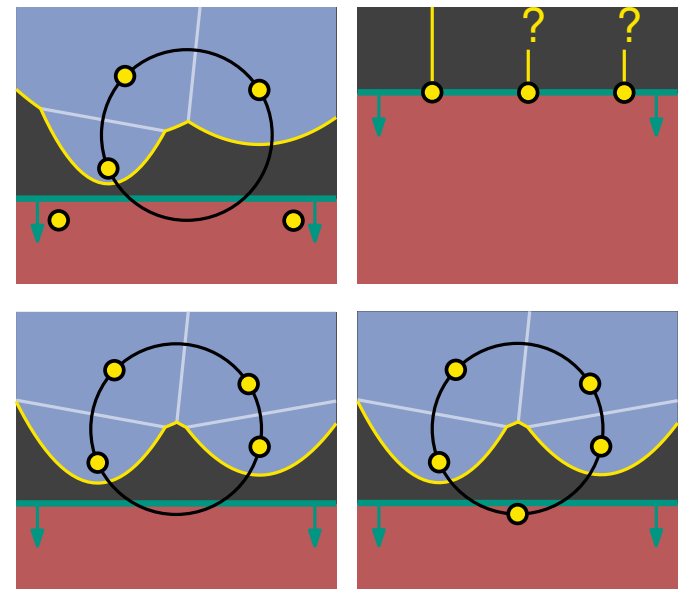
- Knoten in $\mathrm{Vor}(S)$ mit Grad $> 3$



# Sonderfälle

## Events mit gleicher $y$-Koordinate

- behandle in beliebiger Reihenfolge
- Ausnahme: initiale Standort-Events
  (noch keine Parabel über sich)




## Gleiche $x$- und $y$-Koordinate

- Knoten in $\mathrm{Vor}(S)$ mit Grad $> 3$
- Sonderbehandlung $\rightarrow$ Knoten mit Grad $> 3$
- keine Sonderbehandlung $\rightarrow$ mehrere Knoten mit Grad $3$ und Kanten der Länge $0$ dazwischen

# Sonderfälle

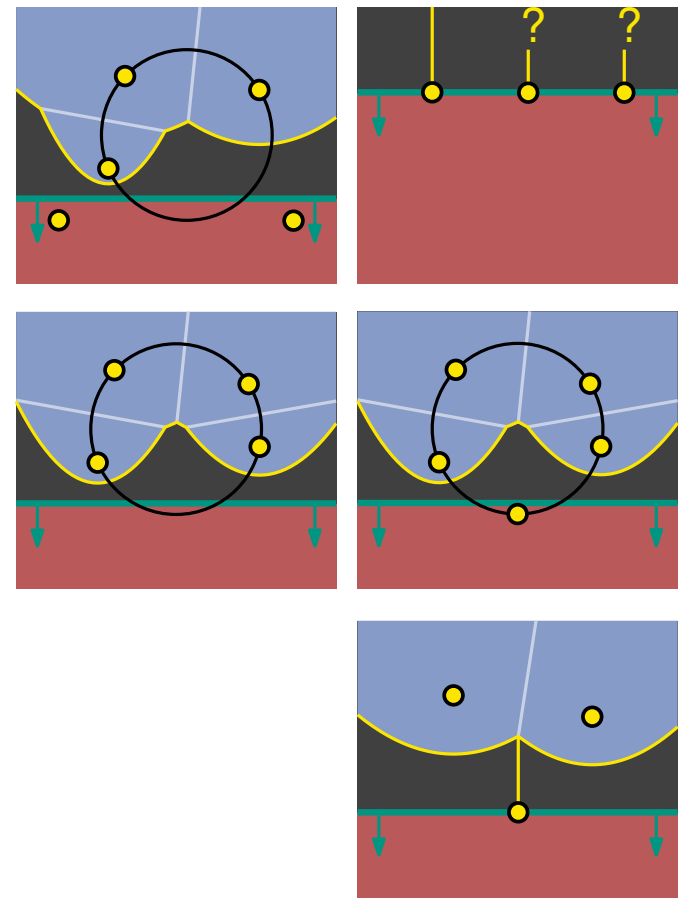
**Events mit gleicher $y$-Koordinate**

- behandle in beliebiger Reihenfolge
- Ausnahme: initiale Standort-Events
  (noch keine Parabel über sich)

**Gleiche $x$- und $y$-Koordinate**

- Knoten in $\mathrm{Vor}(S)$ mit Grad $> 3$
- Sonderbehandlung $\rightarrow$ Knoten mit Grad $> 3$
- keine Sonderbehandlung $\rightarrow$ mehrere Knoten mit Grad $3$ und Kanten der Länge $0$ dazwischen

**Neue Parabel startet bei Schnittpunkt**



# Sonderfälle

**Events mit gleicher $y$-Koordinate**

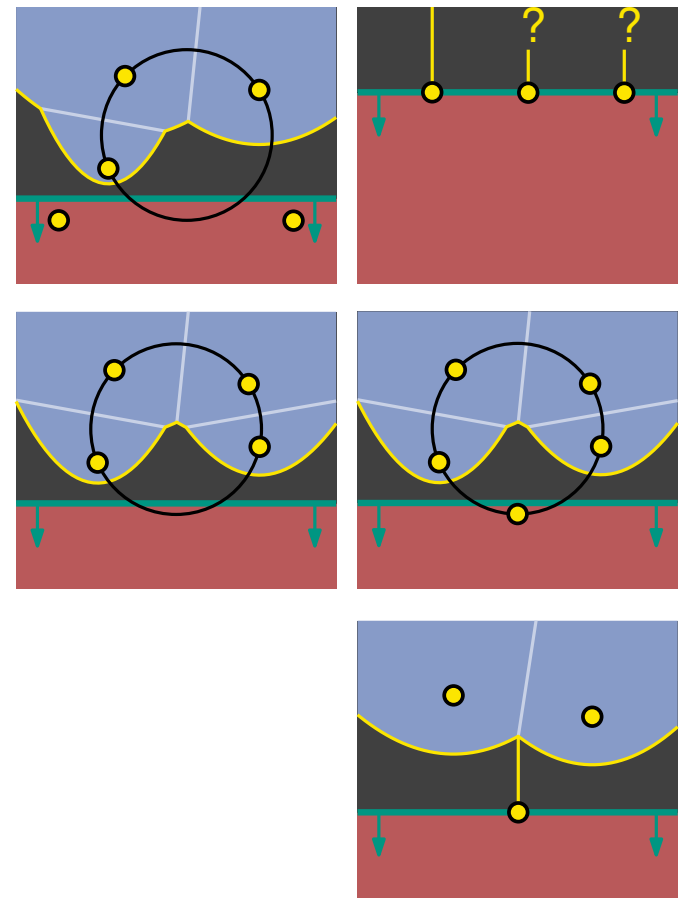
- behandle in beliebiger Reihenfolge
- Ausnahme: initiale Standort-Events
  (noch keine Parabel über sich)

**Gleiche $x$- und $y$-Koordinate**

- Knoten in $\mathrm{Vor}(S)$ mit Grad $> 3$
- Sonderbehandlung $\rightarrow$ Knoten mit Grad $> 3$
- keine Sonderbehandlung $\rightarrow$ mehrere Knoten mit Grad $3$ und Kanten der Länge $0$ dazwischen

**Neue Parabel startet bei Schnittpunkt**

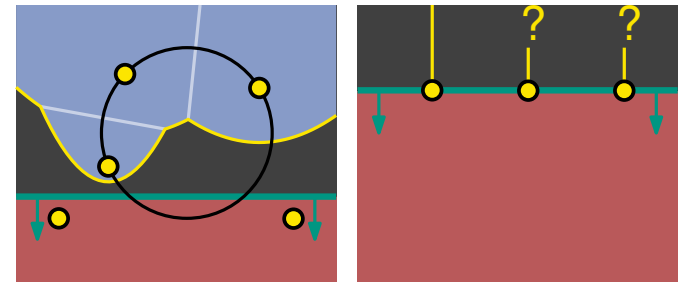
- an der Stelle sollte ein Knoten entstehen



# Sonderfälle

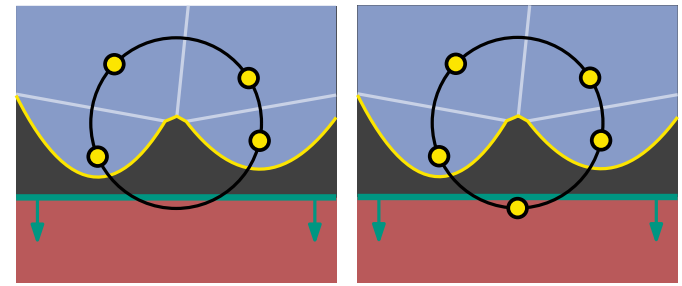
## Events mit gleicher $y$-Koordinate

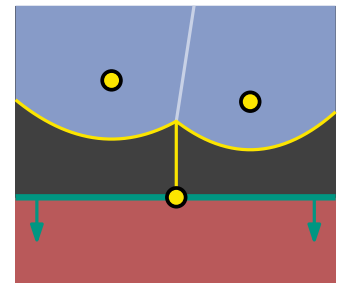
- behandle in beliebiger Reihenfolge
- Ausnahme: initiale Standort-Events
  (noch keine Parabel über sich)




## Gleiche $x$- und $y$-Koordinate

- Knoten in $\mathrm{Vor}(S)$ mit Grad $> 3$
- Sonderbehandlung $\rightarrow$ Knoten mit Grad $> 3$
- keine Sonderbehandlung $\rightarrow$ mehrere Knoten mit Grad $3$ und Kanten der Länge $0$ dazwischen





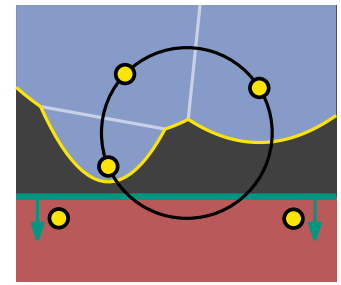
## Neue Parabel startet bei Schnittpunkt

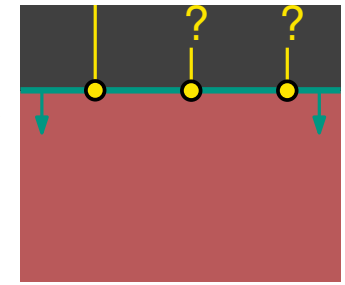
- an der Stelle sollte ein Knoten entstehen
- Sonderbehandlung: erstelle Knoten + Halbkanten
- keine Sonderbehandlung: zerteile eine der beiden Parabeln $\rightarrow$ neues Stück der Länge $0$ $\rightarrow$ Kreisevent $\rightarrow$ neuer Knoten

# Sonderfälle

## Events mit gleicher $y$-Koordinate

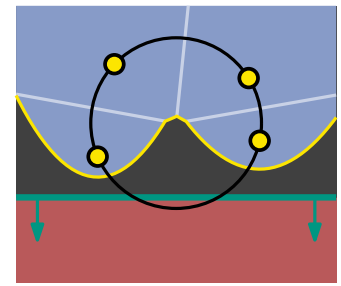
- behandle in beliebiger Reihenfolge
- Ausnahme: initiale Standort-Events
  (noch keine Parabel über sich)

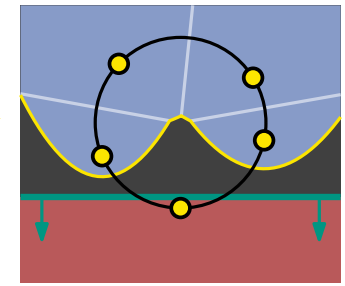


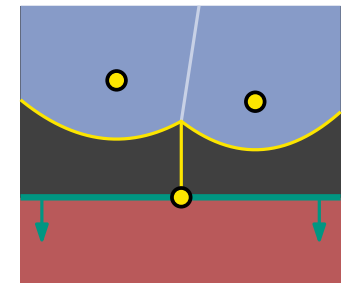



## Gleiche $x$- und $y$-Koordinate

- Knoten in $\mathrm{Vor}(S)$ mit Grad $> 3$
- Sonderbehandlung $\rightarrow$ Knoten mit Grad $> 3$
- keine Sonderbehandlung $\rightarrow$ mehrere Knoten mit Grad $3$ und Kanten der Länge $0$ dazwischen

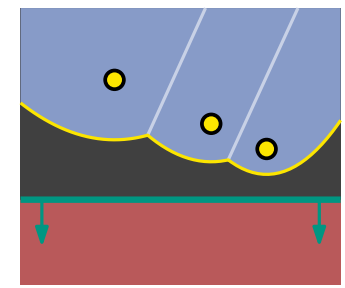






## Neue Parabel startet bei Schnittpunkt

- an der Stelle sollte ein Knoten entstehen
- Sonderbehandlung: erstelle Knoten + Halbkanten
- keine Sonderbehandlung: zerteile eine der beiden Parabeln $\rightarrow$ neues Stück der Länge $0$ $\rightarrow$ Kreisevent $\rightarrow$ neuer Knoten

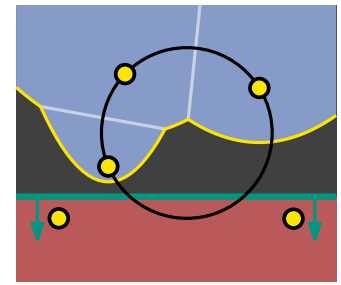


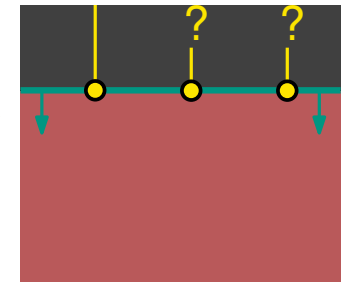
## Kollineare Punkte mit konsekutiven Parabelstücken

# Sonderfälle

## Events mit gleicher $y$-Koordinate

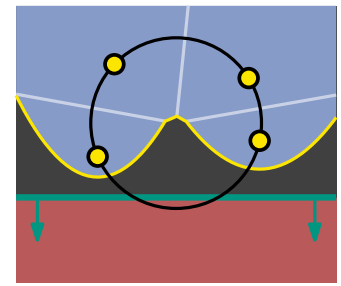
- behandle in beliebiger Reihenfolge
- Ausnahme: initiale Standort-Events
  (noch keine Parabel über sich)

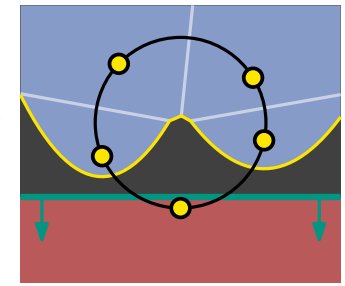





## Gleiche $x$- und $y$-Koordinate

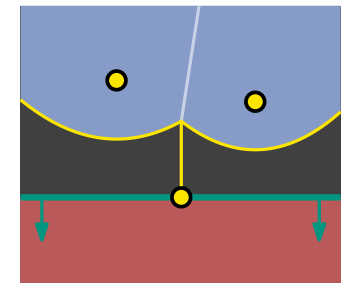
- Knoten in $\mathrm{Vor}(S)$ mit Grad $> 3$
- Sonderbehandlung $\rightarrow$ Knoten mit Grad $> 3$
- keine Sonderbehandlung $\rightarrow$ mehrere Knoten mit Grad $3$ und Kanten der Länge $0$ dazwischen

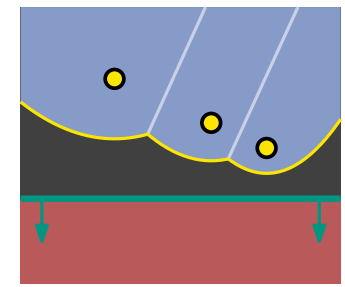




## Neue Parabel startet bei Schnittpunkt

- an der Stelle sollte ein Knoten entstehen
- Sonderbehandlung: erstelle Knoten + Halbkanten
- keine Sonderbehandlung: zerteile eine der beiden Parabeln $\rightarrow$ neues Stück der Länge $0$ $\rightarrow$ Kreisevent $\rightarrow$ neuer Knoten





## Kollineare Punkte mit konsekutiven Parabelstücken

- Vorsicht bei der Berechnung des Kreises

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

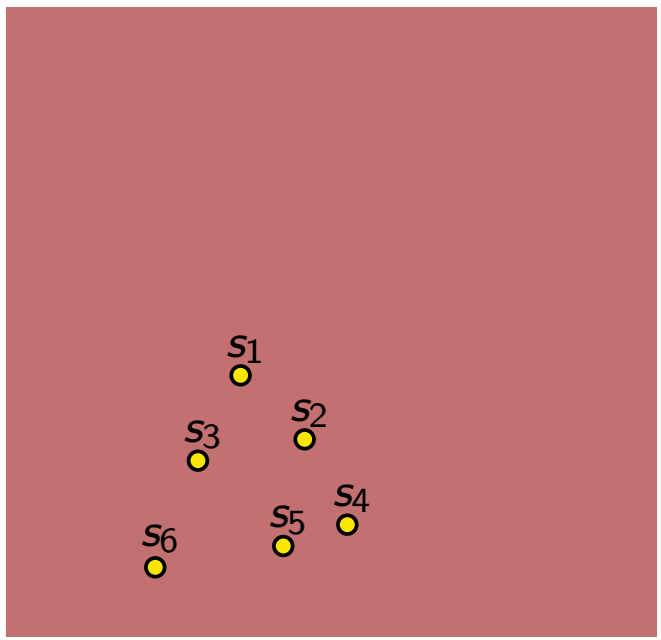
**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j)$, $(s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j)$, $(s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



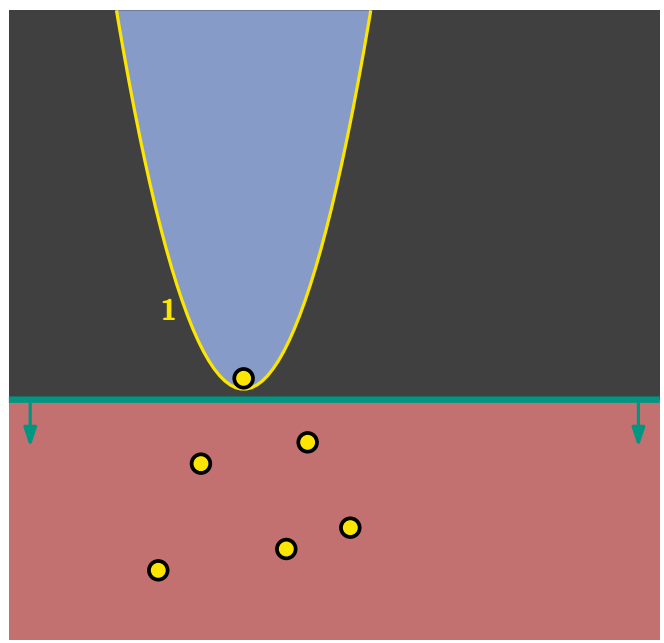

Beach-Line:

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j)$, $(s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



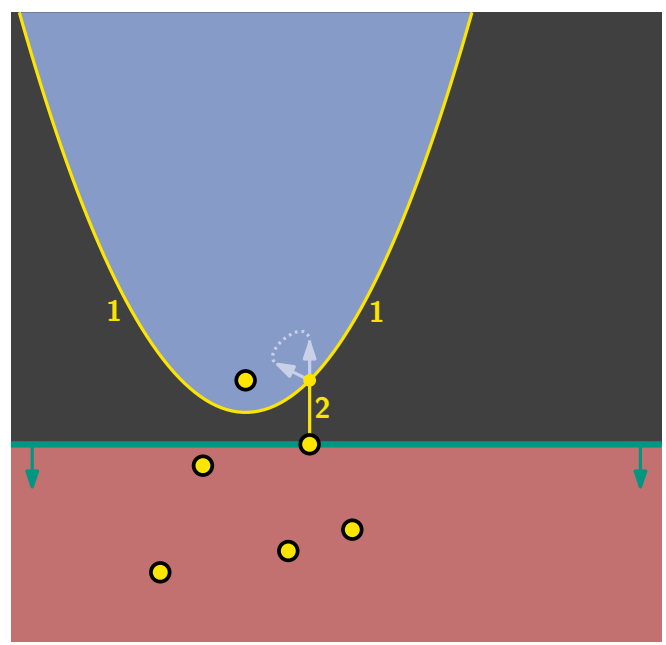

Beach-Line:

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j)$, $(s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



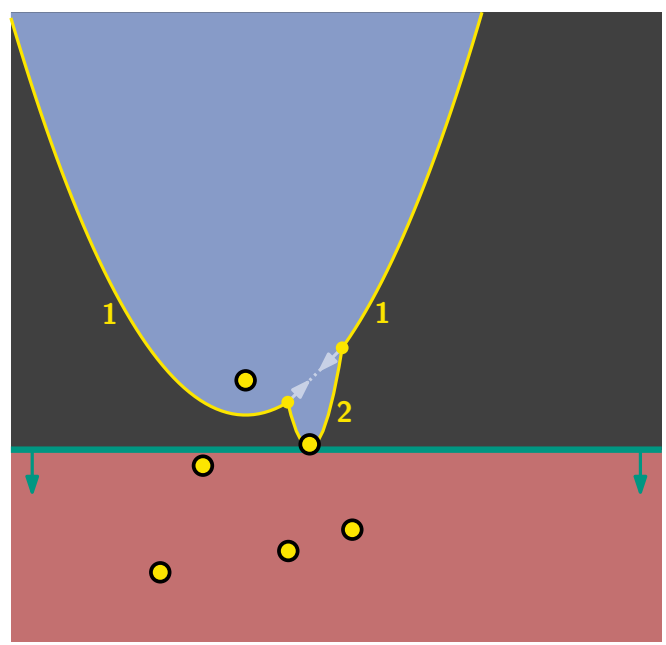

Beach-Line: $(s_1, s_2)$ $(s_2, s_1)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j)$, $(s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



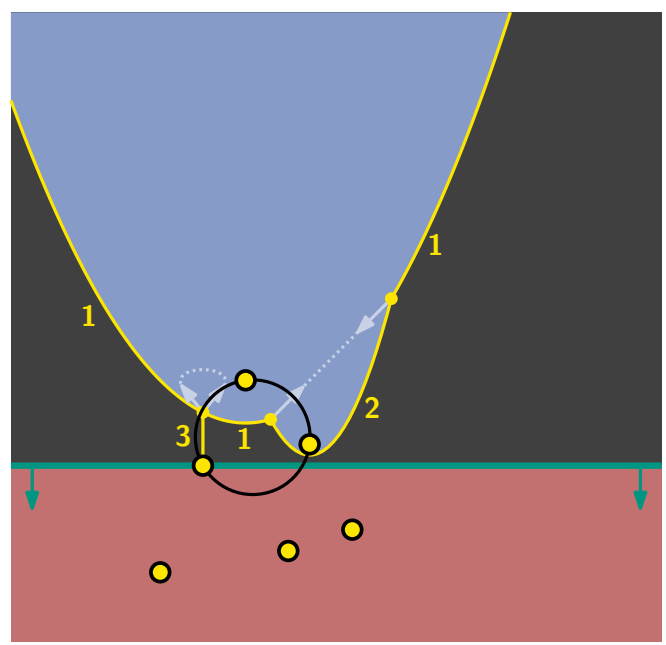

Beach-Line: $(s_1, s_2)$ $(s_2, s_1)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j)$, $(s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



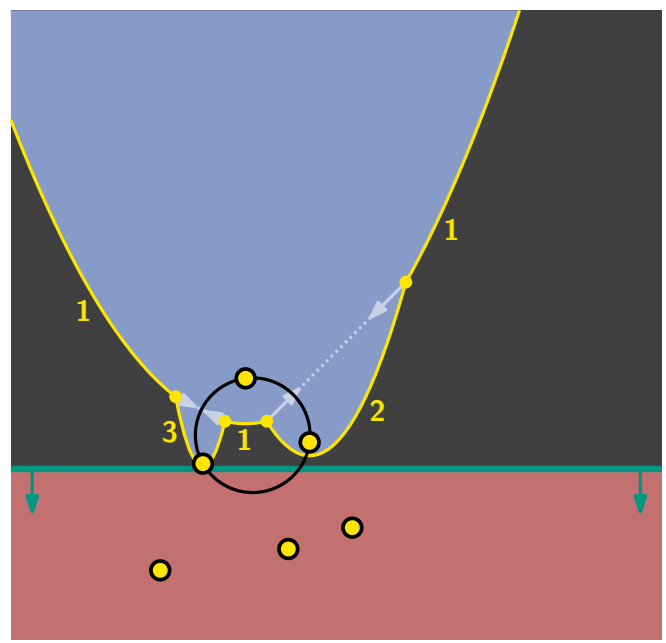

Beach-Line: $(s_1, s_3)$ $(s_3, s_1)$ $(s_1, s_2)$ $(s_2, s_1)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j)$, $(s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



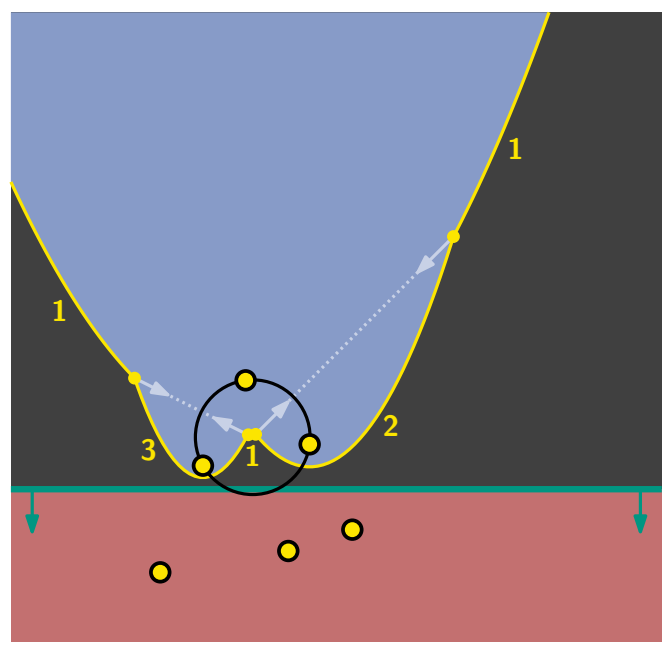

Beach-Line: $(s_1, s_3)$ $(s_3, s_1)$ $(s_1, s_2)$ $(s_2, s_1)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j)$, $(s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



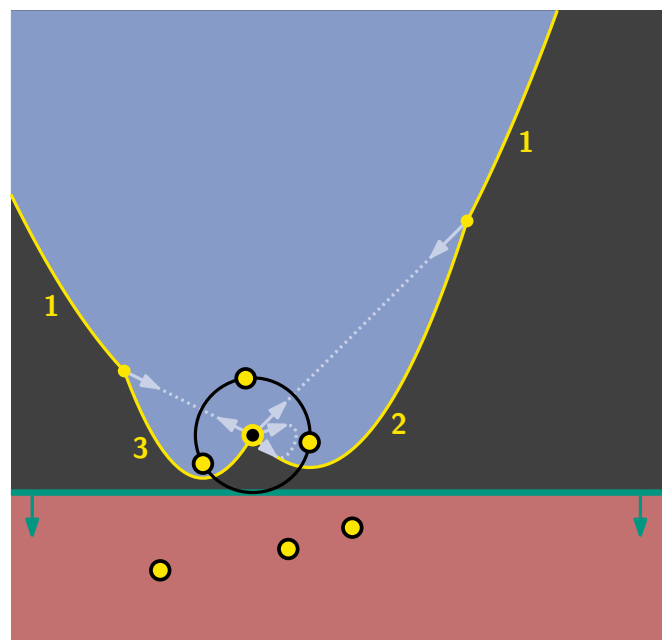

Beach-Line: $(s_1, s_3)$ $(s_3, s_1)$ $(s_1, s_2)$ $(s_2, s_1)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j)$, $(s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



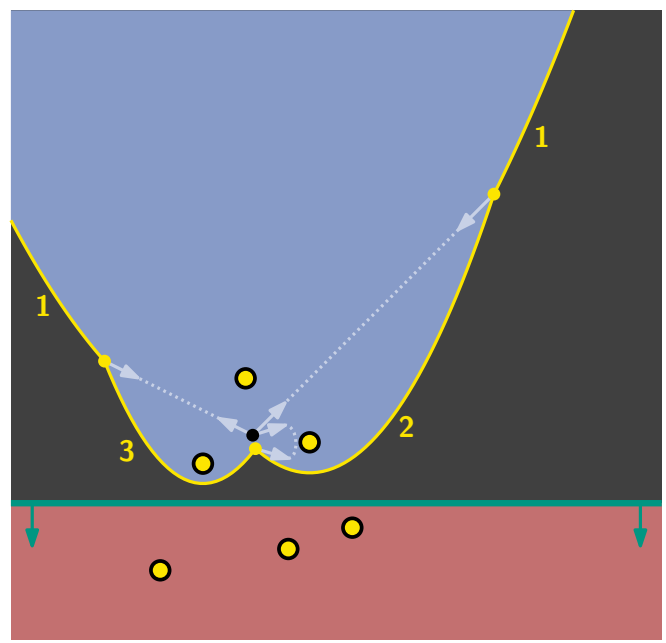

Beach-Line: $(s_1, s_3)$ $(s_3, s_2)$ $(s_2, s_1)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j)$, $(s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



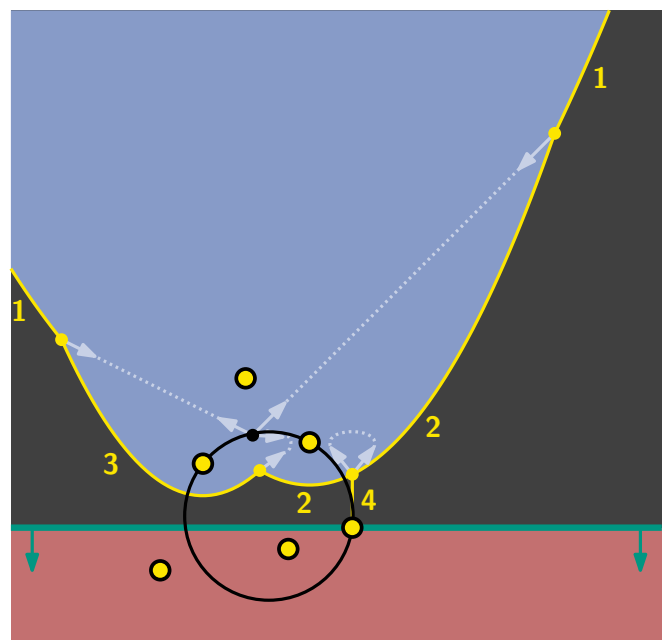

Beach-Line: $(s_1, s_3)$ $(s_3, s_2)$ $(s_2, s_1)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j)$, $(s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



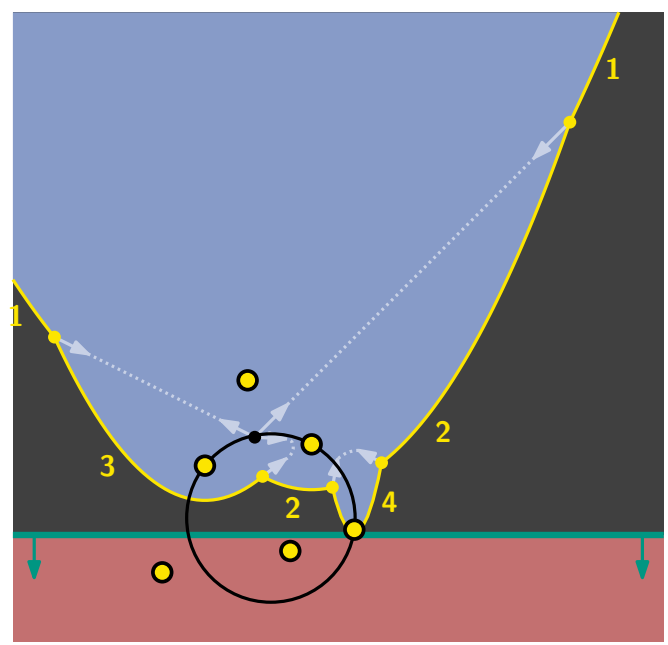

Beach-Line: $(s_1, s_3)$ $(s_3, s_2)$ $(s_2, s_4)$ $(s_4, s_2)$ $(s_2, s_1)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j)$, $(s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



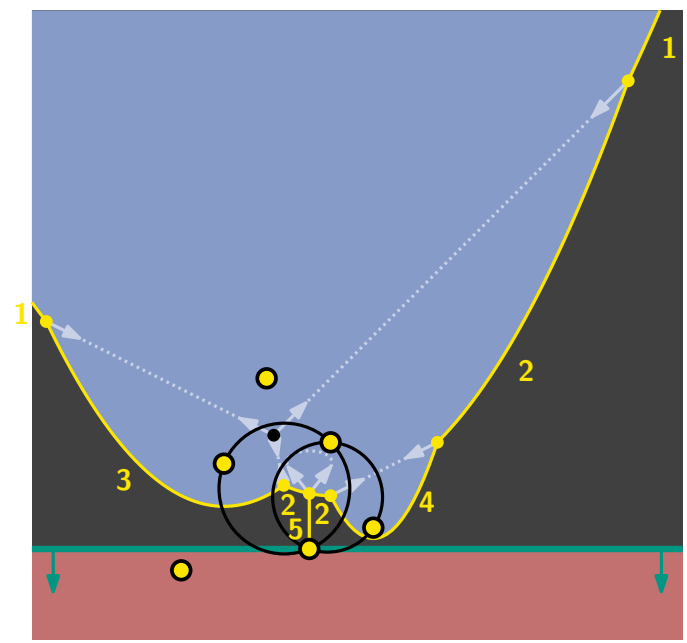

Beach-Line: $(s_1, s_3)$ $(s_3, s_2)$ $(s_2, s_4)$ $(s_4, s_2)$ $(s_2, s_1)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j), (s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



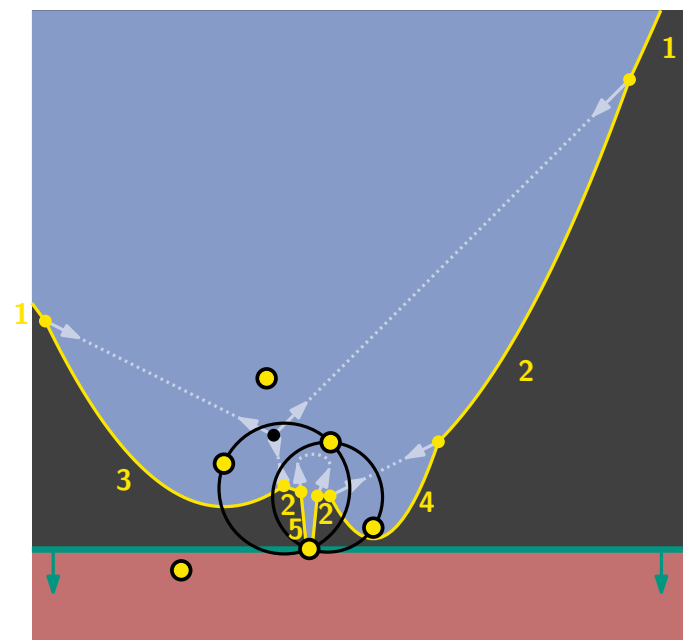

Beach-Line: $(s_1, s_3)$ $(s_3, s_2)$ $(s_2, s_5)$ $(s_5, s_2)$ $(s_2, s_4)$ $(s_4, s_2)$ $(s_2, s_1)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j), (s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



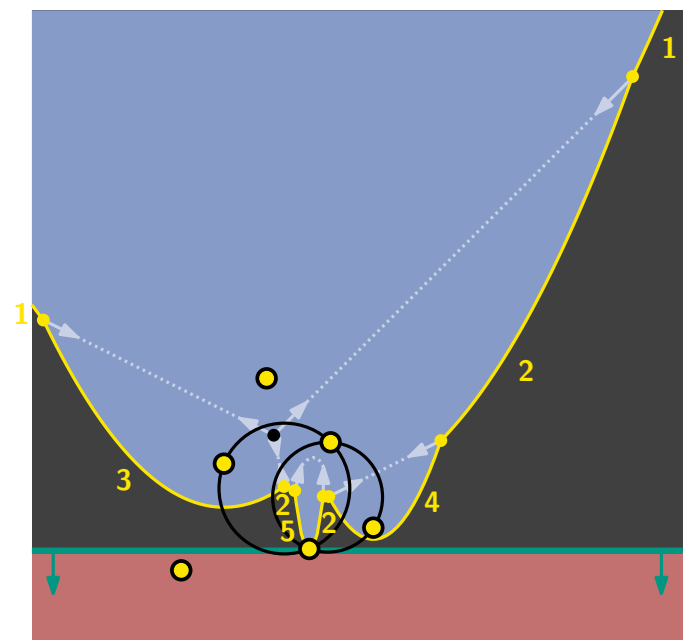

Beach-Line: $(s_1, s_3)$ $(s_3, s_2)$ $(s_2, s_5)$ $(s_5, s_2)$ $(s_2, s_4)$ $(s_4, s_2)$ $(s_2, s_1)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j), (s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



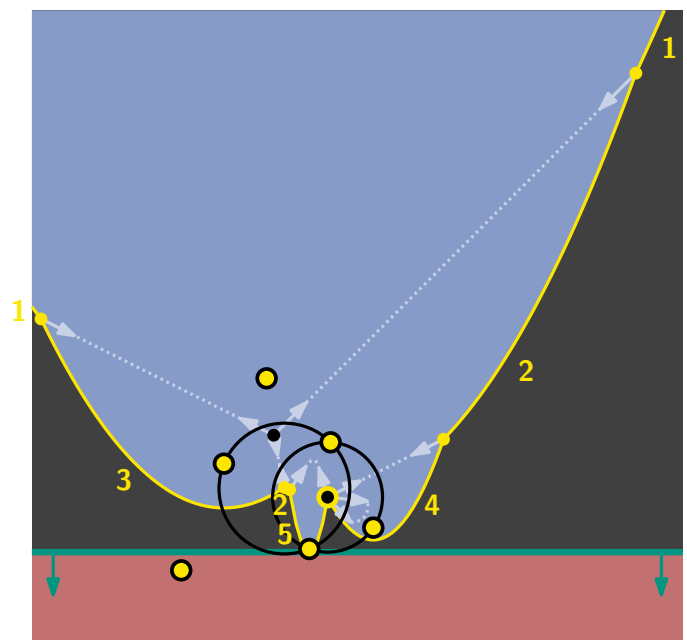

Beach-Line: $(s_1, s_3)$ $(s_3, s_2)$ $(s_2, s_5)$ $(s_5, s_2)$ $(s_2, s_4)$ $(s_4, s_2)$ $(s_2, s_1)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j), (s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



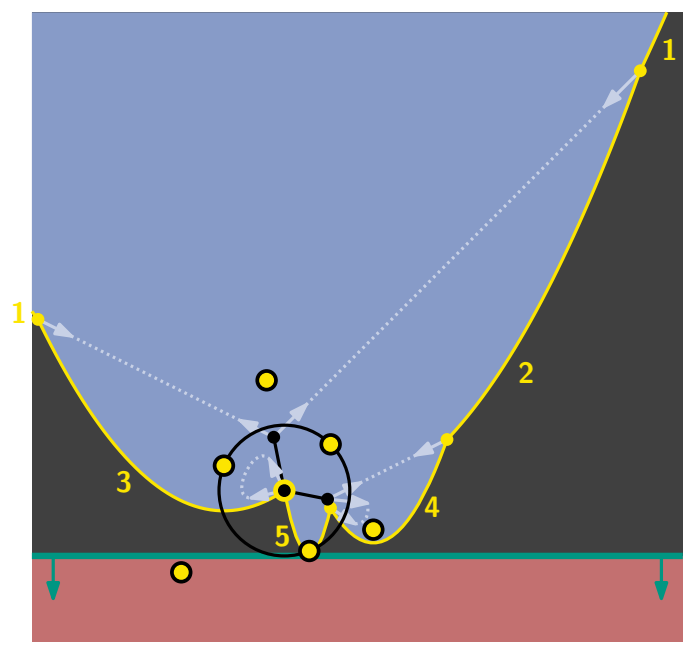

Beach-Line: $(s_1, s_3)$ $(s_3, s_2)$ $(s_2, s_5)$ $(s_5, s_4)$ $(s_4, s_2)$ $(s_2, s_1)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j)$, $(s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



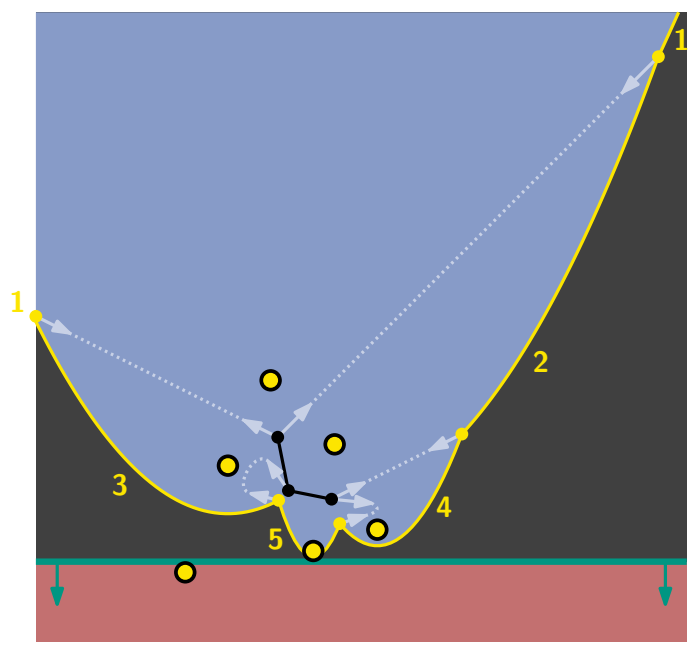

Beach-Line: $(s_1, s_3)$ $(s_3, s_5)$ $(s_5, s_4)$ $(s_4, s_2)$ $(s_2, s_1)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j), (s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



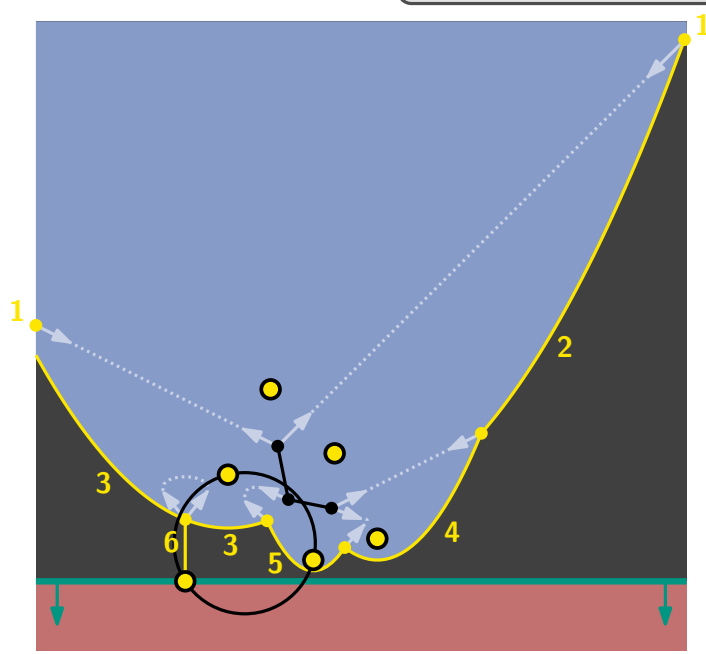

Beach-Line: $(s_1, s_3)$ $(s_3, s_5)$ $(s_5, s_4)$ $(s_4, s_2)$ $(s_2, s_1)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j), (s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



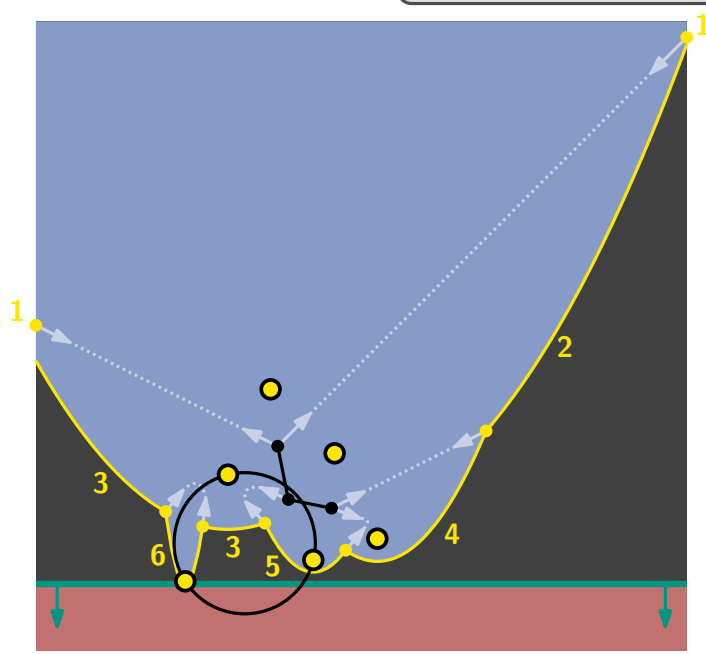

Beach-Line: $(s_1, s_3)$ $(s_3, s_6)$ $(s_6, s_3)$ $(s_3, s_5)$ $(s_5, s_4)$ $(s_4, s_2)$ $(s_2, s_1)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j)$, $(s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



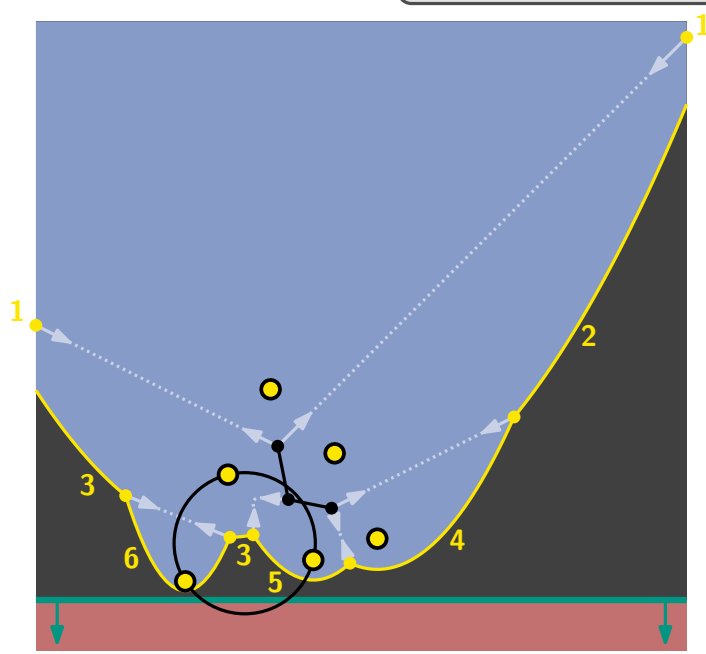

Beach-Line: $(s_1, s_3)$ $(s_3, s_6)$ $(s_6, s_3)$ $(s_3, s_5)$ $(s_5, s_4)$ $(s_4, s_2)$ $(s_2, s_1)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j)$, $(s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



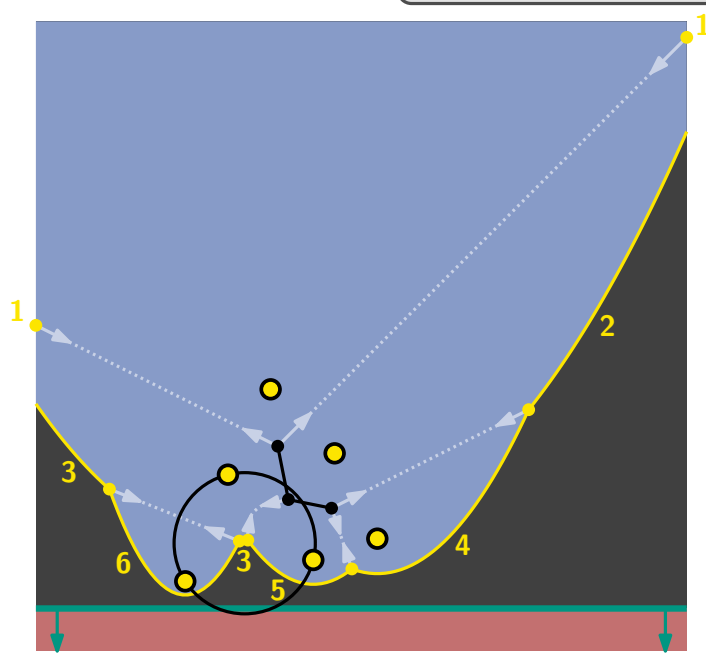

Beach-Line: $(s_1, s_3)$ $(s_3, s_6)$ $(s_6, s_3)$ $(s_3, s_5)$ $(s_5, s_4)$ $(s_4, s_2)$ $(s_2, s_1)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j), (s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



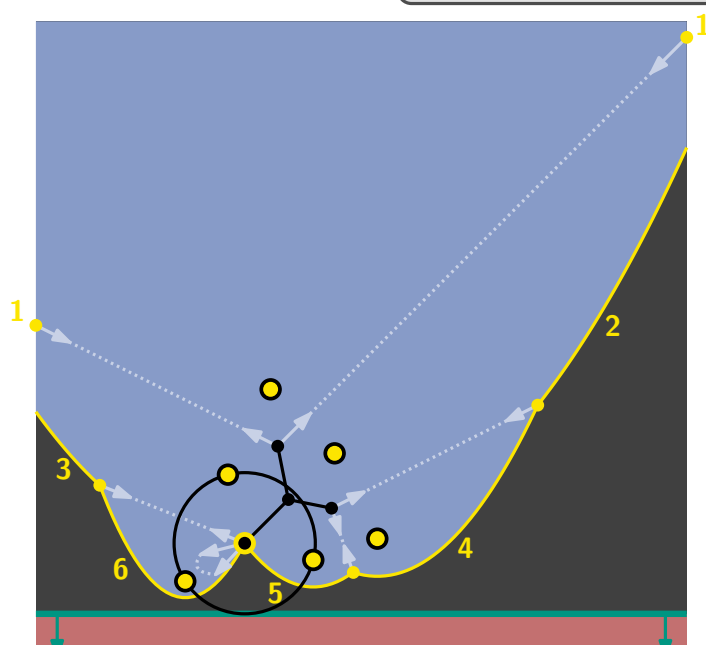

Beach-Line: $(s_1, s_3)$ $(s_3, s_6)$ $(s_6, s_3)$ $(s_3, s_5)$ $(s_5, s_4)$ $(s_4, s_2)$ $(s_2, s_1)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j), (s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



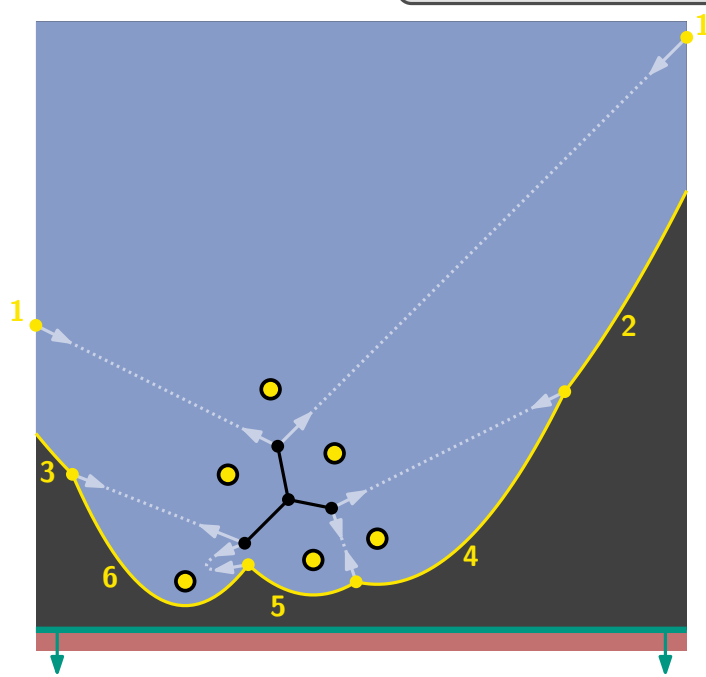

Beach-Line: $(s_1, s_3)$ $(s_3, s_6)$ $(s_6, s_5)$ $(s_5, s_4)$ $(s_4, s_2)$ $(s_2, s_1)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j)$, $(s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



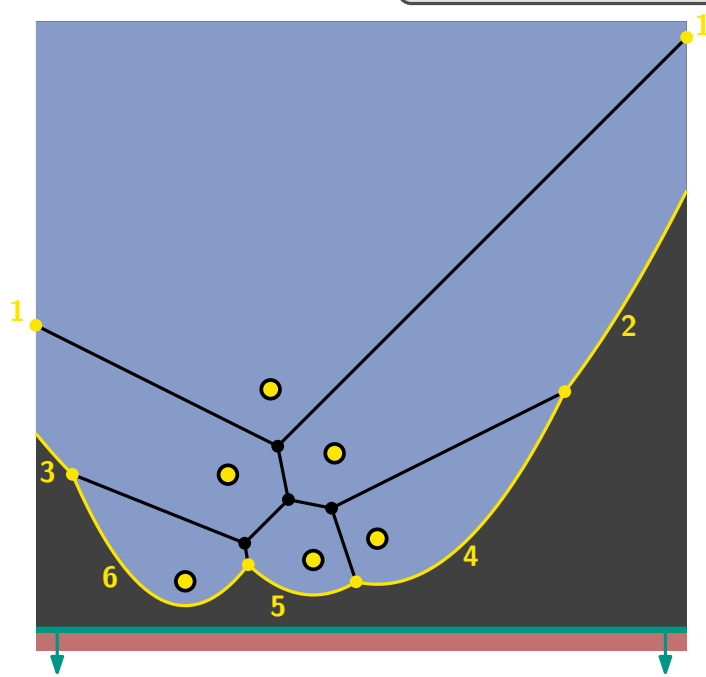

Beach-Line: $(s_1, s_3)$ $(s_3, s_6)$ $(s_6, s_5)$ $(s_5, s_4)$ $(s_4, s_2)$ $(s_2, s_1)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j), (s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



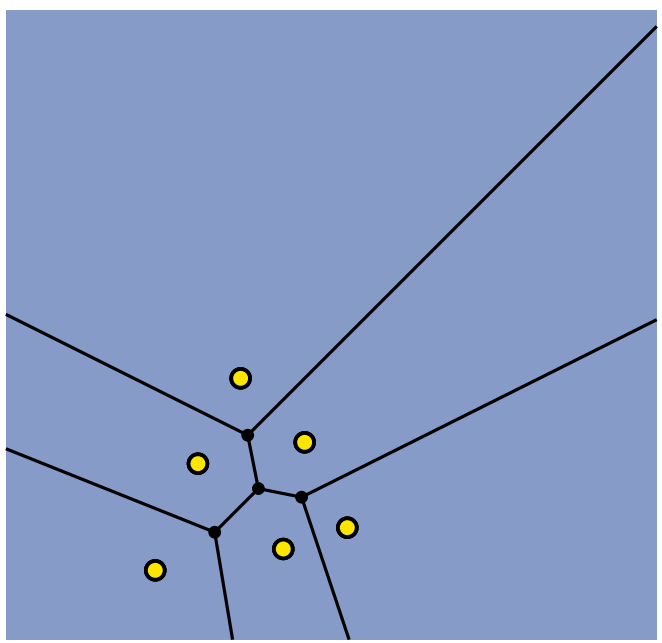

Beach-Line: $(s_1, s_3)$ $(s_3, s_6)$ $(s_6, s_5)$ $(s_5, s_4)$ $(s_4, s_2)$ $(s_2, s_1)$

# Überblick

**Standort-Event (Standort $s$)**
- finde $s_x$ in der Beach-Line
- füge zwei neue Schnittpunkte ein
- behandle falschen Alarm (für zugeh. Parabel)
- teste neue Schnittpunkte auf Kreis-Events
- neues Paar Halbkanten für die Schnittpunkte

**Kreis-Event (für Schnittpunkte $(s_i, s_j)$, $(s_j, s_k)$)**
- entferne $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$
- füge $(s_i, s_k)$ ein
- teste $(s_i, s_k)$ mit Nachbarn (in BL) auf Kreis-Events
- erstelle neuen Knoten $v$
- hänge Halbkanten von $(s_i, s_j)$ und $(s_j, s_k)$ an $v$
- neues Paar Halbkanten: eine an $v$, eine an $(s_i, s_k)$

## Beispiel



Beach-Line:

# Zusammenfassung

**Theorem**
Das Voronoi-Diagramm von $n$ Punkten kann in $O(n \log n)$ Zeit mit $O(n)$ Speicherplatz berechnet werden.

# Zusammenfassung

**Theorem**
Das Voronoi-Diagramm von $n$ Punkten kann in $O(n \log n)$ Zeit mit $O(n)$ Speicherplatz berechnet werden.

**Was gibt es sonst noch?**

- man kann diverse Varianten betrachten
  - höhere Dimensionen
  - andere Metriken
  - gewichtete Standorte
  - Standorte, die nicht nur Punkte sind (beispielsweise Strecken)
  - Voronoi Diagramme höherer Ordnung

# Zusammenfassung

**Theorem**
Das Voronoi-Diagramm von $n$ Punkten kann in $O(n \log n)$ Zeit mit $O(n)$ Speicherplatz berechnet werden.

**Was gibt es sonst noch?**

- man kann diverse Varianten betrachten
  - höhere Dimensionen
  - andere Metriken
  - gewichtete Standorte
  - Standorte, die nicht nur Punkte sind (beispielsweise Strecken)
  - Voronoi Diagramme höherer Ordnung
- Visualisierung: http://www.raymondhill.net/voronoi/rhill-voronoi.html

# Plan für Weihnachten

| Montag | Di | Mi | Do | Freitag |
|---|---|---|---|---|
| 11 Vorlesung | 12 | 13 | 14 Übung | 15 |
| Übungsblatt 4 | | | | |
| 18 Vorlesung | 19 | 20 | 21 Aktiv | 22 |
| Übungsblatt 4 | | | | Übungsblatt 5 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 8 Vorlesung | 9 | 10 | 11 Übung | 12 |
| Übungsblatt 5 | | | | |

# Plan für Weihnachten

| Montag | Di | Mi | Do | Freitag |
|---|---|---|---|---|
| 11 Vorlesung | 12 | 13 | 14 Übung | 15 |
| Übungsblatt 4 | | | | |
| 18 Vorlesung | 19 | 20 | 21 Aktiv | 22 |
| Übungsblatt 4 | | | | Übungsblatt 5 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 8 Vorlesung | 9 | 10 | 11 Übung | 12 |
| Übungsblatt 5 | | | | |

**Computational Origami**

# Plan für Weihnachten

| Montag | Di | Mi | Do | Freitag |
|---|---|---|---|---|
| 11 Vorlesung | 12 | 13 | 14 Übung | 15 |
| Übungsblatt 4 | | | | |
| 18 Vorlesung | 19 | 20 | 21 Aktiv | 22 |
| Übungsblatt 4 | | | | Übungsblatt 5 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 8 Vorlesung | 9 | 10 | 11 Übung | 12 |
| Übungsblatt 5 | | | | |

## Computational Origami

## Weihnachtsvorlesung (TGI)

- 21.12., 11:30 Uhr
- vermutlich Online