Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmische Geometrie

Übung 7

Blatt 6 – Aufgabe 1

a) Längen-Vektor maximal $\Leftrightarrow$ opt. Triangulierung

Blatt 6 – Aufgabe 1

a) Längen-Vektor maximal $\Leftrightarrow$ opt. Triangulierung $\Leftrightarrow$ Winkel-Vektor maximal

Blatt 6 – Aufgabe 1

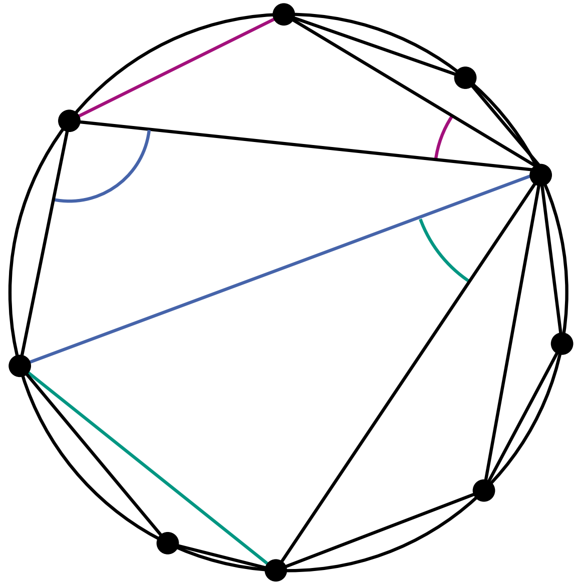
a) Längen-Vektor maximal $\Leftrightarrow$ opt. Triangulierung $\Leftrightarrow$ Winkel-Vektor maximal

- Kantenflip betrachten reicht nicht aus!

Blatt 6 – Aufgabe 1

a) Längen-Vektor maximal $\Leftrightarrow$ opt. Triangulierung $\Leftrightarrow$ Winkel-Vektor maximal

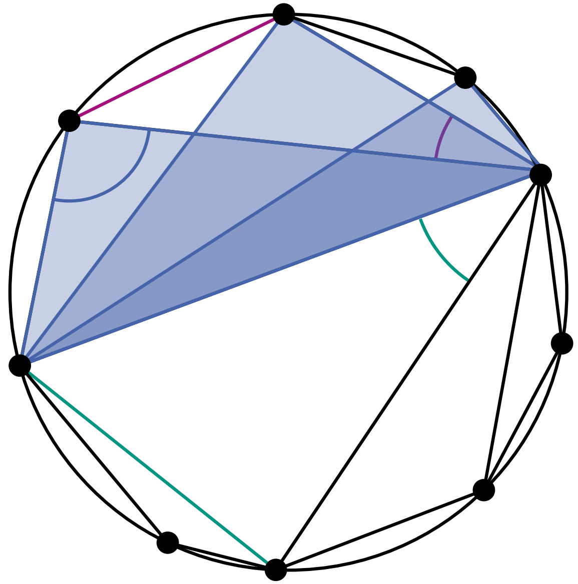
- Kantenflip betrachten reicht nicht aus!
- jeder Winkel liegt gegenüber einer Kante



Blatt 6 – Aufgabe 1

a) Längen-Vektor maximal ⇔ opt. Triangulierung ⇔ Winkel-Vektor maximal

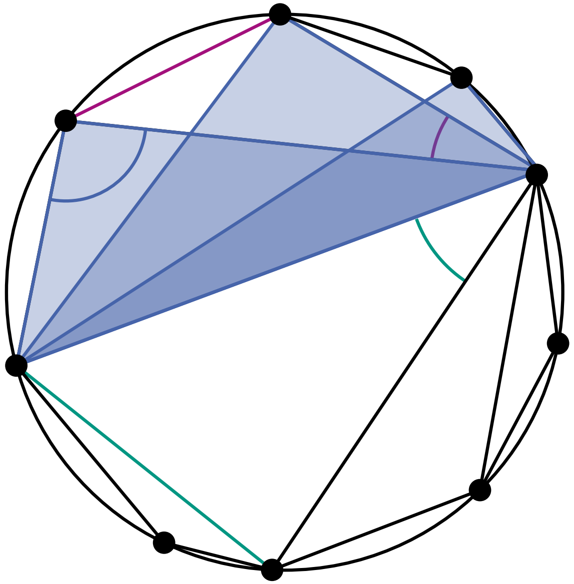
- Kantenflip betrachten reicht nicht aus!
- jeder Winkel liegt gegenüber einer Kante
- Winkel hängt nur von gegenüberliegender Kante ab



Blatt 6 – Aufgabe 1

a) Längen-Vektor maximal $\Leftrightarrow$ opt. Triangulierung $\Leftrightarrow$ Winkel-Vektor maximal

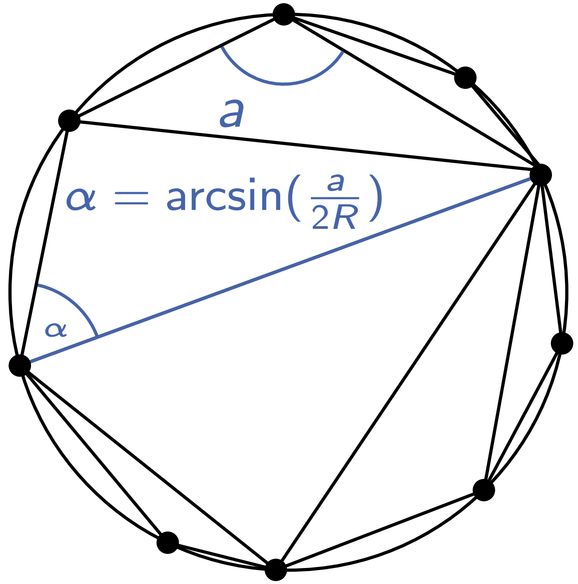
- Kantenflip betrachten reicht nicht aus!
- jeder Winkel liegt gegenüber einer Kante
- Winkel hängt nur von gegenüberliegender Kante ab
- Winkel ggü. Polygonkanten kommen immer vor



Blatt 6 – Aufgabe 1

a) Längen-Vektor maximal $\Leftrightarrow$ opt. Triangulierung $\Leftrightarrow$ Winkel-Vektor maximal

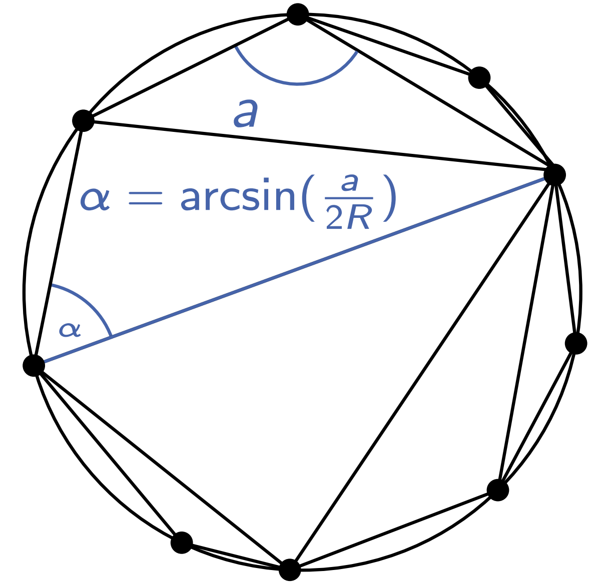
- Kantenflip betrachten reicht nicht aus!
- jeder Winkel liegt gegenüber einer Kante
- Winkel hängt nur von gegenüberliegender Kante ab
- Winkel ggü. Polygonkanten kommen immer vor
- für Sehne: betrachte kleineren Winkel



Blatt 6 – Aufgabe 1

a) Längen-Vektor maximal $\Leftrightarrow$ opt. Triangulierung $\Leftrightarrow$ Winkel-Vektor maximal

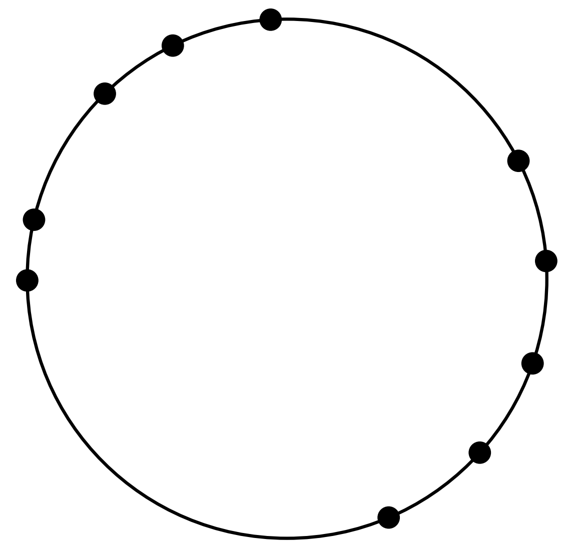
- Kantenflip betrachten reicht nicht aus!
- jeder Winkel liegt gegenüber einer Kante
- Winkel hängt nur von gegenüberliegender Kante ab
- Winkel ggü. Polygonkanten kommen immer vor
- für Sehne: betrachte kleineren Winkel
- $\arcsin$ monoton $\Rightarrow$ α wächst monoton mit a



Blatt 6 – Aufgabe 1

a) Längen-Vektor maximal $\Leftrightarrow$ opt. Triangulierung $\Leftrightarrow$ Winkel-Vektor maximal

- Kantenflip betrachten reicht nicht aus!
- jeder Winkel liegt gegenüber einer Kante
- Winkel hängt nur von gegenüberliegender Kante ab
- Winkel ggü. Polygonkanten kommen immer vor
- für Sehne: betrachte kleineren Winkel
- $\arcsin$ monoton $\Rightarrow \alpha$ wächst monoton mit a



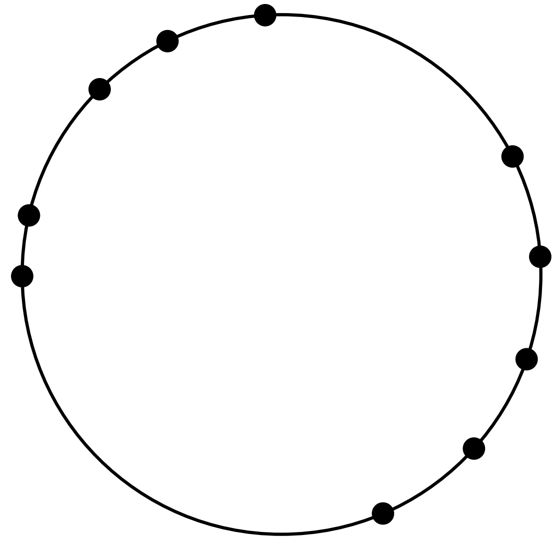
$|a| < |b| < |c|$

b) Dualgraph Pfad

Blatt 6 – Aufgabe 1

a) Längen-Vektor maximal $\Leftrightarrow$ opt. Triangulierung $\Leftrightarrow$ Winkel-Vektor maximal

- Kantenflip betrachten reicht nicht aus!
- jeder Winkel liegt gegenüber einer Kante
- Winkel hängt nur von gegenüberliegender Kante ab
- Winkel ggü. Polygonkanten kommen immer vor
- für Sehne: betrachte kleineren Winkel
- $\arcsin$ monoton $\Rightarrow \alpha$ wächst monoton mit a



$|a| < |b| < |c|$

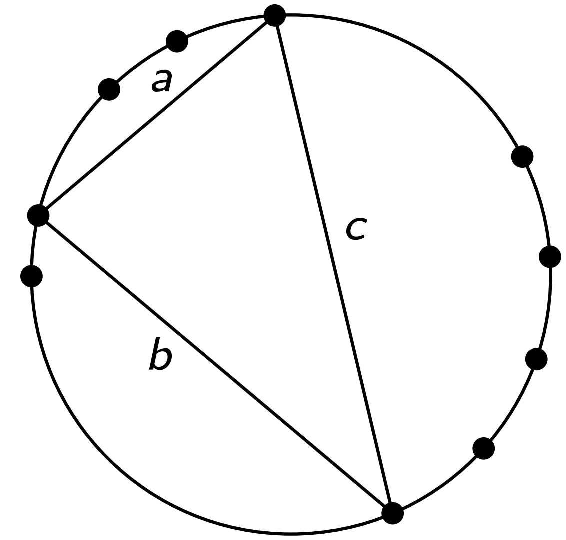
b) Dualgraph Pfad

- zusammenhängend, azyklisch, Grad ≤ 3

Blatt 6 – Aufgabe 1

a) Längen-Vektor maximal $\Leftrightarrow$ opt. Triangulierung $\Leftrightarrow$ Winkel-Vektor maximal

- Kantenflip betrachten reicht nicht aus!
- jeder Winkel liegt gegenüber einer Kante
- Winkel hängt nur von gegenüberliegender Kante ab
- Winkel ggü. Polygonkanten kommen immer vor
- für Sehne: betrachte kleineren Winkel
- $\arcsin$ monoton $\Rightarrow \alpha$ wächst monoton mit a



$|a| < |b| < |c|$

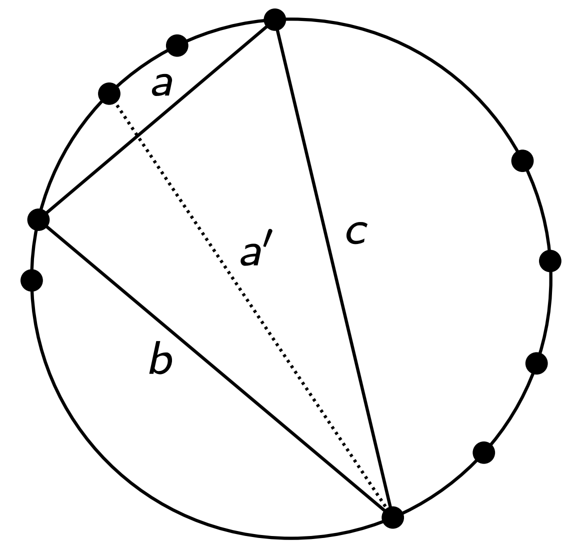
b) Dualgraph Pfad

- zusammenhängend, azyklisch, Grad ≤ 3
- kein Knoten von Grad 3

Blatt 6 – Aufgabe 1

a) Längen-Vektor maximal $\Leftrightarrow$ opt. Triangulierung $\Leftrightarrow$ Winkel-Vektor maximal

- Kantenflip betrachten reicht nicht aus!
- jeder Winkel liegt gegenüber einer Kante
- Winkel hängt nur von gegenüberliegender Kante ab
- Winkel ggü. Polygonkanten kommen immer vor
- für Sehne: betrachte kleineren Winkel
- $\arcsin$ monoton $\Rightarrow \alpha$ wächst monoton mit a



$|a| < |b| < |c|$
$|b| \leq |a'|$

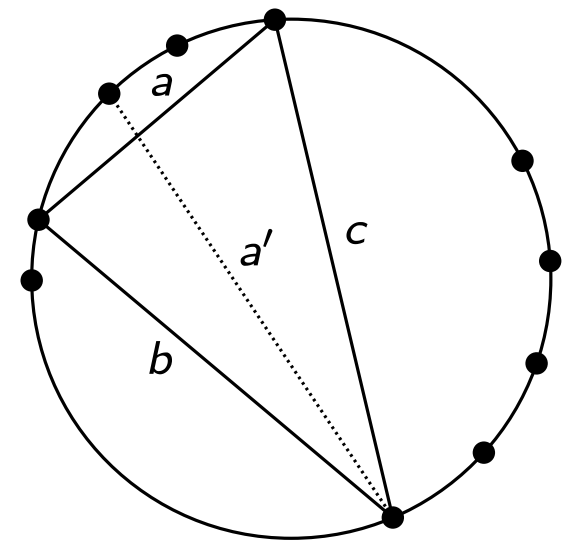
b) Dualgraph Pfad

- zusammenhängend, azyklisch, Grad ≤ 3
- kein Knoten von Grad 3

Blatt 6 – Aufgabe 1

a) Längen-Vektor maximal $\Leftrightarrow$ opt. Triangulierung $\Leftrightarrow$ Winkel-Vektor maximal

- Kantenflip betrachten reicht nicht aus!
- jeder Winkel liegt gegenüber einer Kante
- Winkel hängt nur von gegenüberliegender Kante ab
- Winkel ggü. Polygonkanten kommen immer vor
- für Sehne: betrachte kleineren Winkel
- $\arcsin$ monoton $\Rightarrow \alpha$ wächst monoton mit a



$|a| < |b| < |c|$
$|b| \leq |a'|$

b) Dualgraph Pfad

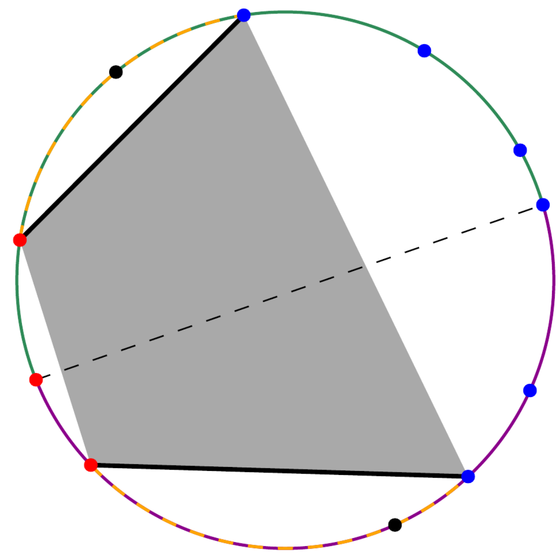
- zusammenhängend, azyklisch, Grad ≤ 3
- kein Knoten von Grad 3

c) Algorithmus

Blatt 6 – Aufgabe 1

a) Längen-Vektor maximal $\Leftrightarrow$ opt. Triangulierung $\Leftrightarrow$ Winkel-Vektor maximal

- Kantenflip betrachten reicht nicht aus!
- jeder Winkel liegt gegenüber einer Kante
- Winkel hängt nur von gegenüberliegender Kante ab
- Winkel ggü. Polygonkanten kommen immer vor
- für Sehne: betrachte kleineren Winkel
- $\arcsin$ monoton $\Rightarrow \alpha$ wächst monoton mit a



b) Dualgraph Pfad

- zusammenhängend, azyklisch, Grad ≤ 3
- kein Knoten von Grad 3

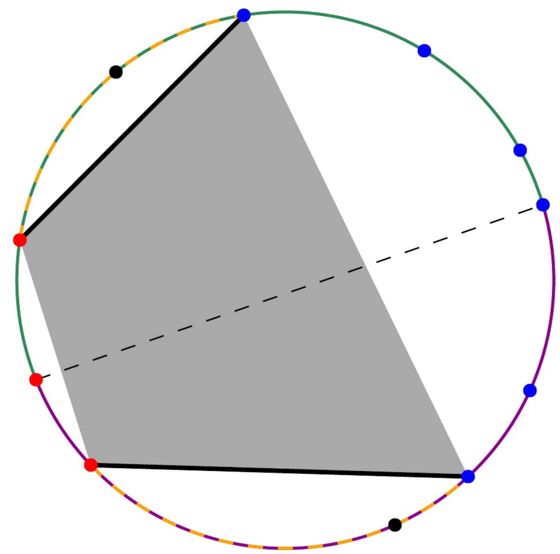
c) Algorithmus

- finde Blätter (kürzeste Sehnen in der opt. Triangulierung)

Blatt 6 – Aufgabe 1

a) Längen-Vektor maximal $\Leftrightarrow$ opt. Triangulierung $\Leftrightarrow$ Winkel-Vektor maximal

- Kantenflip betrachten reicht nicht aus!
- jeder Winkel liegt gegenüber einer Kante
- Winkel hängt nur von gegenüberliegender Kante ab
- Winkel ggü. Polygonkanten kommen immer vor
- für Sehne: betrachte kleineren Winkel
- $\arcsin$ monoton $\Rightarrow \alpha$ wächst monoton mit a



b) Dualgraph Pfad

- zusammenhängend, azyklisch, Grad ≤ 3
- kein Knoten von Grad 3

c) Algorithmus

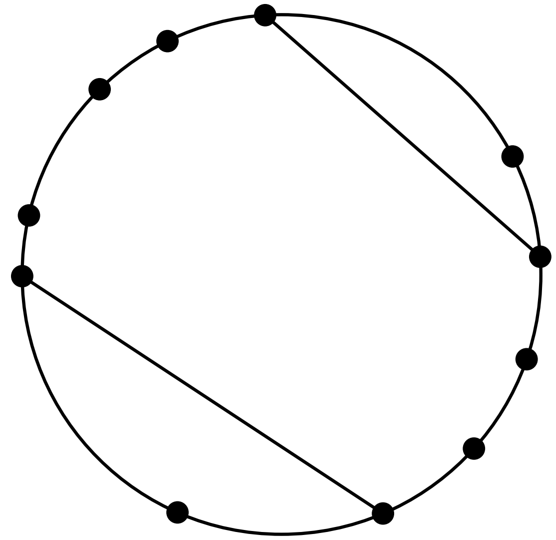
- finde Blätter (kürzeste Sehnen in der opt. Triangulierung)
  $\Rightarrow$ maximiere Länge der Sehnen an Blättern

Wie?

Blatt 6 – Aufgabe 1

a) Längen-Vektor maximal $\Leftrightarrow$ opt. Triangulierung $\Leftrightarrow$ Winkel-Vektor maximal

- Kantenflip betrachten reicht nicht aus!
- jeder Winkel liegt gegenüber einer Kante
- Winkel hängt nur von gegenüberliegender Kante ab
- Winkel ggü. Polygonkanten kommen immer vor
- für Sehne: betrachte kleineren Winkel
- $\arcsin$ monoton $\Rightarrow \alpha$ wächst monoton mit a



b) Dualgraph Pfad

- zusammenhängend, azyklisch, Grad ≤ 3
- kein Knoten von Grad 3

c) Algorithmus

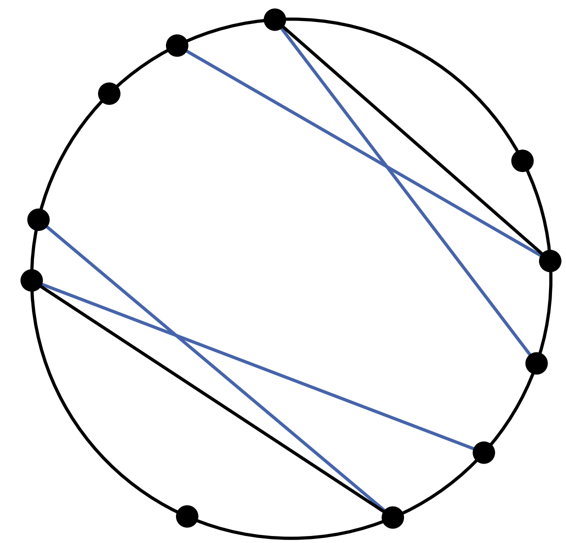
- finde Blätter (kürzeste Sehnen in der opt. Triangulierung)
  $\Rightarrow$ maximiere Länge der Sehnen an Blättern

Wie?

Blatt 6 – Aufgabe 1

a) Längen-Vektor maximal $\Leftrightarrow$ opt. Triangulierung $\Leftrightarrow$ Winkel-Vektor maximal

- Kantenflip betrachten reicht nicht aus!
- jeder Winkel liegt gegenüber einer Kante
- Winkel hängt nur von gegenüberliegender Kante ab
- Winkel ggü. Polygonkanten kommen immer vor
- für Sehne: betrachte kleineren Winkel
- $\arcsin$ monoton $\Rightarrow$ α wächst monoton mit a



b) Dualgraph Pfad

- zusammenhängend, azyklisch, Grad ≤ 3
- kein Knoten von Grad 3

c) Algorithmus

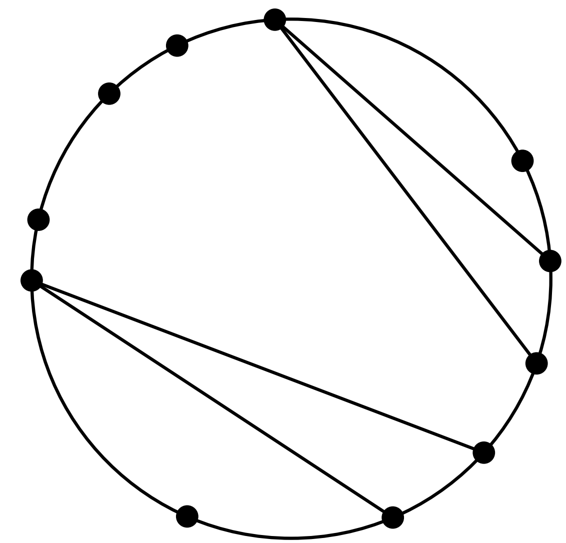
- finde Blätter (kürzeste Sehnen in der opt. Triangulierung)
  $\Rightarrow$ maximiere Länge der Sehnen an Blättern

Wie?

Blatt 6 – Aufgabe 1

a) Längen-Vektor maximal $\Leftrightarrow$ opt. Triangulierung $\Leftrightarrow$ Winkel-Vektor maximal

- Kantenflip betrachten reicht nicht aus!
- jeder Winkel liegt gegenüber einer Kante
- Winkel hängt nur von gegenüberliegender Kante ab
- Winkel ggü. Polygonkanten kommen immer vor
- für Sehne: betrachte kleineren Winkel
- $\arcsin$ monoton $\Rightarrow \alpha$ wächst monoton mit a



b) Dualgraph Pfad

- zusammenhängend, azyklisch, Grad ≤ 3
- kein Knoten von Grad 3

c) Algorithmus

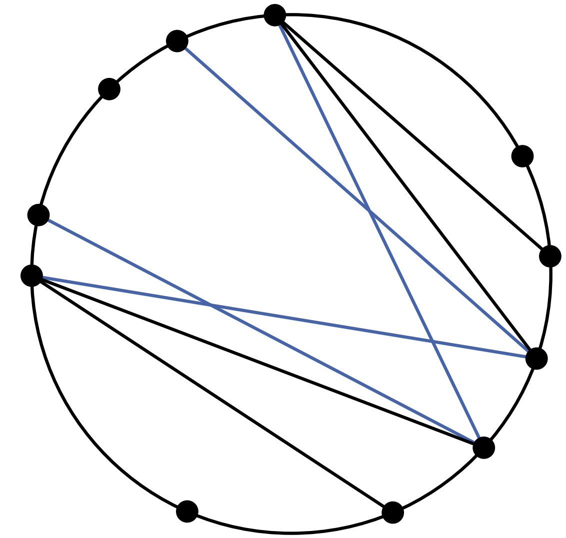
- finde Blätter (kürzeste Sehnen in der opt. Triangulierung)
  $\Rightarrow$ maximiere Länge der Sehnen an Blättern

Wie?

Blatt 6 – Aufgabe 1

a) Längen-Vektor maximal $\Leftrightarrow$ opt. Triangulierung $\Leftrightarrow$ Winkel-Vektor maximal

- Kantenflip betrachten reicht nicht aus!
- jeder Winkel liegt gegenüber einer Kante
- Winkel hängt nur von gegenüberliegender Kante ab
- Winkel ggü. Polygonkanten kommen immer vor
- für Sehne: betrachte kleineren Winkel
- $\arcsin$ monoton $\Rightarrow$ α wächst monoton mit a



b) Dualgraph Pfad

- zusammenhängend, azyklisch, Grad ≤ 3
- kein Knoten von Grad 3

c) Algorithmus

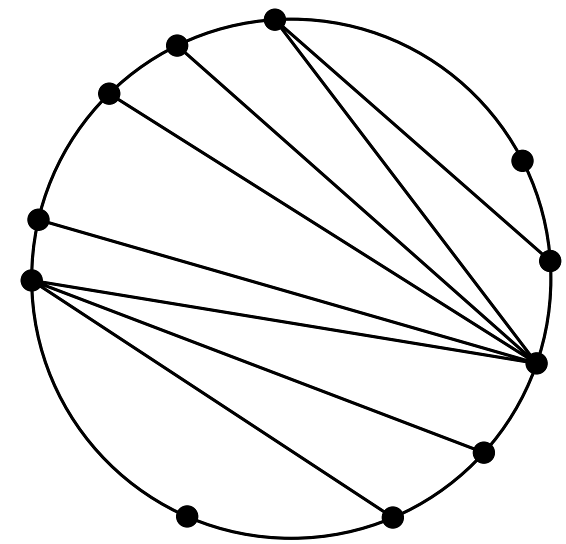
- finde Blätter (kürzeste Sehnen in der opt. Triangulierung)
  $\Rightarrow$ maximiere Länge der Sehnen an Blättern
- induktiv

Wie?

Blatt 6 – Aufgabe 1

a) Längen-Vektor maximal $\Leftrightarrow$ opt. Triangulierung $\Leftrightarrow$ Winkel-Vektor maximal

- Kantenflip betrachten reicht nicht aus!
- jeder Winkel liegt gegenüber einer Kante
- Winkel hängt nur von gegenüberliegender Kante ab
- Winkel ggü. Polygonkanten kommen immer vor
- für Sehne: betrachte kleineren Winkel
- $\arcsin$ monoton $\Rightarrow \alpha$ wächst monoton mit a



b) Dualgraph Pfad

- zusammenhängend, azyklisch, Grad ≤ 3
- kein Knoten von Grad 3

c) Algorithmus

- finde Blätter (kürzeste Sehnen in der opt. Triangulierung)
  $\Rightarrow$ maximiere Länge der Sehnen an Blättern

Wie?

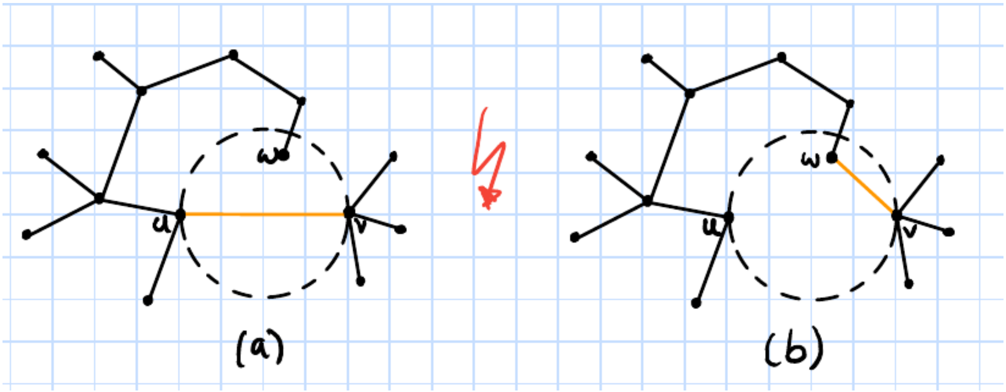
Blatt 6 – Aufgabe 2

Zeige: EMST $\subseteq$ Delaunay-Triangulierung

Blatt 6 – Aufgabe 2

Zeige: EMST $\subseteq$ Delaunay-Triangulierung

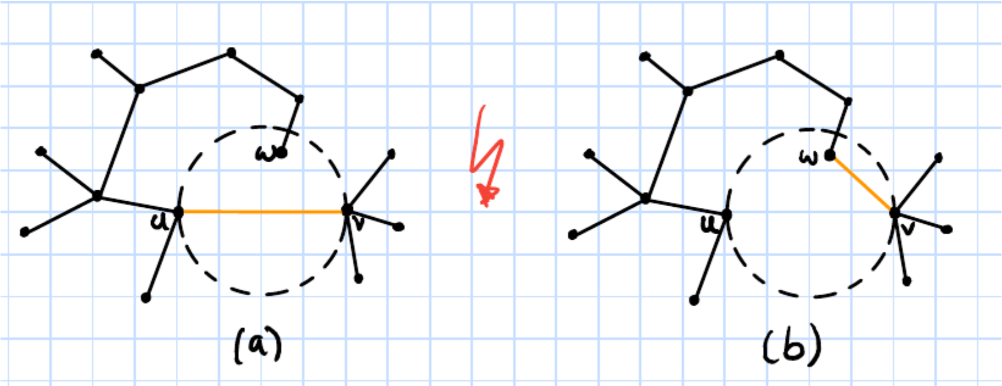
Fall 1: Kreis um uv enthält einen Punkt



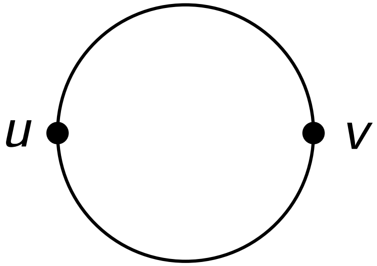
Blatt 6 – Aufgabe 2

Zeige: EMST $\subseteq$ Delaunay-Triangulierung

Fall 1: Kreis um uv enthält einen Punkt



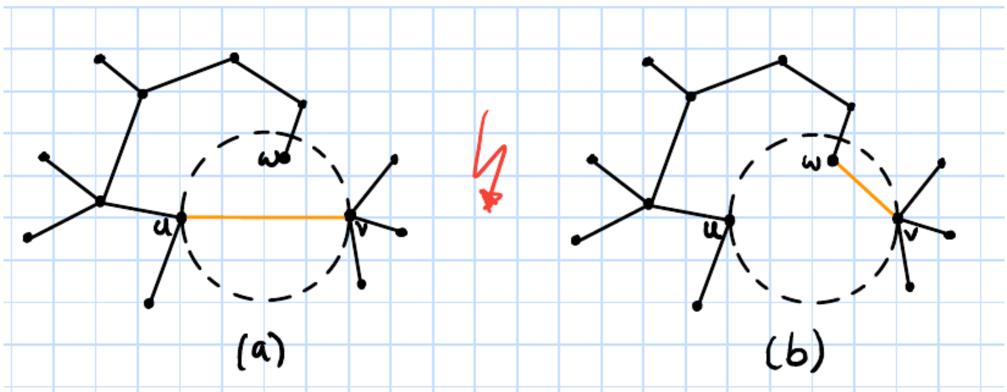
Fall 2: Kreis um uv enthält keinen Punkt



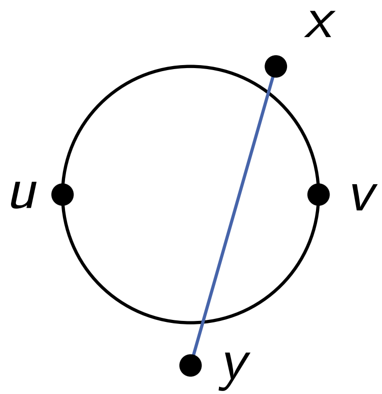
Blatt 6 – Aufgabe 2

Zeige: EMST $\subseteq$ Delaunay-Triangulierung

Fall 1: Kreis um uv enthält einen Punkt



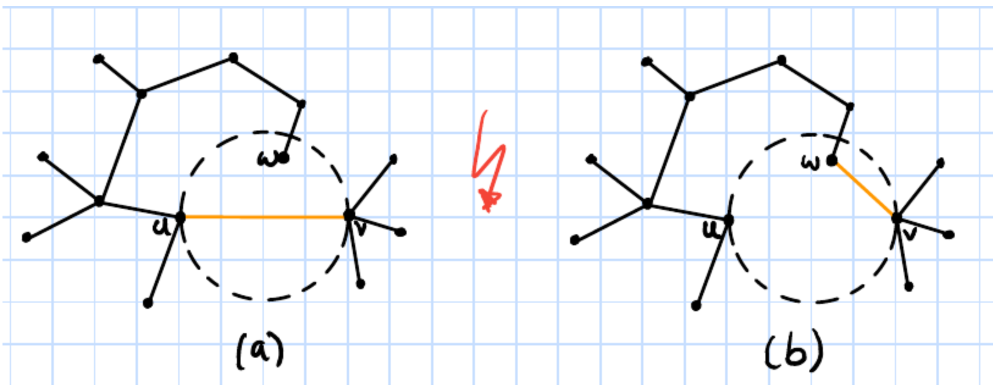
Fall 2: Kreis um uv enthält keinen Punkt



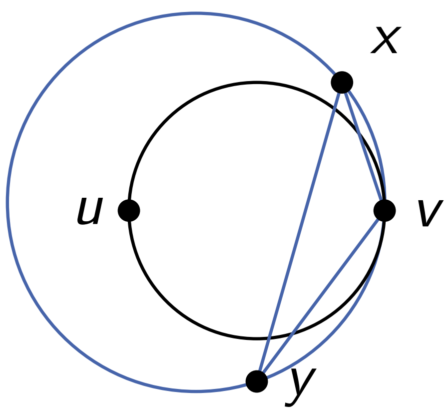
Blatt 6 – Aufgabe 2

Zeige: EMST $\subseteq$ Delaunay-Triangulierung

Fall 1: Kreis um uv enthält einen Punkt



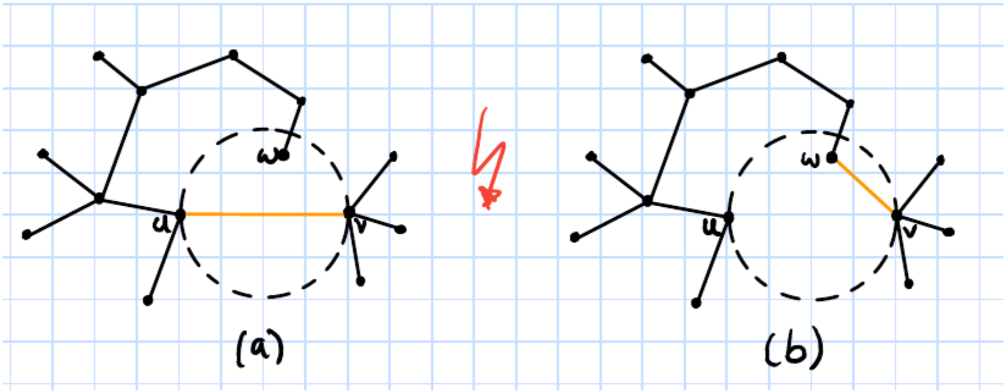
Fall 2: Kreis um uv enthält keinen Punkt



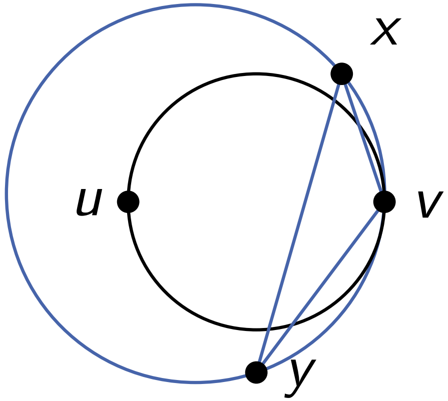
Blatt 6 – Aufgabe 2

Zeige: EMST $\subseteq$ Delaunay-Triangulierung

Fall 1: Kreis um uv enthält einen Punkt



Fall 2: Kreis um uv enthält keinen Punkt

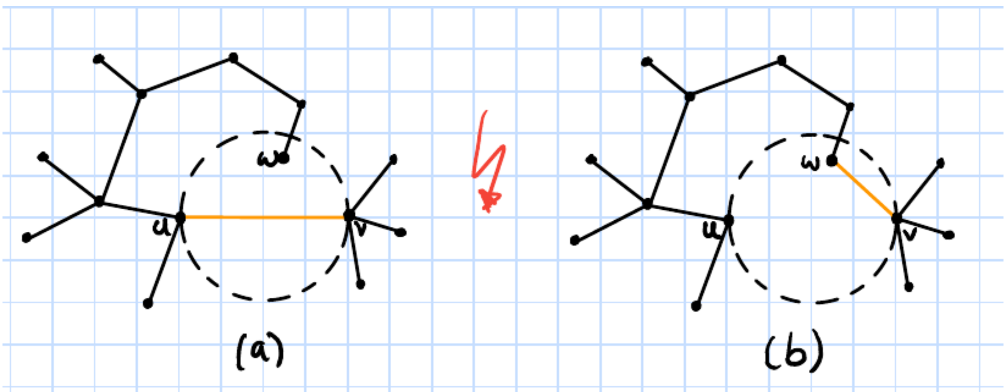


$\Rightarrow xy$ verboten

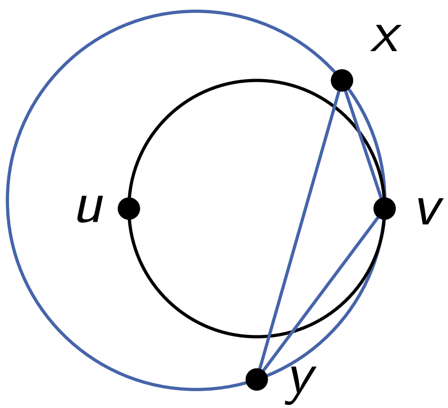
Blatt 6 – Aufgabe 2

Zeige: EMST $\subseteq$ Delaunay-Triangulierung

Fall 1: Kreis um uv enthält einen Punkt



Fall 2: Kreis um uv enthält keinen Punkt



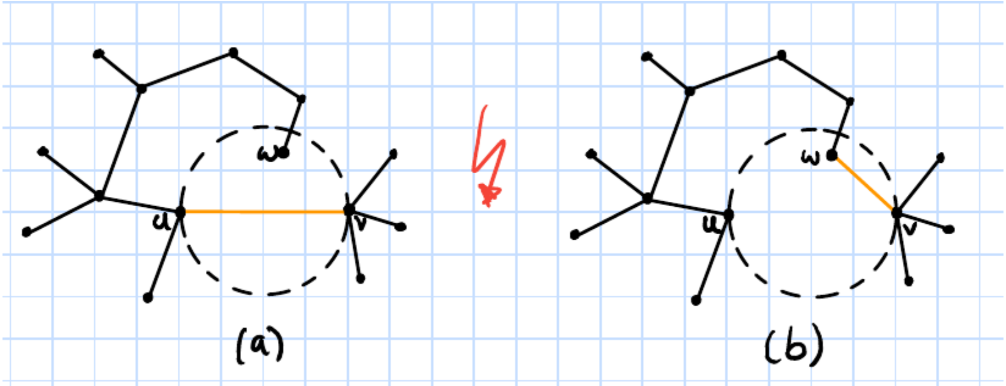
$\Rightarrow$ xy verboten

Laufzeit von Berechnung von euklidischem MST?

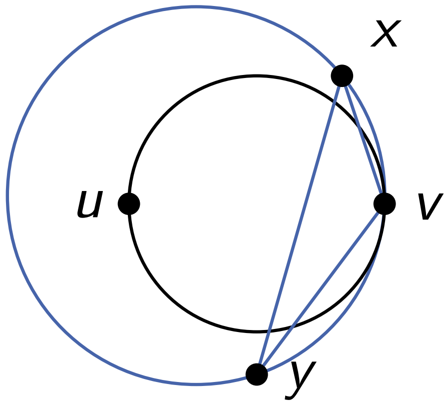
Blatt 6 – Aufgabe 2

Zeige: EMST $\subseteq$ Delaunay-Triangulierung

Fall 1: Kreis um uv enthält einen Punkt



Fall 2: Kreis um uv enthält keinen Punkt



$\Rightarrow xy$ verboten

Laufzeit von Berechnung von euklidischem MST?

Ist EMST $\in$ P?

Blatt 6 – Aufgabe 3

G knickfrei orthogonal zeichenbar mit Winkelkomplexität $\leq k$?

- Reduktion von Planar Rectilinear Monotone 3-SAT

Blatt 6 – Aufgabe 3

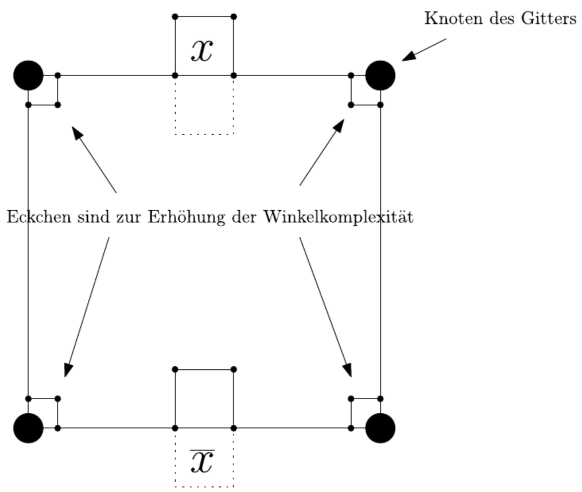
G knickfrei orthogonal zeichenbar mit Winkelkomplexität $\leq k$?

- Reduktion von Planar Rectilinear Monotone 3-SAT
- $k = 6$

Blatt 6 – Aufgabe 3

G knickfrei orthogonal zeichenbar mit Winkelkomplexität $\leq k$?

- Reduktion von Planar Rectilinear Monotone 3-SAT
- $k = 6$

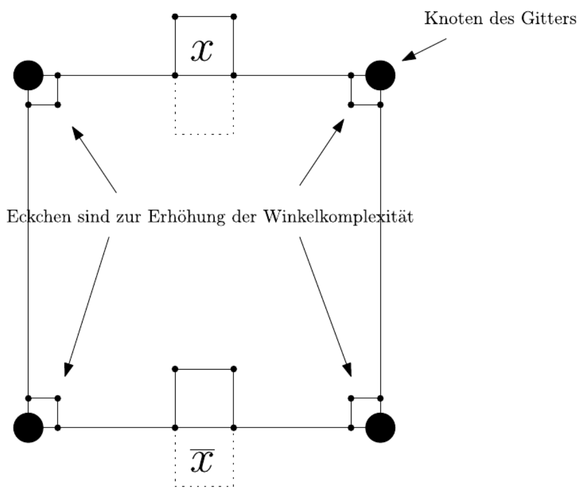


Variablen

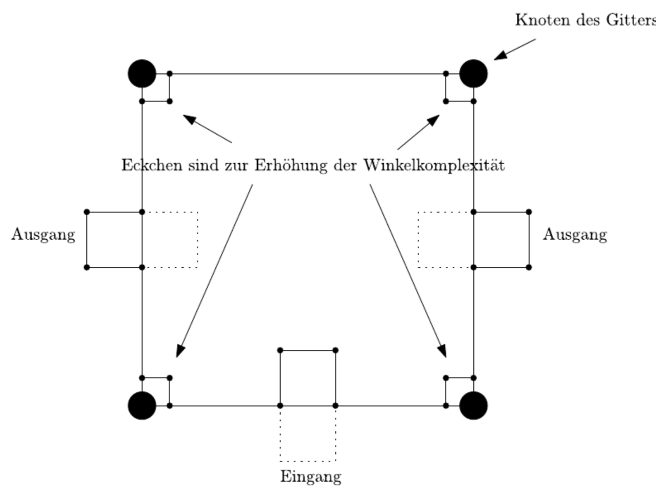
Blatt 6 – Aufgabe 3

G knickfrei orthogonal zeichenbar mit Winkelkomplexität $\leq k$?

- Reduktion von Planar Rectilinear Monotone 3-SAT
- $k = 6$



Variablen

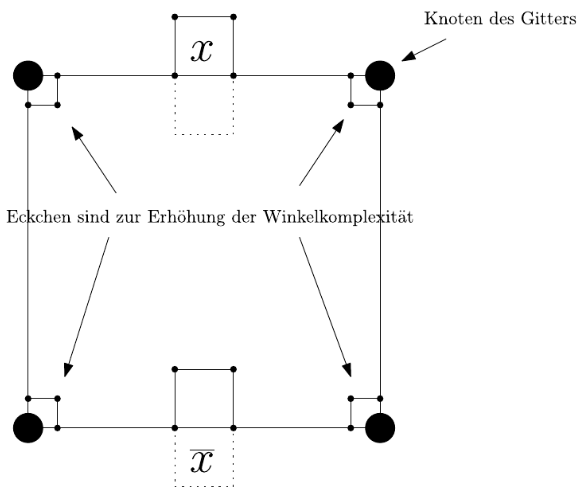


Splitter

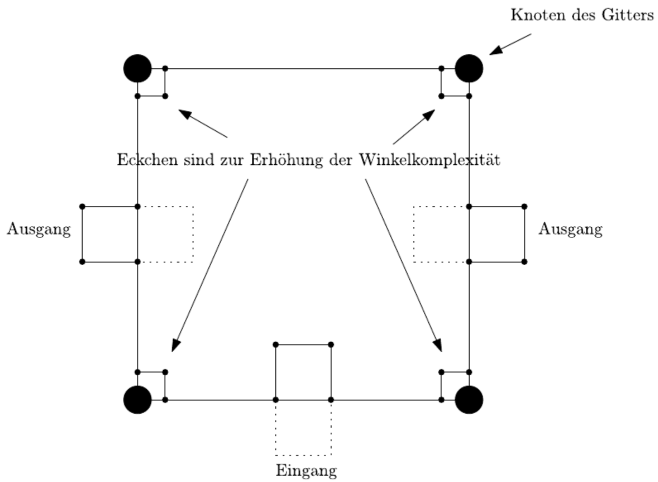
Blatt 6 – Aufgabe 3

G knickfrei orthogonal zeichenbar mit Winkelkomplexität $\leq k$?

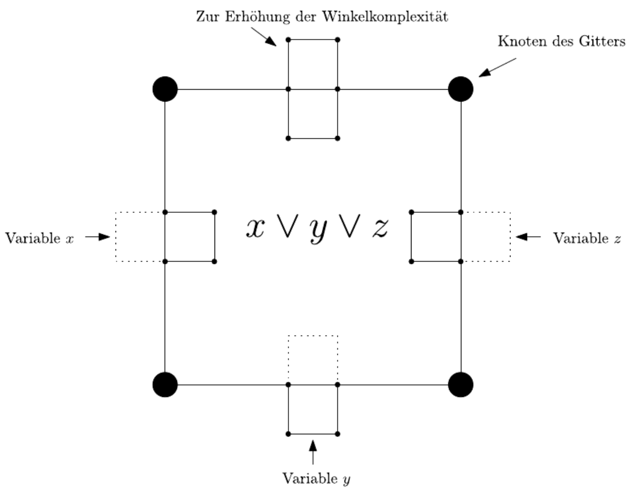
- Reduktion von Planar Rectilinear Monotone 3-SAT
- $k = 6$



Variablen



Splitter

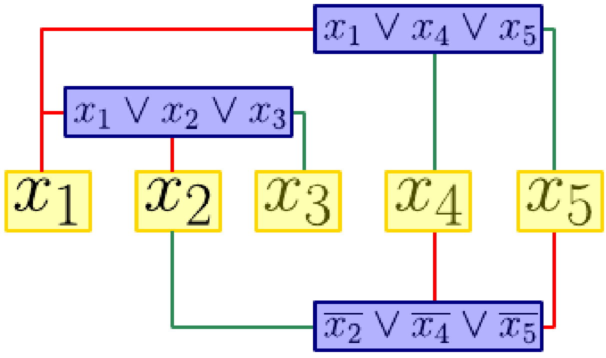


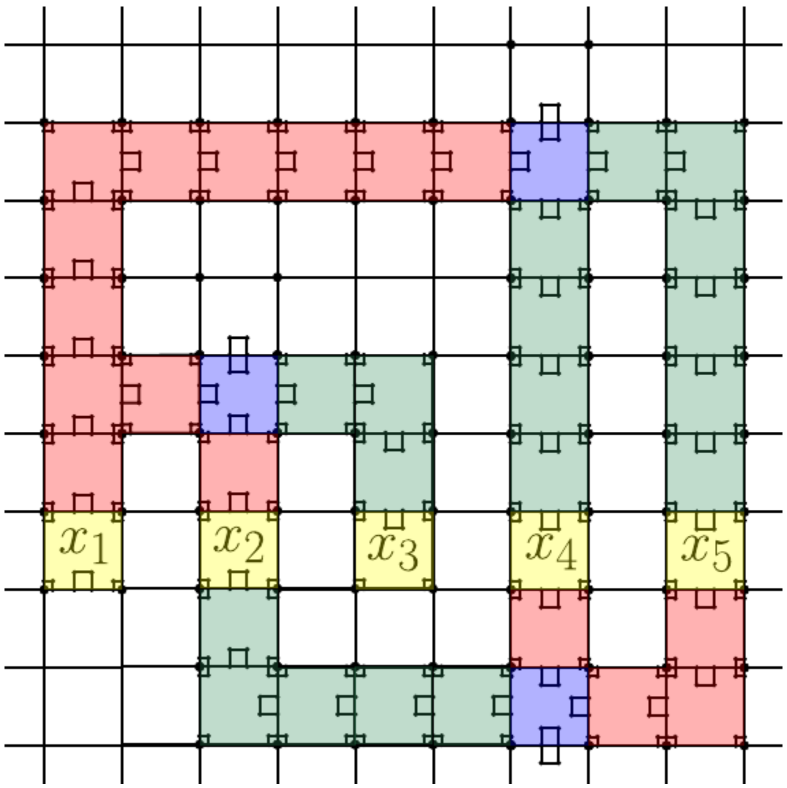
Klausel

Blatt 6 – Aufgabe 3

G knickfrei orthogonal zeichenbar mit Winkelkomplexität $\leq k$?

- Reduktion von Planar Rectilinear Monotone 3-SAT
- $k = 6$

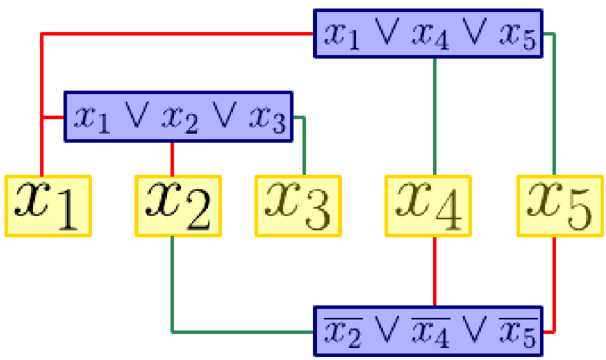


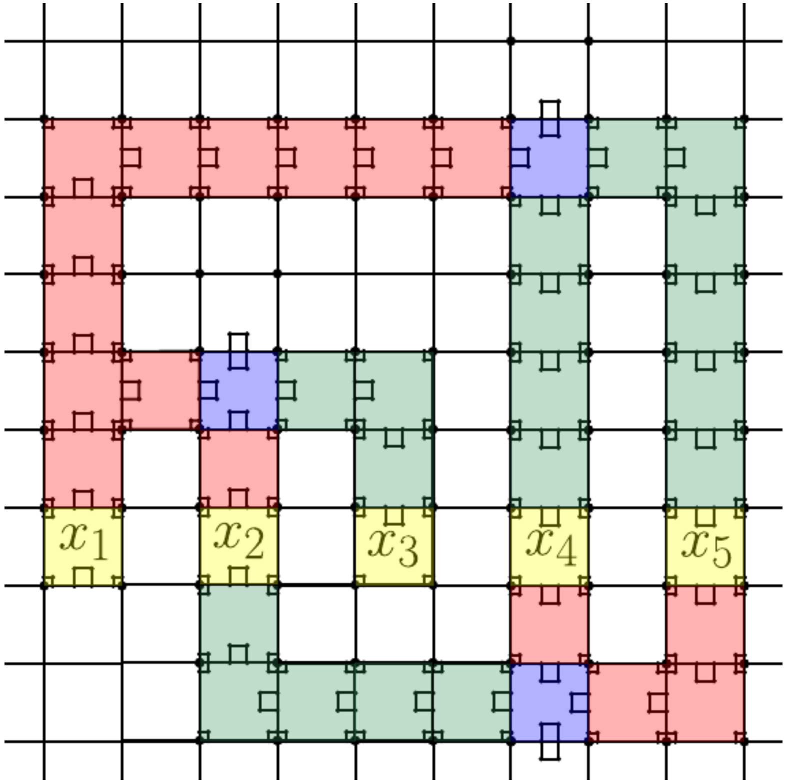


Blatt 6 – Aufgabe 3

G knickfrei orthogonal zeichenbar mit Winkelkomplexität $\leq k$?

- Reduktion von Planar Rectilinear Monotone 3-SAT
- $k = 6$





- Korrektheit + Laufzeit

Reguläre Tilings

Karlsruher Institut für Technologie

(p, q)-Tilings

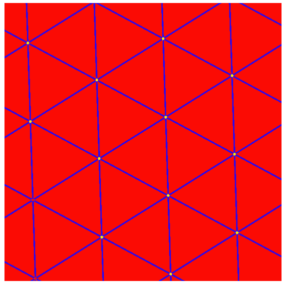
- reguläre Polygone mit p Ecken
- q Polygone teilen sich eine Ecke

Reguläre Tilings

(p, q)-Tilings

- reguläre Polygone mit p Ecken
- q Polygone teilen sich eine Ecke

Euklidisch



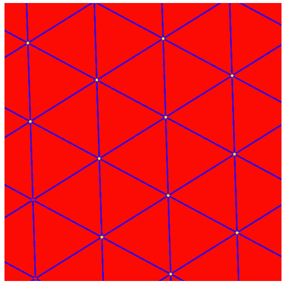
(3,6)-Tiling

Reguläre Tilings

(p, q)-Tilings

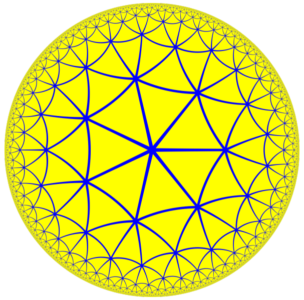
- reguläre Polygone mit p Ecken
- q Polygone teilen sich eine Ecke

Euklidisch



(3,6)-Tiling

Hyperbolisch

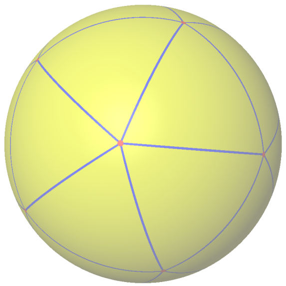
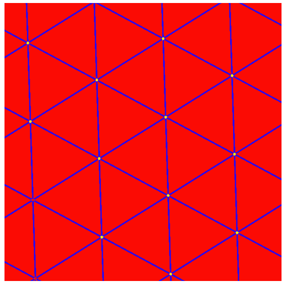
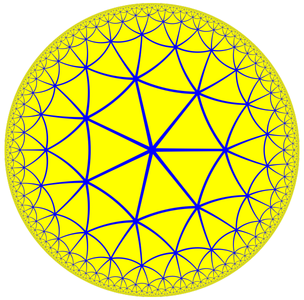


(3,7)-Tiling

Reguläre Tilings

(p, q)-Tilings

- reguläre Polygone mit p Ecken
- q Polygone teilen sich eine Ecke

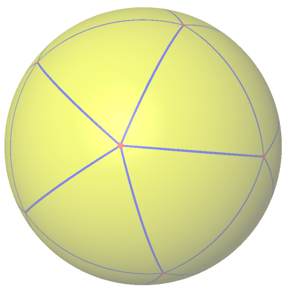
Sphärisch	Euklidisch	Hyperbolisch
		
(3,5)-Tiling	(3,6)-Tiling	(3,7)-Tiling

Reguläre Tilings

(p, q)-Tilings

- reguläre Polygone mit p Ecken
- q Polygone teilen sich eine Ecke

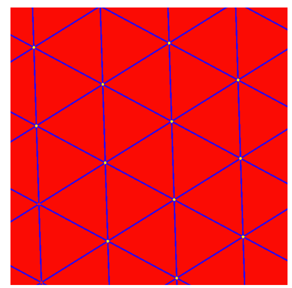
Sphärisch



(3,5)-Tiling

$> \pi$

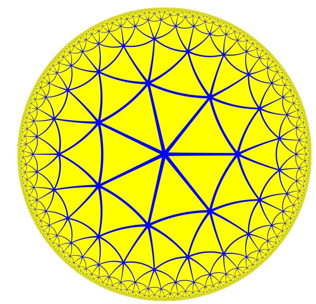
Euklidisch



(3,6)-Tiling

$= \pi$

Hyperbolisch



(3,7)-Tiling

$< \pi$

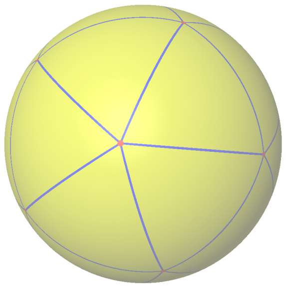
$\triangle$ IWS

Reguläre Tilings

(p, q)-Tilings

- reguläre Polygone mit p Ecken
- q Polygone teilen sich eine Ecke

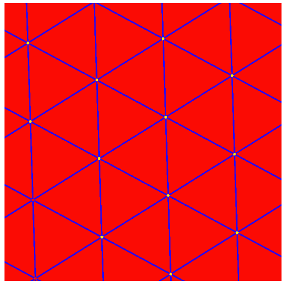
Sphärisch



(3,5)-Tiling

$> \pi$

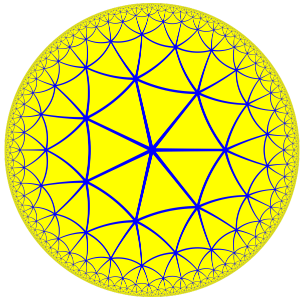
Euklidisch



(3,6)-Tiling

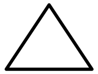
$= \pi$

Hyperbolisch



(3,7)-Tiling

$< \pi$



IWS

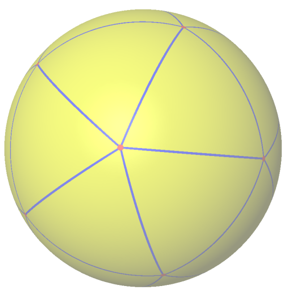
- Für welche p, q gibt es jeweils Tilings?

Reguläre Tilings

(p, q)-Tilings

- reguläre Polygone mit p Ecken
- q Polygone teilen sich eine Ecke

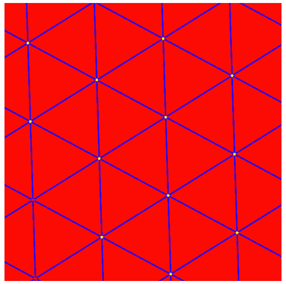
Sphärisch



(3,5)-Tiling

$> \pi$

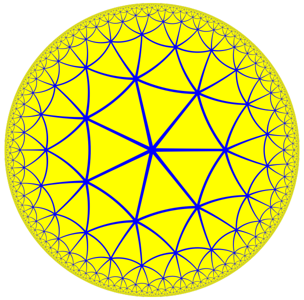
Euklidisch



(3,6)-Tiling

$= \pi$

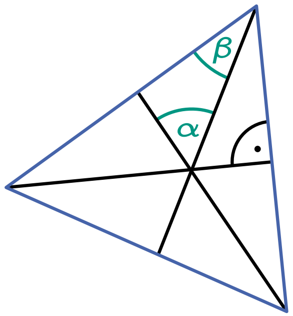
Hyperbolisch



(3,7)-Tiling

$< \pi$

$\triangle$
IWS



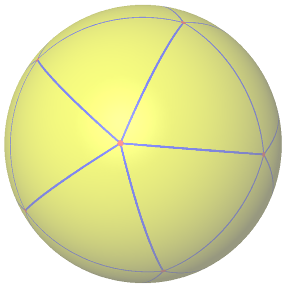
- Für welche p, q gibt es jeweils Tilings?

Reguläre Tilings

(p, q)-Tilings

- reguläre Polygone mit p Ecken
- q Polygone teilen sich eine Ecke

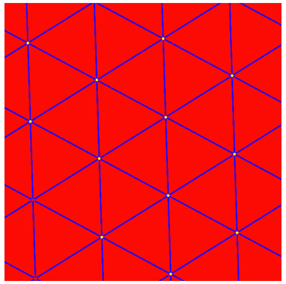
Sphärisch



(3,5)-Tiling

$> \pi$

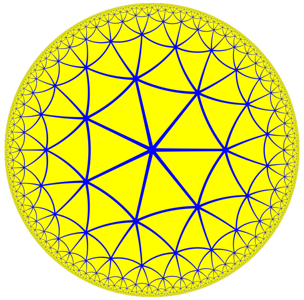
Euklidisch



(3,6)-Tiling

$= \pi$

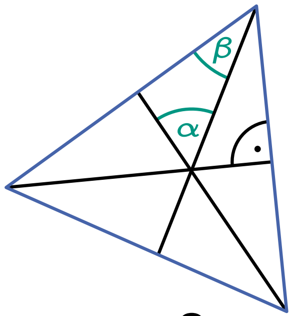
Hyperbolisch



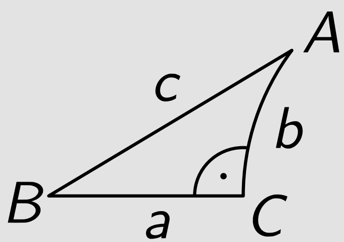
(3,7)-Tiling

$< \pi$

$\triangle$ IWS



- Für welche p, q gibt es jeweils Tilings?
- Wie groß (Inkreis) ist ein Polygon für festes p, q?

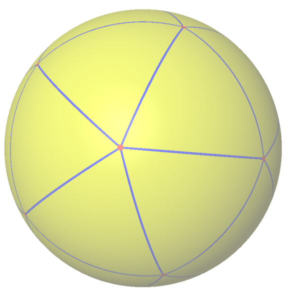
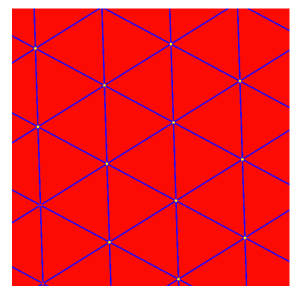
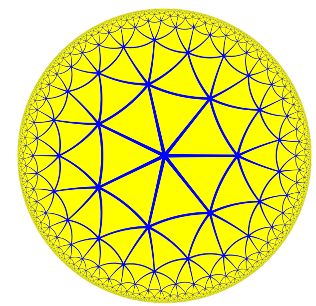


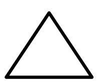
$$\cosh(b) = \frac{\cos(B)}{\sin(A)}$$

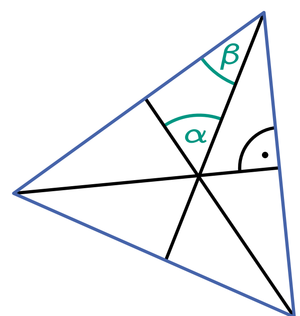
Reguläre Tilings

(*p*, *q*)-Tilings

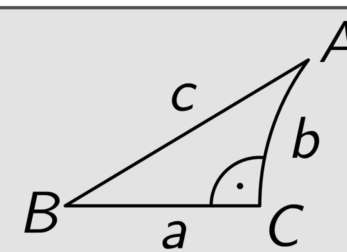
- reguläre Polygone mit p Ecken
- q Polygone teilen sich eine Ecke

Sphärisch	Euklidisch	Hyperbolisch
		
(3,5)-Tiling	(3,6)-Tiling	(3,7)-Tiling
$> \pi$	$= \pi$	$< \pi$


IWS



- Für welche p, q gibt es jeweils Tilings?
- Wie groß (Inkreis) ist ein Polygon für festes p, q?
- Wie verhält sich die Größe für konstantes q mit wachsendem p?



$$\cosh(b) = \frac{\cos(B)}{\sin(A)}$$