

Algorithmische Geometrie

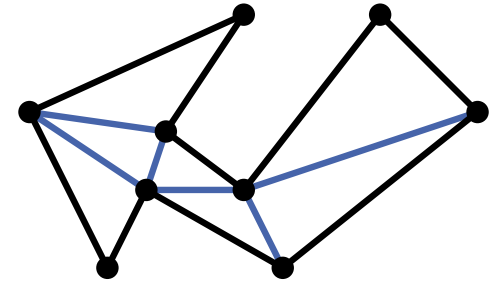
Triangulierung eines Polygons



Triangulierung von Polygonen

Definition

Eine **Triangulierung** eines Polygons P ist eine planare Unterteilung von P , sodass jede Facette ein Dreieck ist.



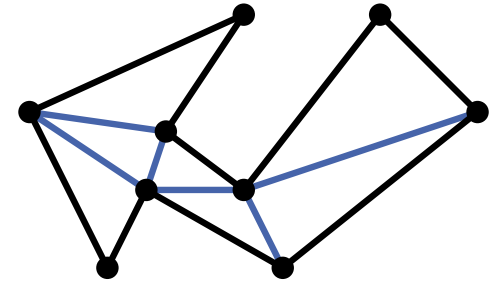
Triangulierung von Polygonen

Definition

Eine **Triangulierung** eines Polygons P ist eine planare Unterteilung von P , sodass jede Facette ein Dreieck ist.

Problem

Gegeben P , finde Diagonalen, die P triangulieren.



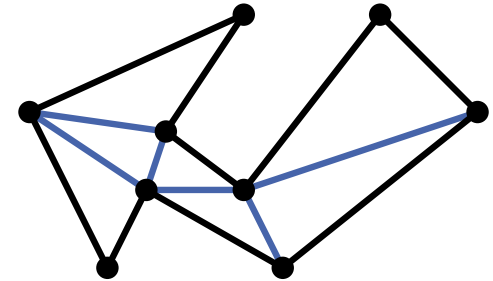
Triangulierung von Polygonen

Definition

Eine **Triangulierung** eines Polygons P ist eine planare Unterteilung von P , sodass jede Facette ein Dreieck ist.

Problem

Gegeben P , finde Diagonalen, die P triangulieren.

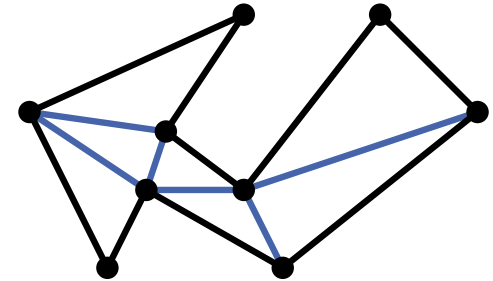


Gibt es das immer?

Triangulierung von Polygonen

Definition

Eine **Triangulierung** eines Polygons P ist eine planare Unterteilung von P , sodass jede Facette ein Dreieck ist.



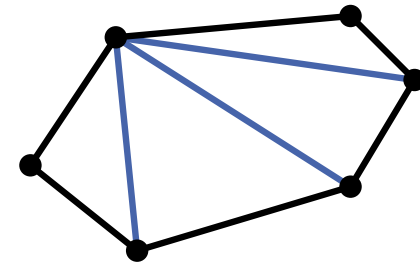
Problem

Gegeben P , finde Diagonalen, die P triangulieren.

Gibt es das immer?

Geht es etwas einfacher?

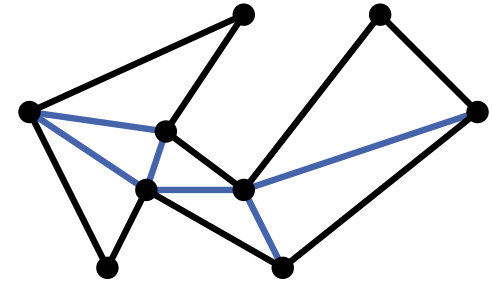
- konvexe Polygone sind leicht zu triangulieren



Triangulierung von Polygonen

Definition

Eine **Triangulierung** eines Polygons P ist eine planare Unterteilung von P , sodass jede Facette ein Dreieck ist.



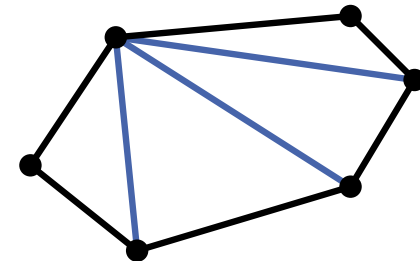
Problem

Gegeben P , finde Diagonalen, die P triangulieren.

Gibt es das immer?

Geht es etwas einfacher?

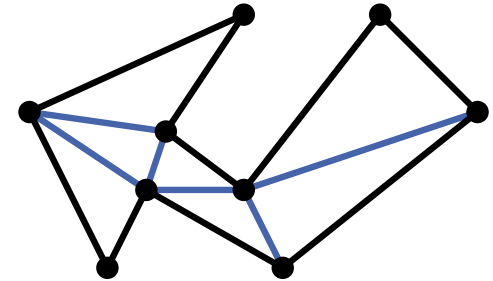
- konvexe Polygone sind leicht zu triangulieren
- Idee: zerlege P in konvexe Polygone
- trianguliere dann die konvexen Teilpolygone



Triangulierung von Polygonen

Definition

Eine **Triangulierung** eines Polygons P ist eine planare Unterteilung von P , sodass jede Facette ein Dreieck ist.



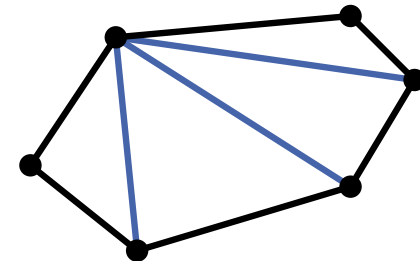
Problem

Gegeben P , finde Diagonalen, die P triangulieren.

Gibt es das immer?

Geht es etwas einfacher?

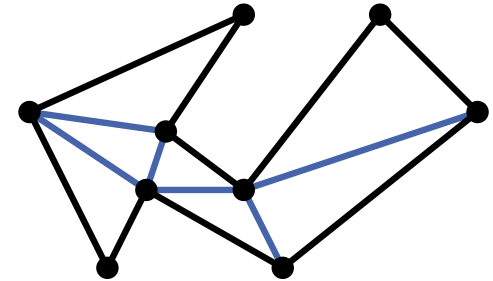
- konvexe Polygone sind leicht zu triangulieren
- Idee: zerlege P in konvexe Polygone
- trianguliere dann die konvexen Teilpolygone
- Problem: eine solche Zerlegung zu finden ist leider nicht viel leichter



Triangulierung von Polygonen

Definition

Eine **Triangulierung** eines Polygons P ist eine planare Unterteilung von P , sodass jede Facette ein Dreieck ist.



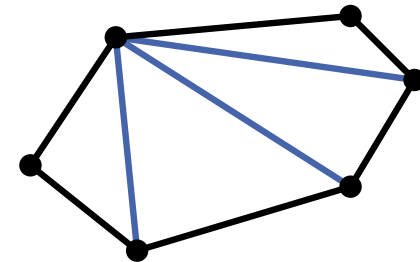
Problem

Gegeben P , finde Diagonalen, die P triangulieren.

Gibt es das immer?

Geht es etwas einfacher?

- konvexe Polygone sind leicht zu triangulieren
- Idee: zerlege P in konvexe Polygone
- trianguliere dann die konvexen Teilpolygone
- Problem: eine solche Zerlegung zu finden ist leider nicht viel leichter



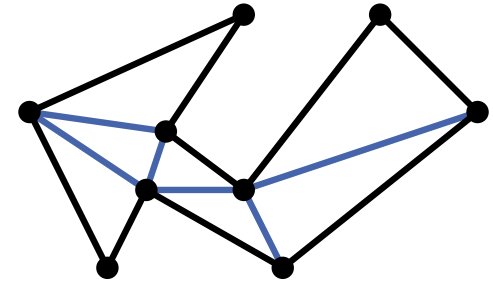
Plan im Folgenden

- finde eine schwächer Eigenschaft als Konvexität

Triangulierung von Polygonen

Definition

Eine **Triangulierung** eines Polygons P ist eine planare Unterteilung von P , sodass jede Facette ein Dreieck ist.



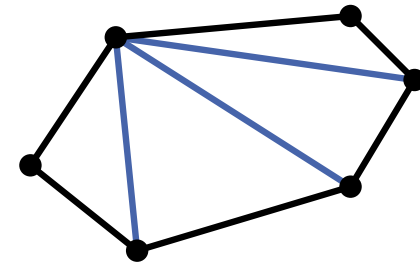
Problem

Gegeben P , finde Diagonalen, die P triangulieren.

Gibt es das immer?

Geht es etwas einfacher?

- konvexe Polygone sind leicht zu triangulieren
- Idee: zerlege P in konvexe Polygone
- trianguliere dann die konvexen Teilpolygone
- Problem: eine solche Zerlegung zu finden ist leider nicht viel leichter



Plan im Folgenden

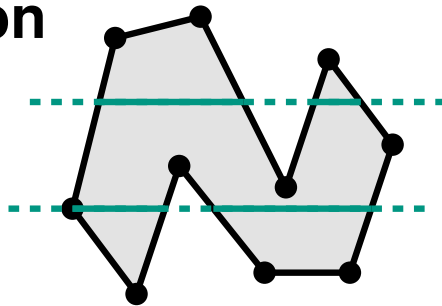
- finde eine schwächer Eigenschaft als Konvexität
- Triangulieren der Teilpolygone mit dieser Eigenschaft wird schwerer
- Zerlegung von P in Teilpolygone mit der Eigenschaft wird leichter

y-monotone Polygone

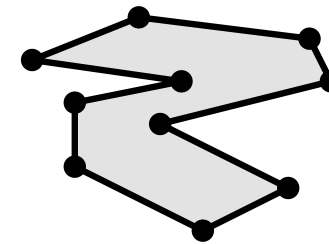
Definition

Ein Polygon ist **y-monoton**, wenn der Schnitt mit jeder horizontalen Geraden zusammenhängend ist.

nicht y-monoton



y-monoton

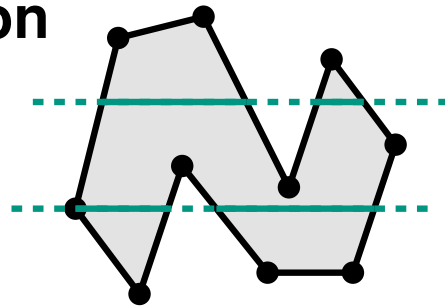


y-monotone Polygone

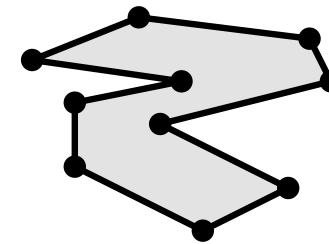
Definition

Ein Polygon ist **y-monoton**, wenn der Schnitt mit jeder horizontalen Geraden zusammenhängend ist.

nicht y-monoton



y-monoton



Anmerkung

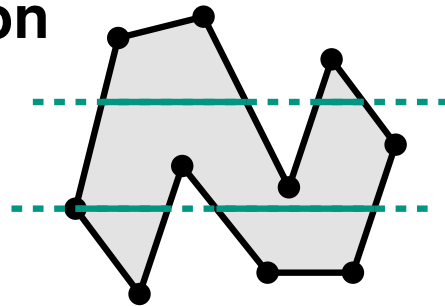
- konvexe Polygone sind monoton in jede Richtung

y-monotone Polygone

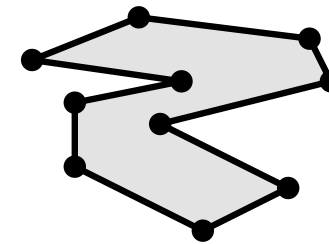
Definition

Ein Polygon ist **y-monoton**, wenn der Schnitt mit jeder horizontalen Geraden zusammenhängend ist.

nicht y-monoton



y-monoton



Anmerkung

- konvexe Polygone sind monoton in jede Richtung

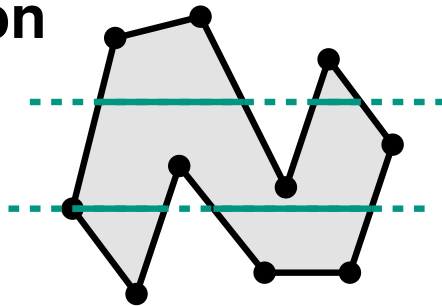
x- und y-monoton \Rightarrow konvex?

y-monotone Polygone

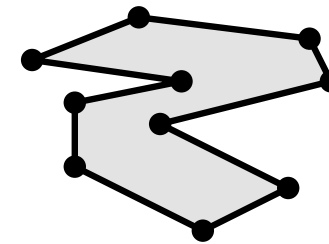
Definition

Ein Polygon ist **y-monoton**, wenn der Schnitt mit jeder horizontalen Geraden zusammenhängend ist.

nicht y-monoton



y-monoton



Anmerkung

- konvexe Polygone sind monoton in jede Richtung

x- und y-monoton \Rightarrow konvex?

Unser Plan

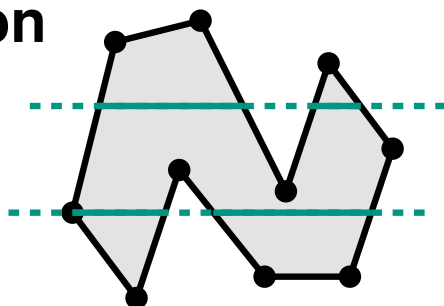
- zerlege beliebiges Polygon in $O(n \log n)$ Zeit in y-monotone Teilpolygone
 → jetzt gleich

y-monotone Polygone

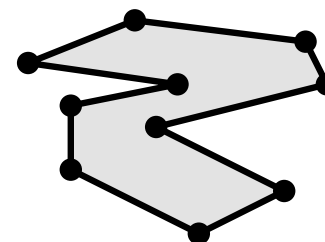
Definition

Ein Polygon ist **y-monoton**, wenn der Schnitt mit jeder horizontalen Geraden zusammenhängend ist.

nicht y-monoton



y-monoton



Anmerkung

- konvexe Polygone sind monoton in jede Richtung

x- und y-monoton \Rightarrow konvex?

Unser Plan

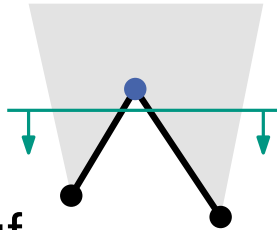
- zerlege beliebiges Polygon in $O(n \log n)$ Zeit in y-monotone Teilpolygone
→ jetzt gleich
- trianguliere ein y-monotones Polygon in $O(n)$ Zeit
→ Übungsblatt

Was macht ein Polygon nicht y -monoton?

Was macht ein Polygon nicht y -monoton?

Split-Knoten

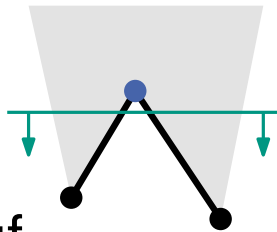
- Kanten liegen unten
- Polygon liegt oben
- Polygon spaltet sich auf (von oben kommend)



Was macht ein Polygon nicht y -monoton?

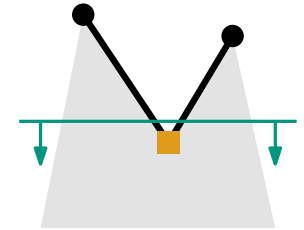
Split-Knoten

- Kanten liegen unten
- Polygon liegt oben
- Polygon spaltet sich auf (von oben kommend)



Merge-Knoten

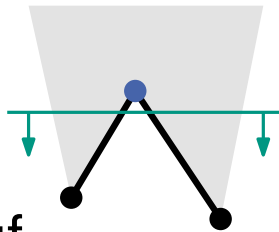
- Kanten liegen oben
- Polygon liegt unten
- Polygone fügen sich zusammen



Was macht ein Polygon nicht y -monoton?

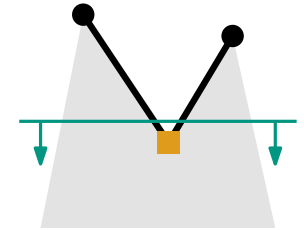
Split-Knoten

- Kanten liegen unten
- Polygon liegt oben
- Polygon spaltet sich auf (von oben kommend)



Merge-Knoten

- Kanten liegen oben
- Polygon liegt unten
- Polygone fügen sich zusammen



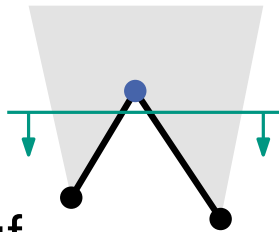
Beobachtung

- es gibt Merge- oder Split-Knoten \Rightarrow das Polygon ist nicht y -monoton

Was macht ein Polygon nicht y -monoton?

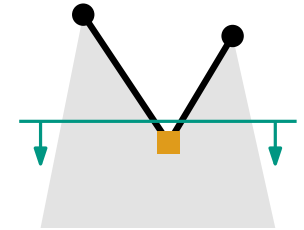
Split-Knoten

- Kanten liegen unten
- Polygon liegt oben
- Polygon spaltet sich auf (von oben kommend)



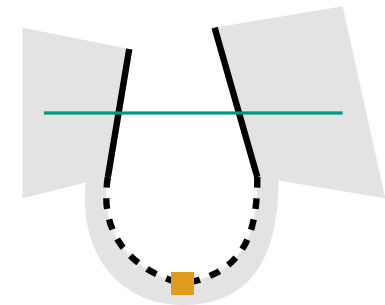
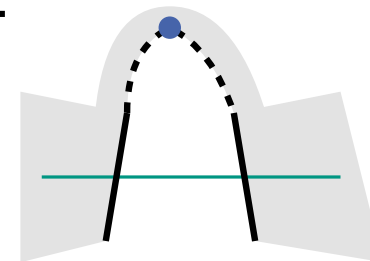
Merge-Knoten

- Kanten liegen oben
- Polygon liegt unten
- Polygone fügen sich zusammen



Beobachtung

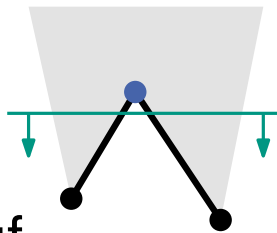
- es gibt Merge- oder Split-Knoten \Rightarrow das Polygon ist nicht y -monoton
- die Umkehrung gilt auch; Beweis durch Bild:



Was macht ein Polygon nicht y -monoton?

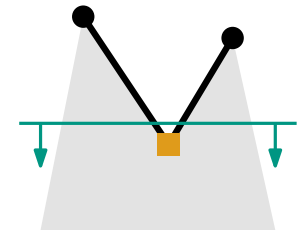
Split-Knoten

- Kanten liegen unten
- Polygon liegt oben
- Polygon spaltet sich auf (von oben kommend)



Merge-Knoten

- Kanten liegen oben
- Polygon liegt unten
- Polygone fügen sich zusammen

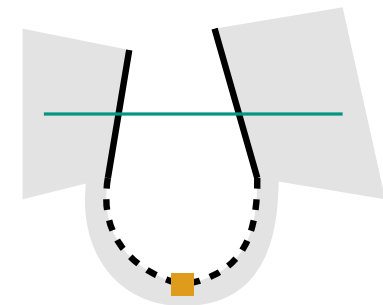
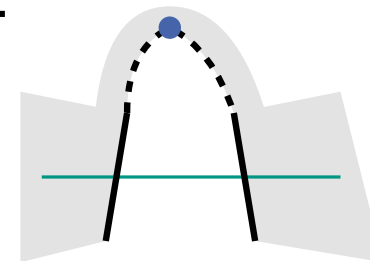


Beobachtung

- es gibt Merge- oder Split-Knoten \Rightarrow das Polygon ist nicht y -monoton
- die Umkehrung gilt auch; Beweis durch Bild:

Lemma (y-Monotonie)

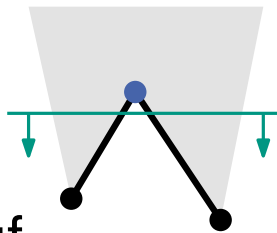
Ein Polygon ist genau dann y -monoton, wenn es keine Split- oder Merge-Knoten gibt.



Was macht ein Polygon nicht y -monoton?

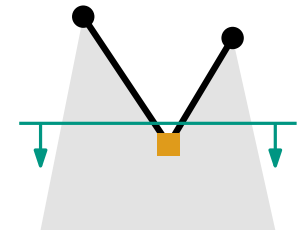
Split-Knoten

- Kanten liegen unten
- Polygon liegt oben
- Polygon spaltet sich auf (von oben kommend)



Merge-Knoten

- Kanten liegen oben
- Polygon liegt unten
- Polygone fügen sich zusammen

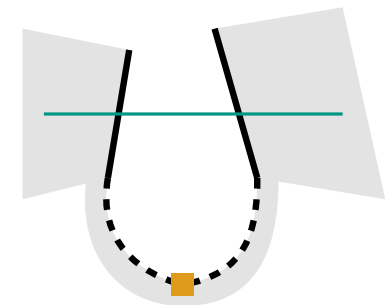
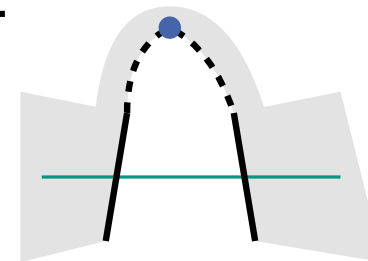


Beobachtung

- es gibt Merge- oder Split-Knoten \Rightarrow das Polygon ist nicht y -monoton
- die Umkehrung gilt auch; Beweis durch Bild:

Lemma (y-Monotonie)

Ein Polygon ist genau dann y -monoton, wenn es keine Split- oder Merge-Knoten gibt.



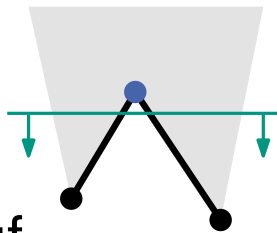
Ziel

- eliminiere alle Split- und Merge-Knoten
- füge dazu Diagonalen ein

Was macht ein Polygon nicht y -monoton?

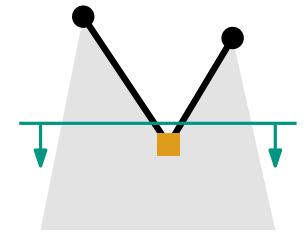
Split-Knoten

- Kanten liegen unten
- Polygon liegt oben
- Polygon spaltet sich auf (von oben kommend)



Merge-Knoten

- Kanten liegen oben
- Polygon liegt unten
- Polygone fügen sich zusammen

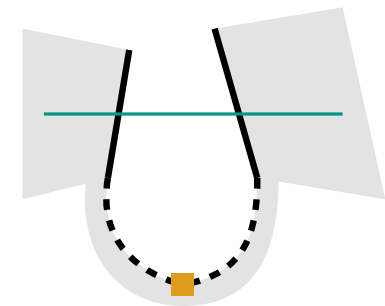
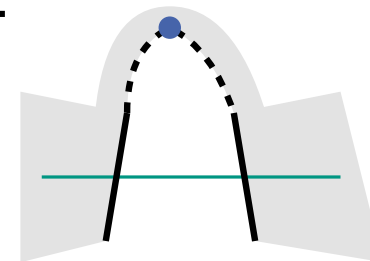


Beobachtung

- es gibt Merge- oder Split-Knoten \Rightarrow das Polygon ist nicht y -monoton
- die Umkehrung gilt auch; Beweis durch Bild:

Lemma (y -Monotonie)

Ein Polygon ist genau dann y -monoton, wenn es keine Split- oder Merge-Knoten gibt.



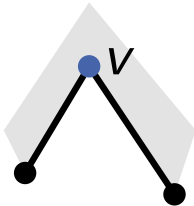
Ziel

- eliminiere alle Split- und Merge-Knoten
- füge dazu Diagonalen ein
- von Split-Knoten nach oben, von Merge-Knoten nach unten

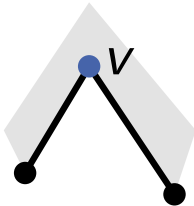
Eliminierung von Split-Knoten

Idee für Split-Knoten v

- finde Knoten u oberhalb von v



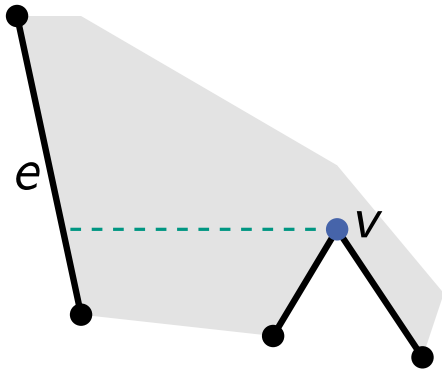
Eliminierung von Split-Knoten



Idee für Split-Knoten v

- finde Knoten u oberhalb von v
- wenn u nah bei v liegt, dann schneidet die Diagonale uv das Polygon hoffentlich nicht

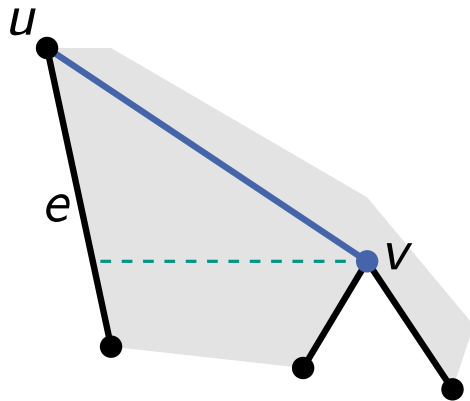
Eliminierung von Split-Knoten



Idee für Split-Knoten v

- finde Knoten u oberhalb von v
- wenn u nah bei v liegt, dann schneidet die Diagonale uv das Polygon hoffentlich nicht
- finde nächste Kante e links von v

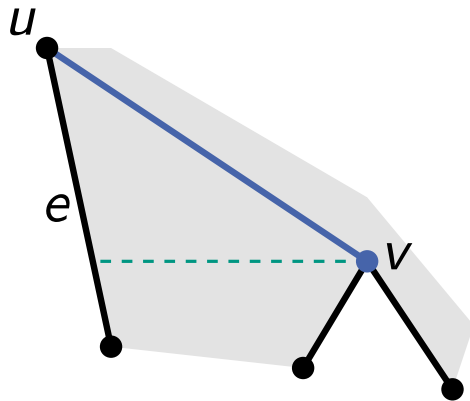
Eliminierung von Split-Knoten



Idee für Split-Knoten v

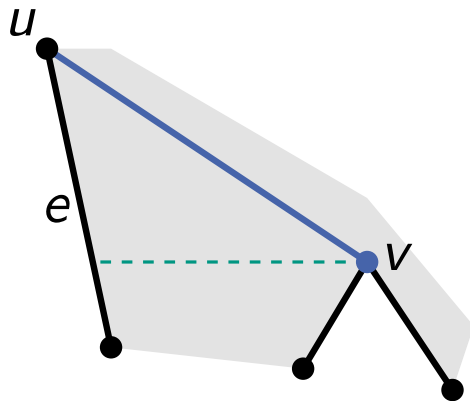
- finde Knoten u oberhalb von v
- wenn u nah bei v liegt, dann schneidet die Diagonale uv das Polygon hoffentlich nicht
- finde nächste Kante e links von v
- wähle oberen Endpunkt von e als u

Eliminierung von Split-Knoten



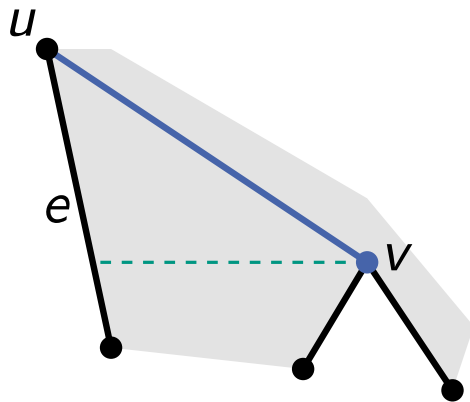
Idee für Split-Knoten v

- finde Knoten u oberhalb von v
- wenn u nah bei v liegt, dann schneidet die Diagonale uv das Polygon hoffentlich nicht
- finde nächste Kante e links von v
- wähle oberen Endpunkt von e als u



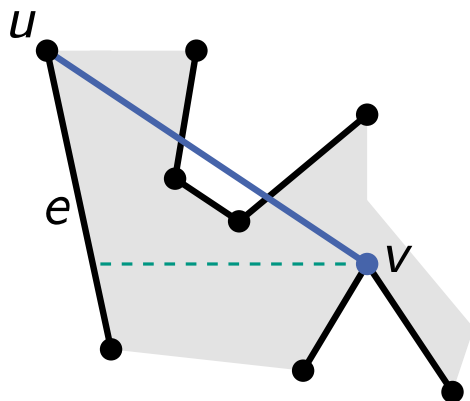
Problem

Eliminierung von Split-Knoten



Idee für Split-Knoten v

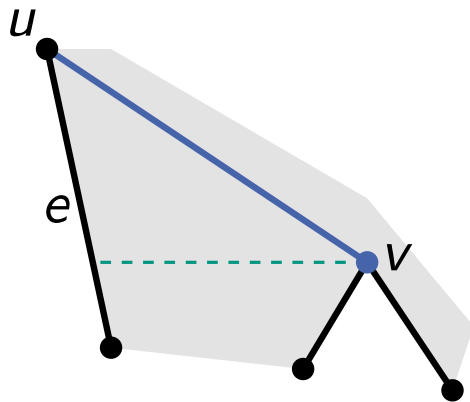
- finde Knoten u oberhalb von v
- wenn u nah bei v liegt, dann schneidet die Diagonale uv das Polygon hoffentlich nicht
- finde nächste Kante e links von v
- wähle oberen Endpunkt von e als u



Problem

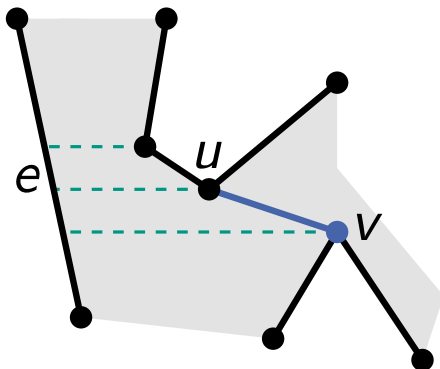
- uv könnte andere Kanten des Polygons schneiden

Eliminierung von Split-Knoten



Idee für Split-Knoten v

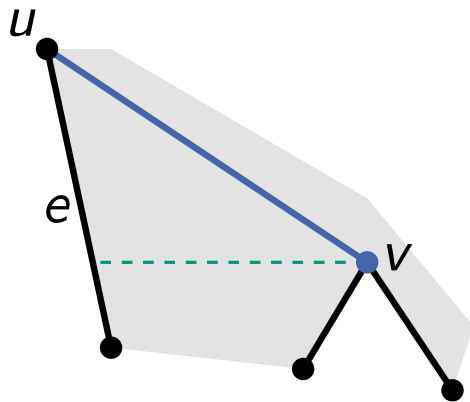
- finde Knoten u oberhalb von v
- wenn u nah bei v liegt, dann schneidet die Diagonale uv das Polygon hoffentlich nicht
- finde nächste Kante e links von v
- wähle oberen Endpunkt von e als u



Problem

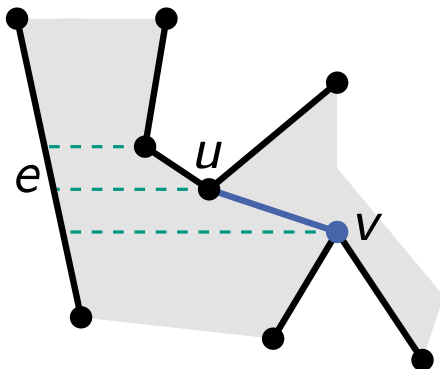
- uv könnte andere Kanten des Polygons schneiden
- wähle für u stattdessen den tiefsten Knoten über v , der e links neben sich hat

Eliminierung von Split-Knoten



Idee für Split-Knoten v

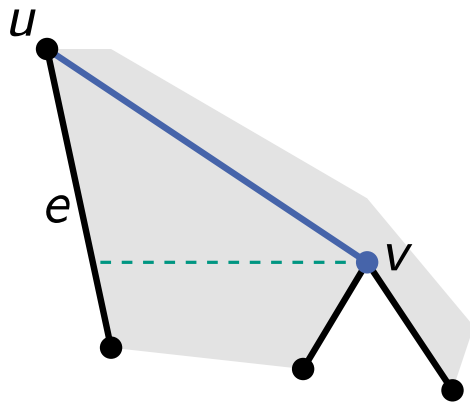
- finde Knoten u oberhalb von v
- wenn u nah bei v liegt, dann schneidet die Diagonale uv das Polygon hoffentlich nicht
- finde nächste Kante e links von v
- wähle oberen Endpunkt von e als u



Problem

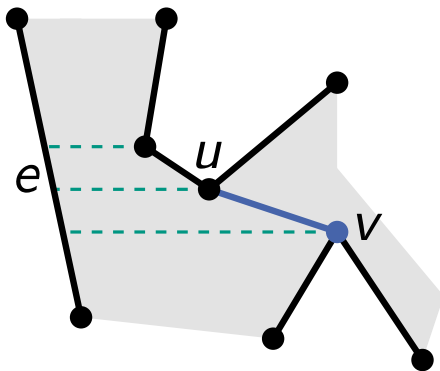
- uv könnte andere Kanten des Polygons schneiden
- wähle für u stattdessen den tiefsten Knoten über v , der e links neben sich hat
- diesen Knoten nennen wir den **Helfer** von e
- **Beachte:** Helfer hängt von v ab

Eliminierung von Split-Knoten



Idee für Split-Knoten v

- finde Knoten u oberhalb von v
- wenn u nah bei v liegt, dann schneidet die Diagonale uv das Polygon hoffentlich nicht
- finde nächste Kante e links von v
- wähle oberen Endpunkt von e als u



Problem

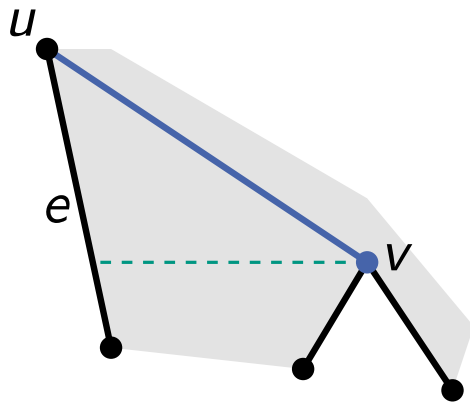
- uv könnte andere Kanten des Polygons schneiden
- wähle für u stattdessen den tiefsten Knoten über v , der e links neben sich hat
- diesen Knoten nennen wir den **Helfer** von e
- **Beachte:** Helfer hängt von v ab

Lemma

(der Helfer hilft)

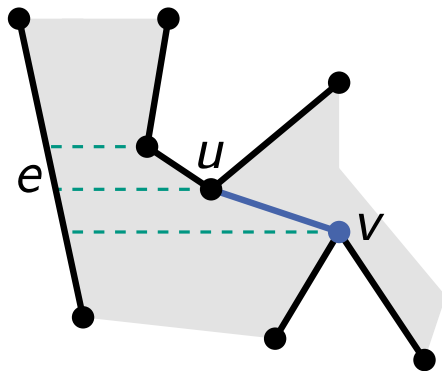
Sei v ein Split-Knoten, e die Kante links neben v und u der Helfer von e (bzgl. v). Dann schneidet uv keine Kante des Polygons (außer in u und v).

Eliminierung von Split-Knoten



Idee für Split-Knoten v

- finde Knoten u oberhalb von v
- wenn u nah bei v liegt, dann schneidet die Diagonale uv das Polygon hoffentlich nicht
- finde nächste Kante e links von v
- wähle oberen Endpunkt von e als u



Problem

- uv könnte andere Kanten des Polygons schneiden
- wähle für u stattdessen den tiefsten Knoten über v , der e links neben sich hat
- diesen Knoten nennen wir den **Helfer** von e
- **Beachte:** Helfer hängt von v ab

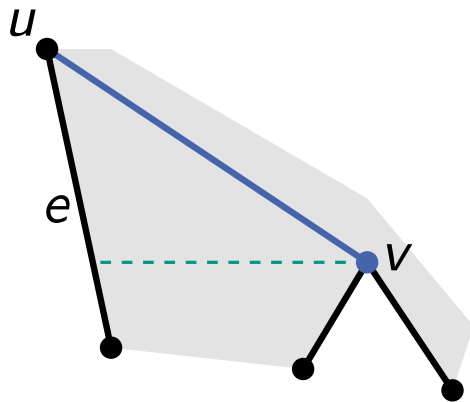
Lemma

(der Helfer hilft)

Sei v ein Split-Knoten, e die Kante links neben v und u der Helfer von e (bzgl. v). Dann schneidet uv keine Kante des Polygons (außer in u und v).

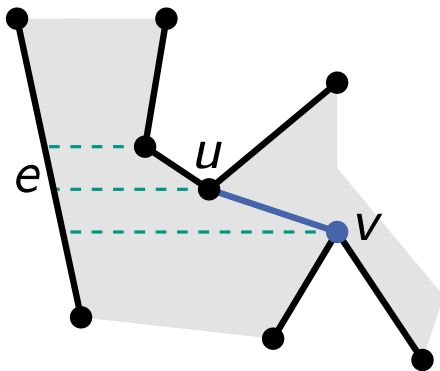
Beweis:

Eliminierung von Split-Knoten



Idee für Split-Knoten v

- finde Knoten u oberhalb von v
- wenn u nah bei v liegt, dann schneidet die Diagonale uv das Polygon hoffentlich nicht
- finde nächste Kante e links von v
- wähle oberen Endpunkt von e als u



Problem

- uv könnte andere Kanten des Polygons schneiden
- wähle für u stattdessen den tiefsten Knoten über v , der e links neben sich hat
- diesen Knoten nennen wir den **Helfer** von e
- **Beachte:** Helfer hängt von v ab

Lemma

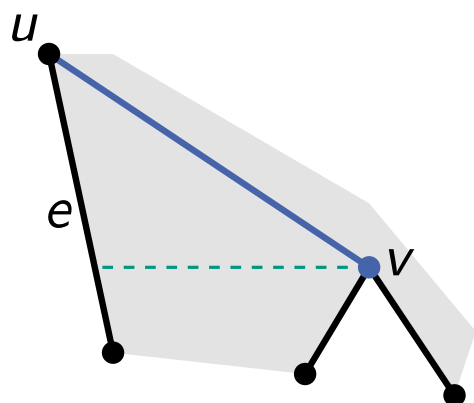
(der Helfer hilft)

Sei v ein Split-Knoten, e die Kante links neben v und u der Helfer von e (bzgl. v). Dann schneidet uv keine Kante des Polygons (außer in u und v).

Beweis: ■ das Viereck zwischen uv und e enthält keine Knoten

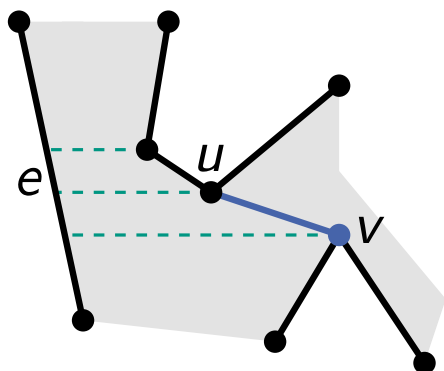
Warum?

Eliminierung von Split-Knoten



Idee für Split-Knoten v

- finde Knoten u oberhalb von v
- wenn u nah bei v liegt, dann schneidet die Diagonale uv das Polygon hoffentlich nicht
- finde nächste Kante e links von v
- wähle oberen Endpunkt von e als u



Problem

- uv könnte andere Kanten des Polygons schneiden
- wähle für u stattdessen den tiefsten Knoten über v , der e links neben sich hat
- diesen Knoten nennen wir den **Helfer** von e
- **Beachte:** Helfer hängt von v ab

Lemma

(der Helfer hilft)

Sei v ein Split-Knoten, e die Kante links neben v und u der Helfer von e (bzgl. v). Dann schneidet uv keine Kante des Polygons (außer in u und v).

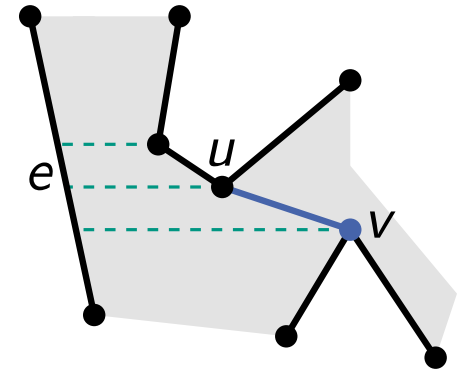
Beweis: ■ das Viereck zwischen uv und e enthält keine Knoten
 ■ keine Polygonkante kann uv schneiden

Warum?

Warum?

Eliminierung von Split-Knoten

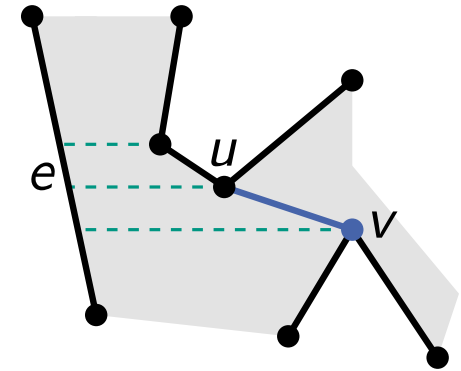
Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



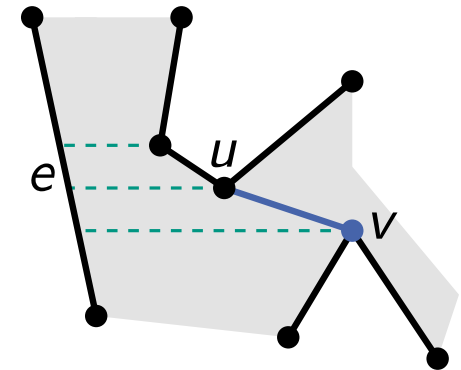
Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)

Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
- der Helfer von e liegt über v



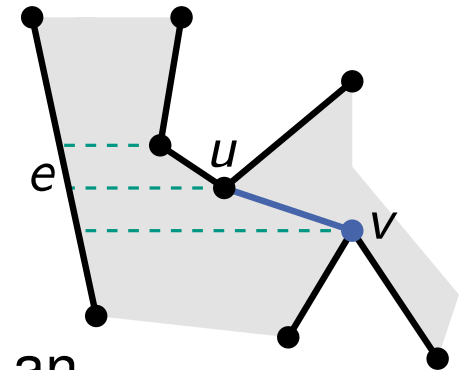
Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)

Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)



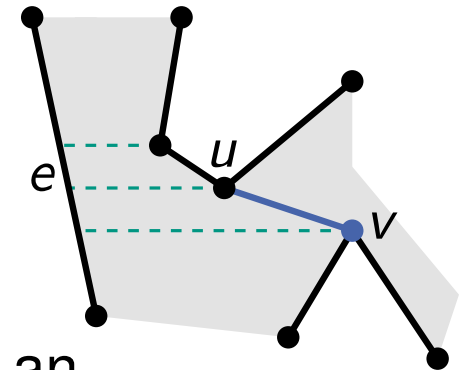
Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)

Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)



Event-Queue

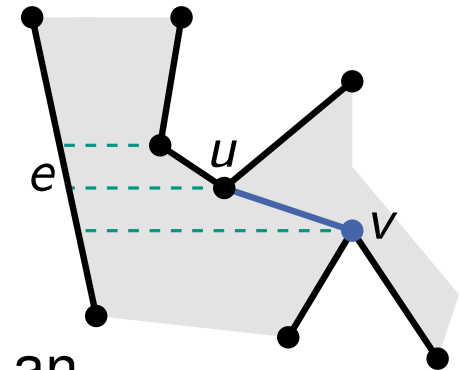
Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)

Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)



Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

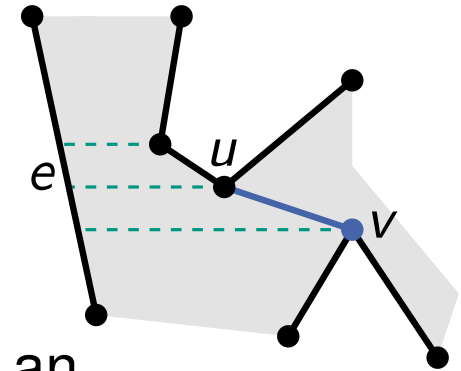
Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)

Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)



Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

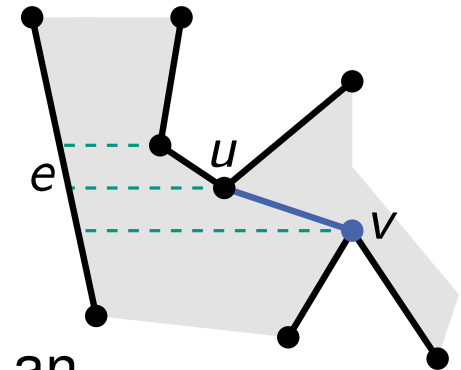
Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)

Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)



Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate

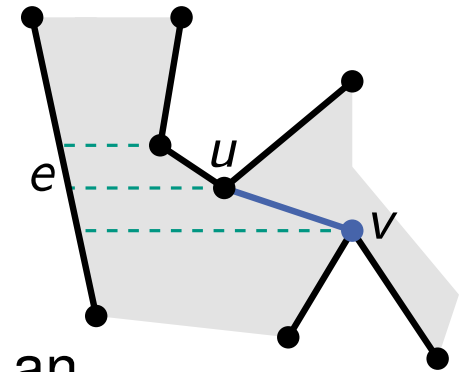
Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)

Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)



Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen

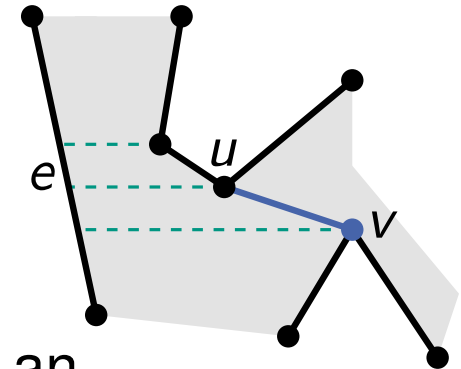
Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)

Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)



Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

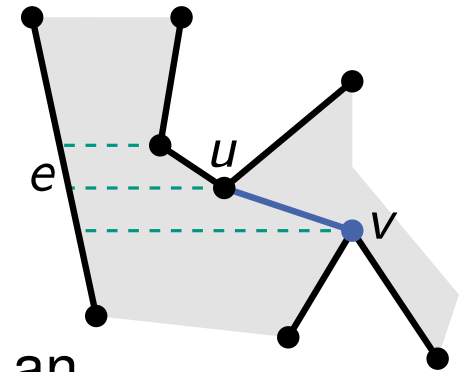
Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

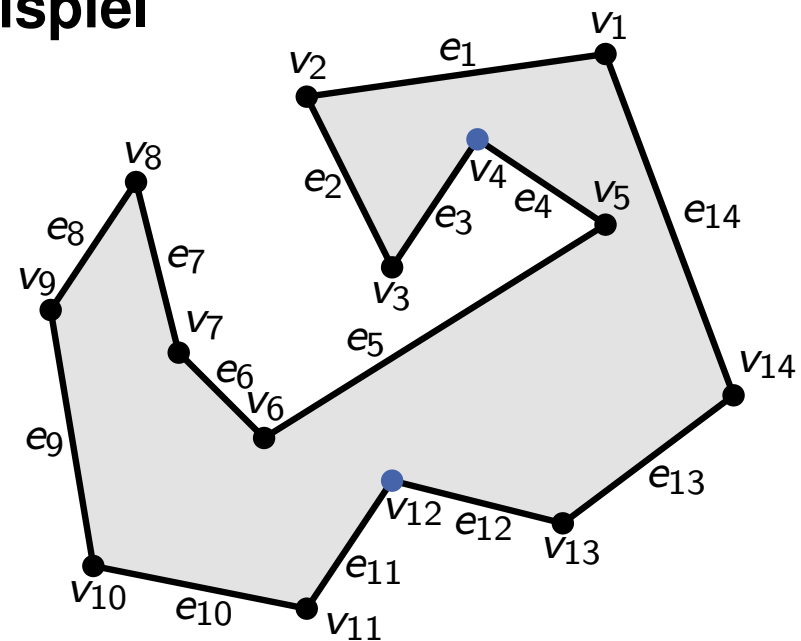
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

Beispiel



Queue

v_1
 v_2
 v_4
 v_8
 v_5
 v_3
 v_9
 v_7
 v_{14}
 v_6
 v_{12}
 v_{13}
 v_{10}
 v_{11}

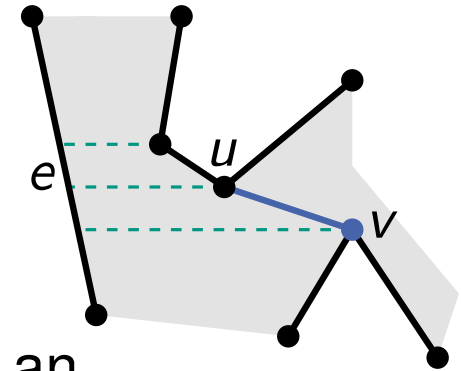
Status

Helfer

Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

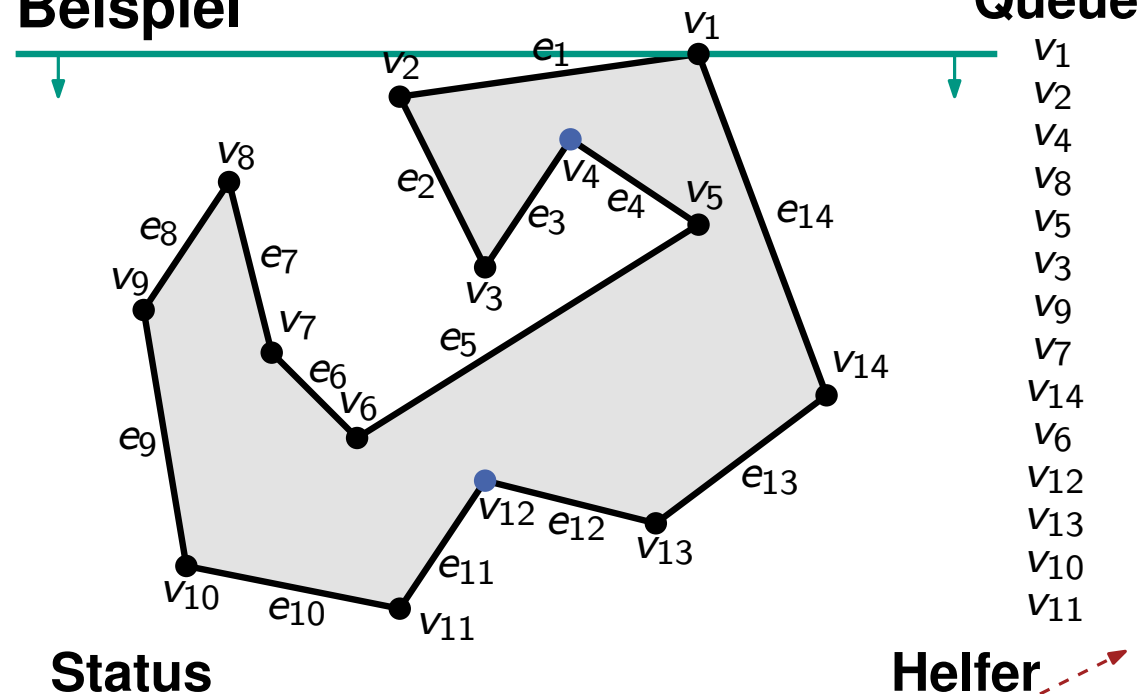
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

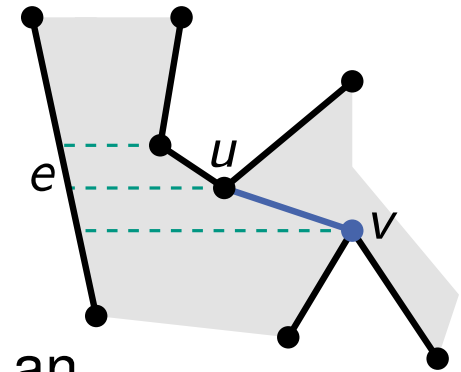
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

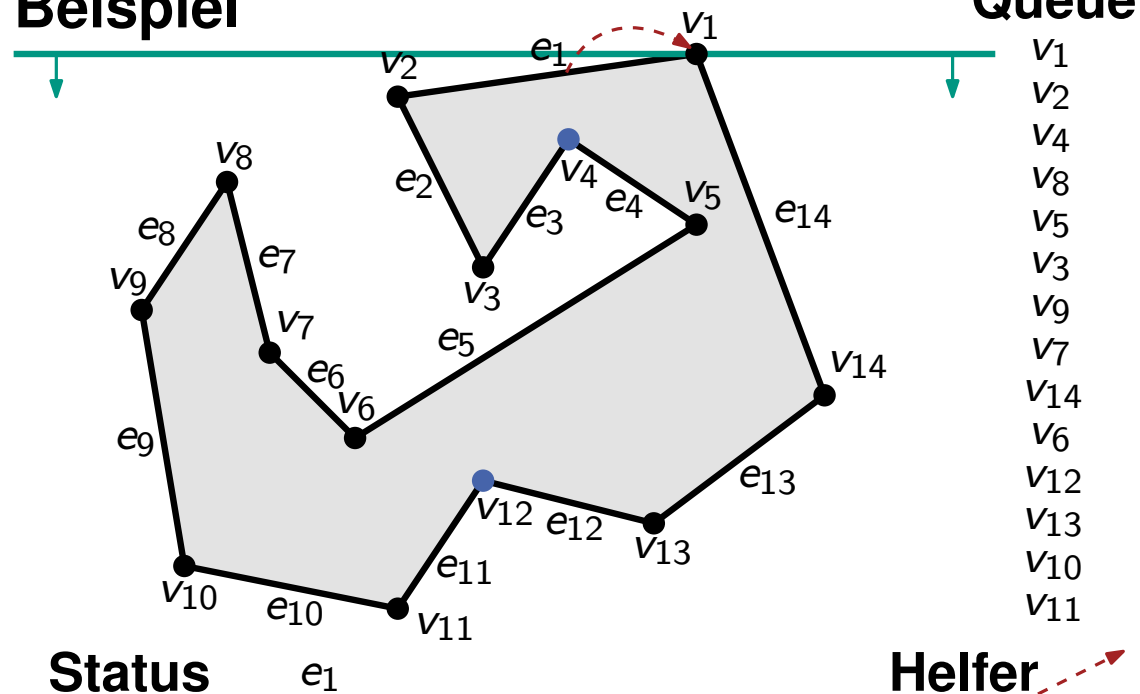
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

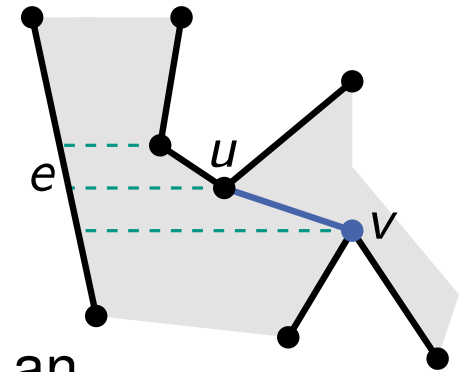
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

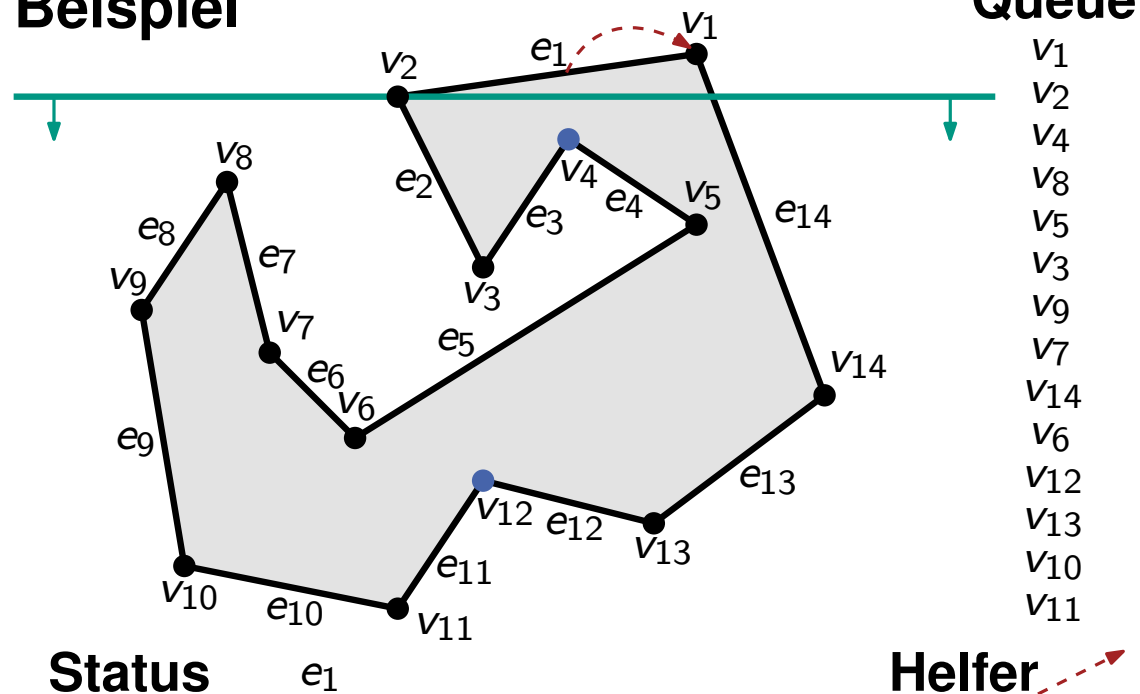
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

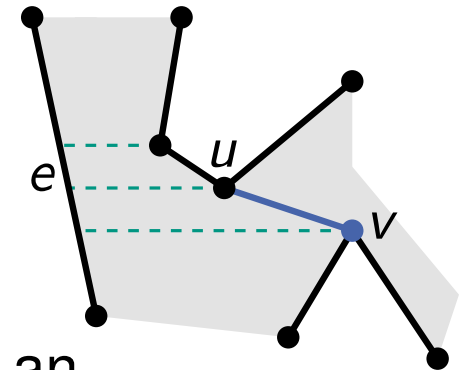
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

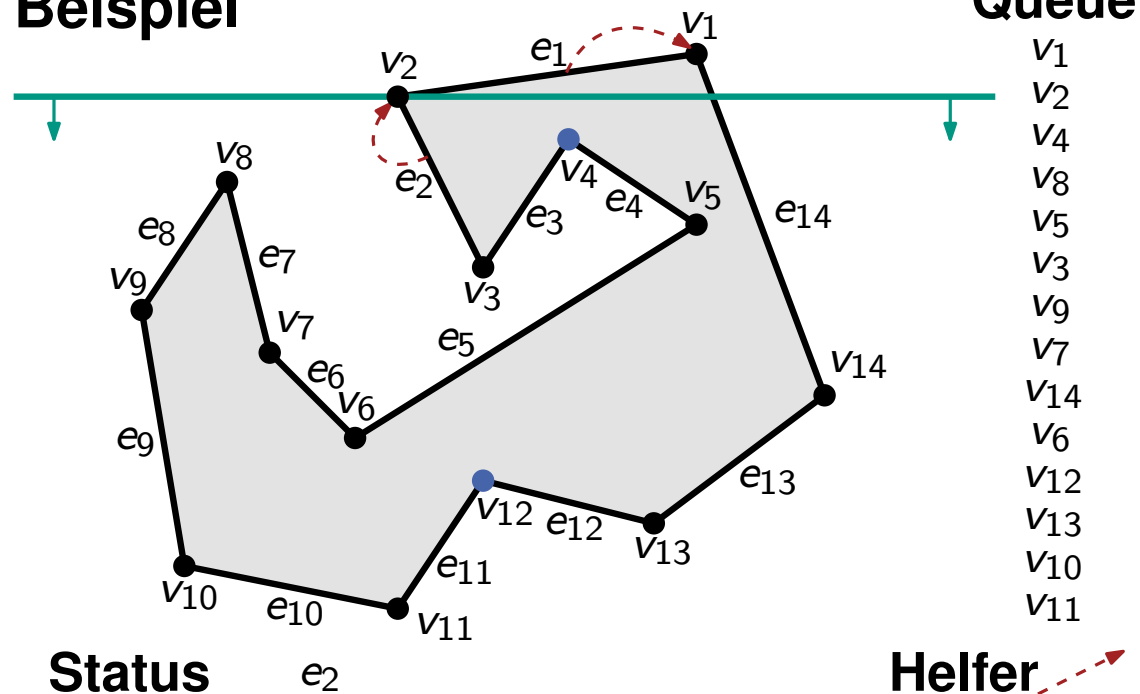
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

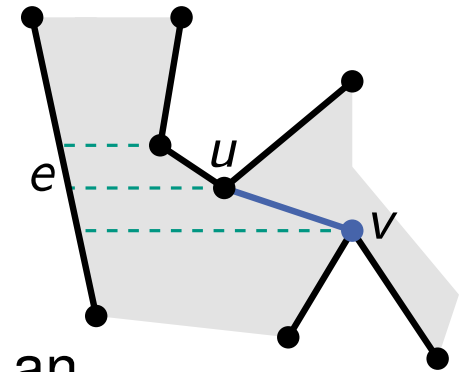
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

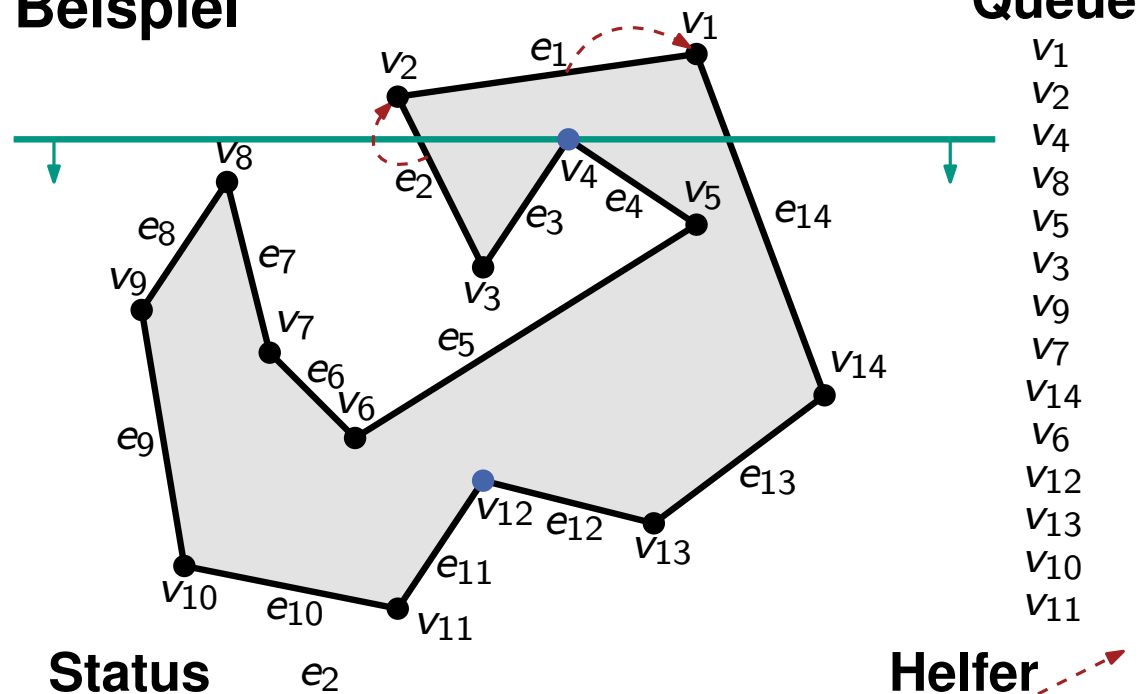
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

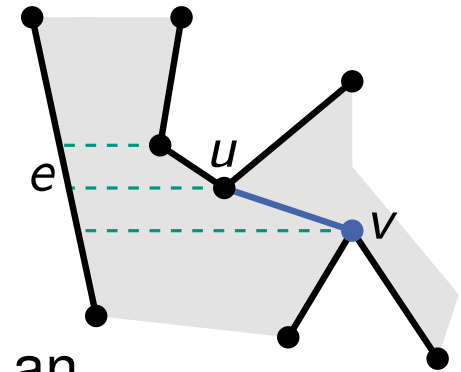
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

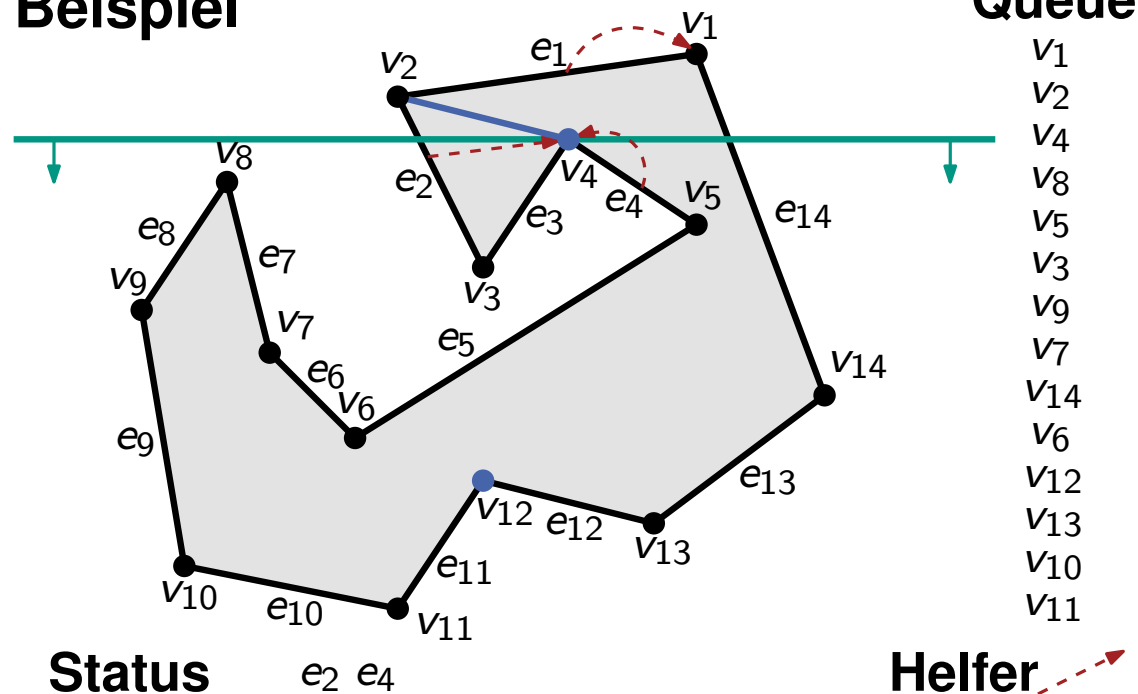
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

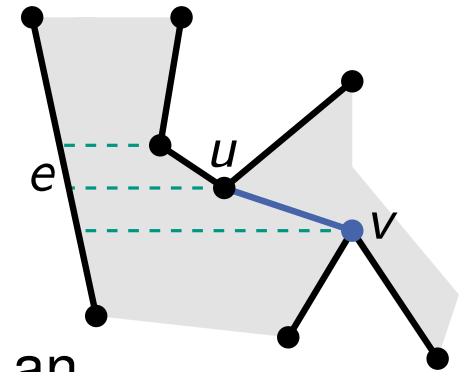
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

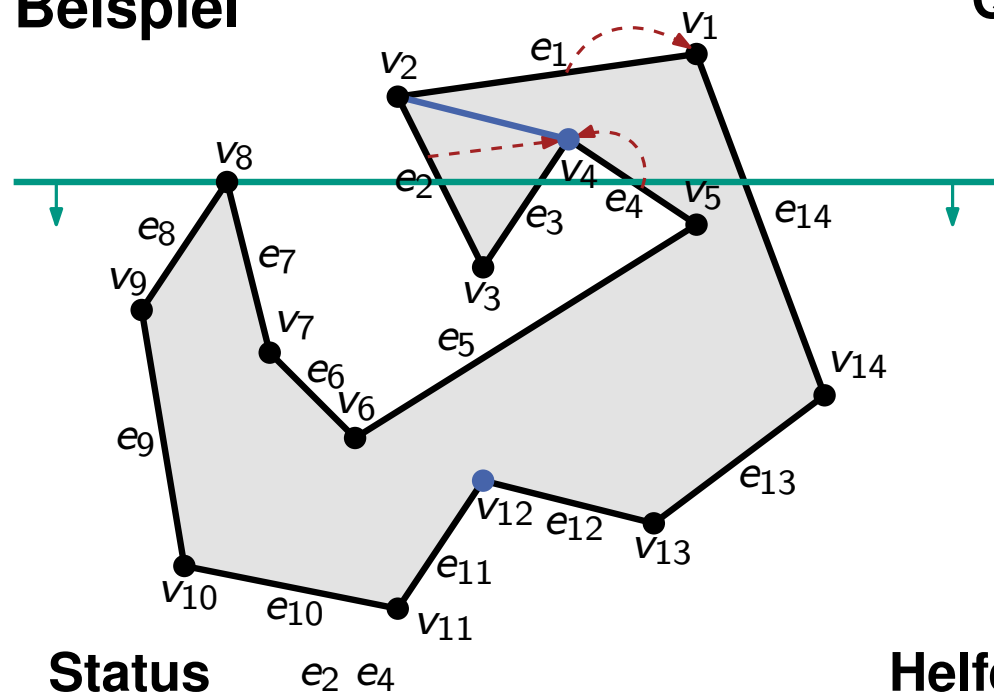
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

Beispiel



Queue

- v_1
- v_2
- v_4
- v_8
- v_5
- v_3
- v_9
- v_7
- v_{14}
- v_6
- v_{12}
- v_{13}
- v_{10}
- v_{11}

Status

$e_2 e_4$

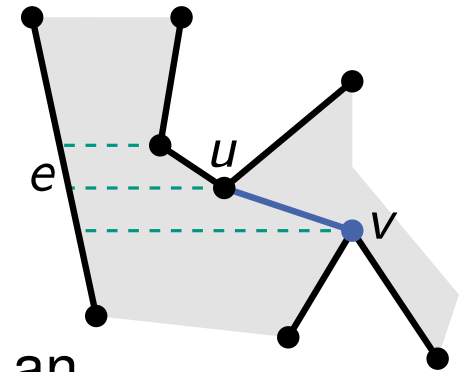
Helfer



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

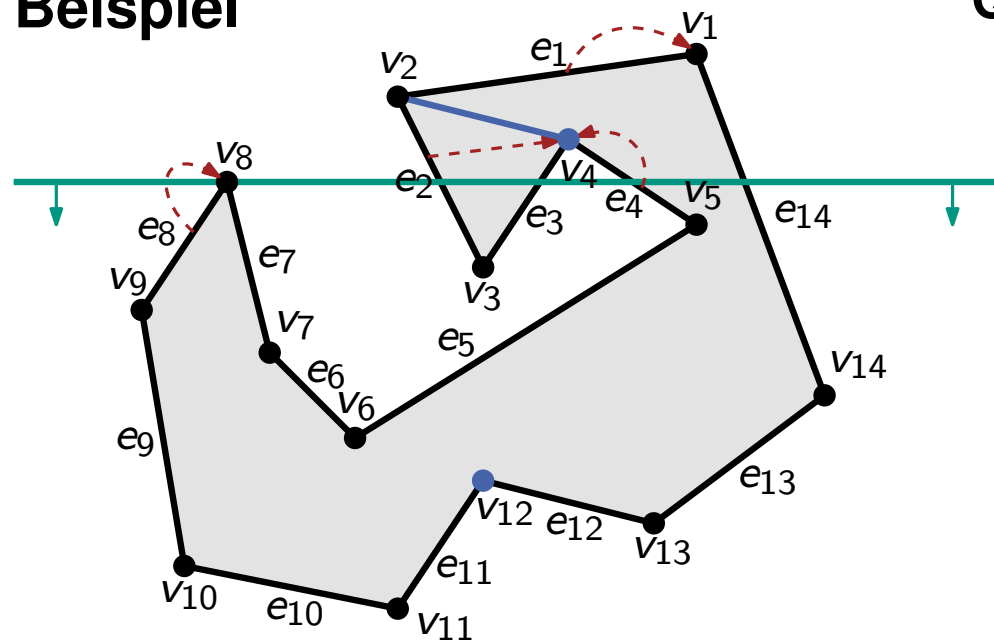
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

Beispiel



Queue

- v_1
- v_2
- v_4
- v_8
- v_5
- v_3
- v_9
- v_7
- v_{14}
- v_6
- v_{12}
- v_{13}
- v_{10}
- v_{11}

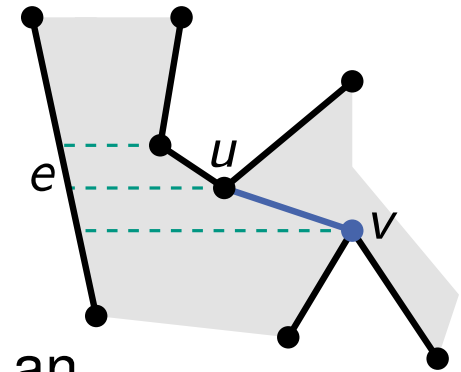
Status $e_8 e_2 e_4$

Helfer v_{12}

Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

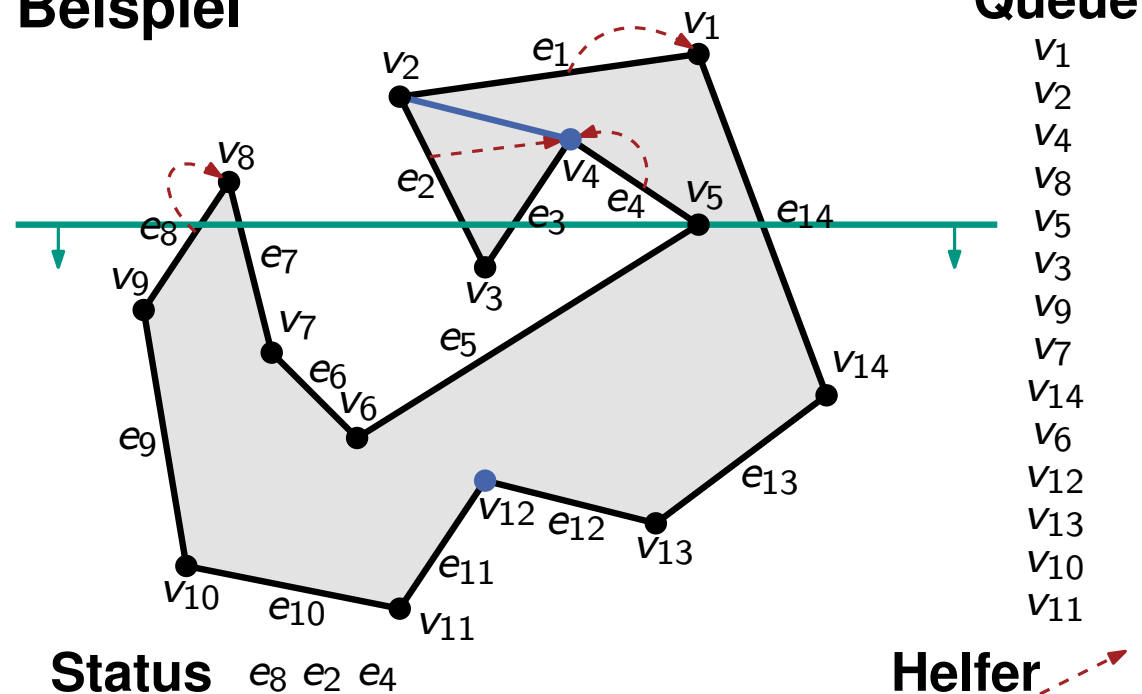
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

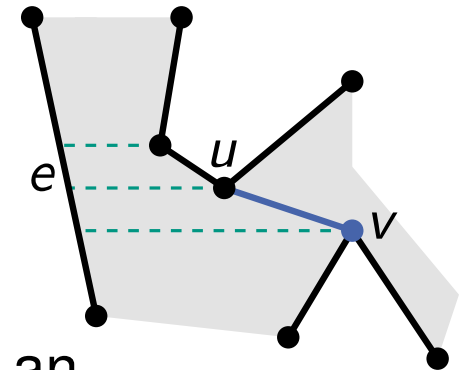
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

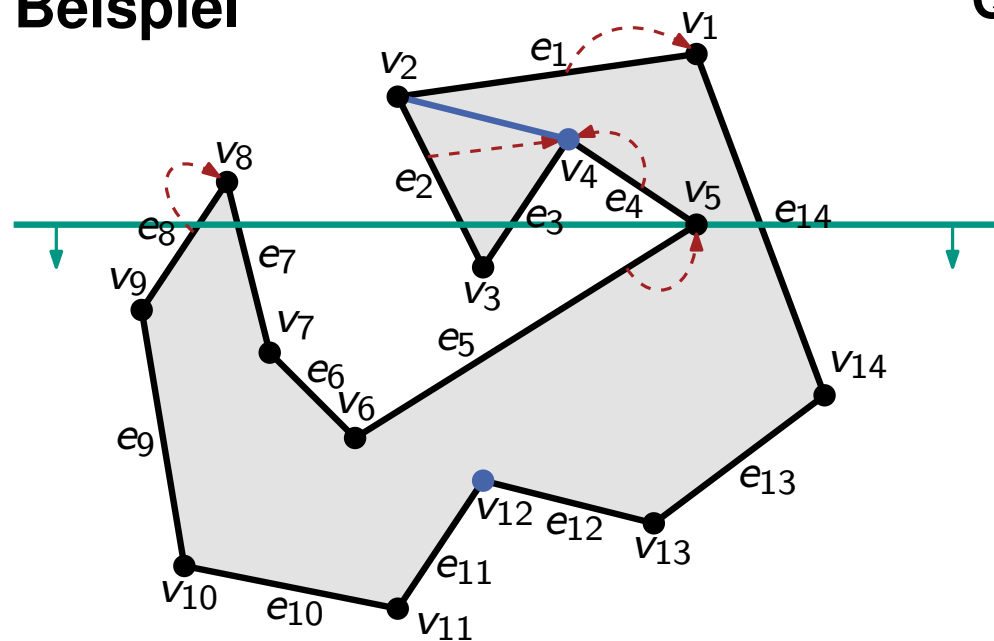
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

Beispiel



Queue

- v_1
- v_2
- v_4
- v_8
- v_5
- v_3
- v_9
- v_7
- v_{14}
- v_6
- v_{12}
- v_{13}
- v_{10}
- v_{11}

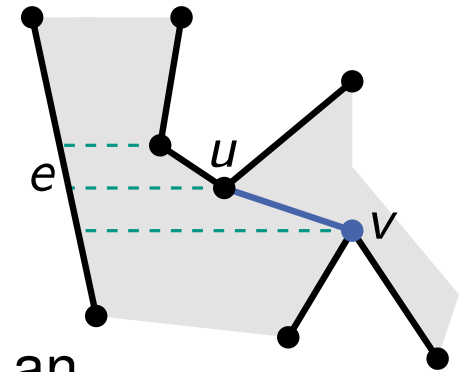
Status $e_8 e_2 e_5$

Helfer \rightarrow

Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

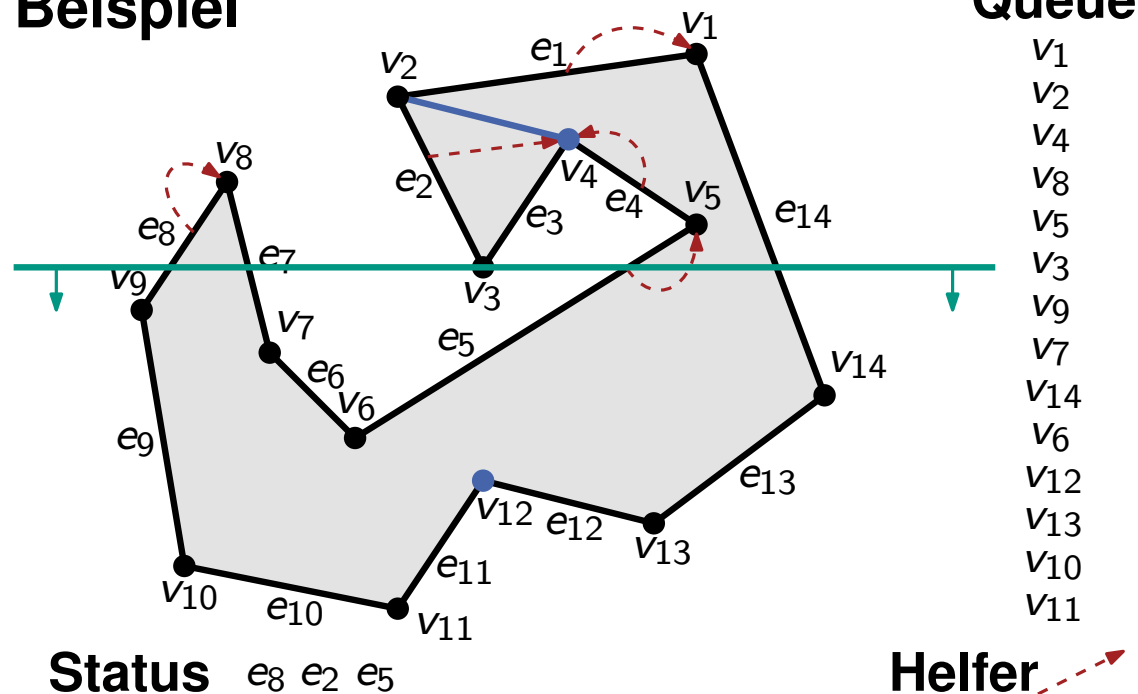
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

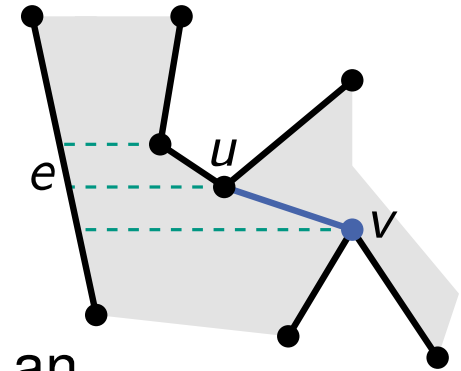
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

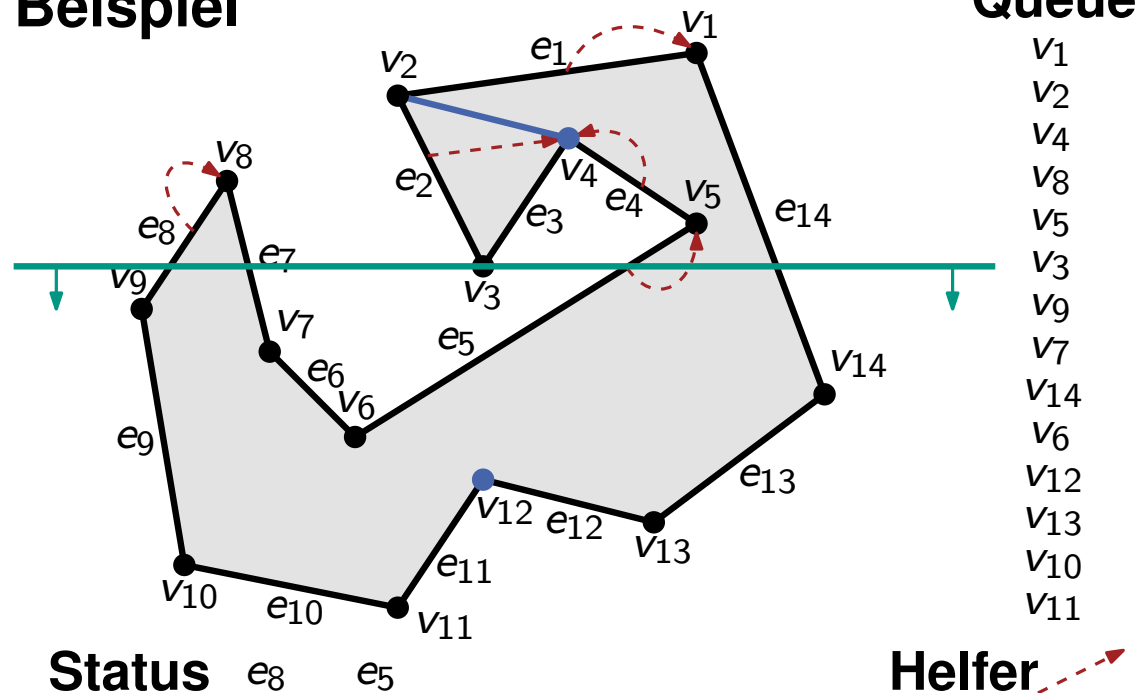
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

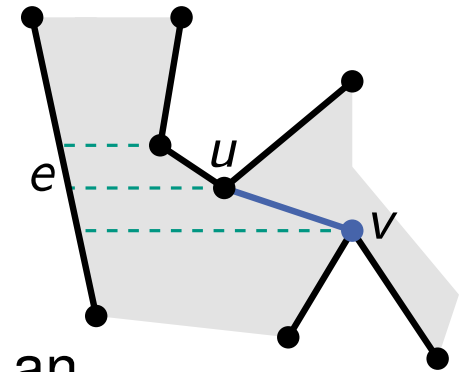
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

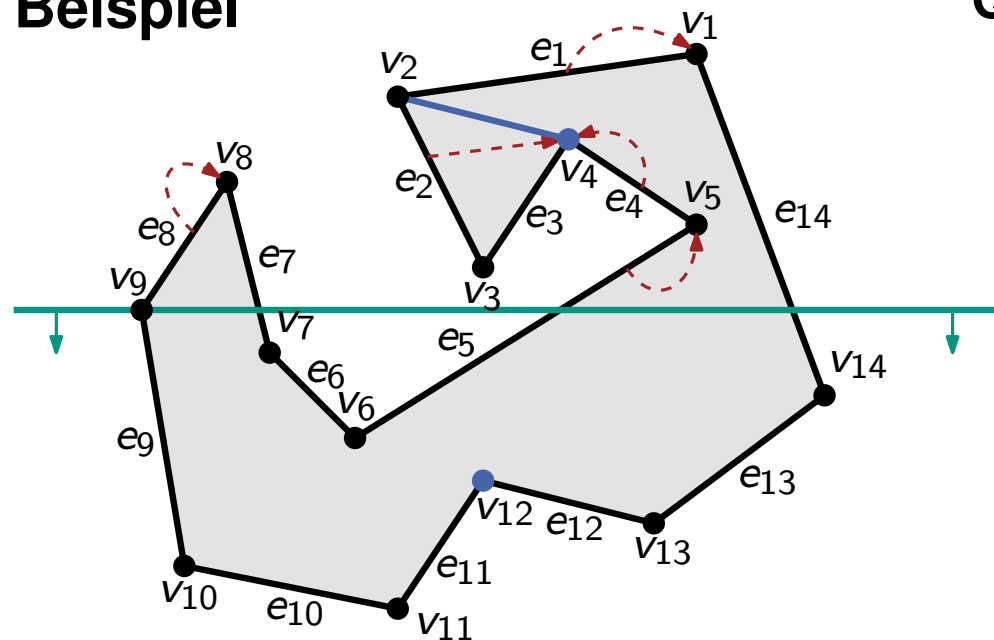
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

Beispiel



Queue

- v_1
- v_2
- v_4
- v_8
- v_5
- v_3
- v_9
- v_7
- v_{14}
- v_6
- v_{12}
- v_{13}
- v_{10}
- v_{11}

Status

e_8 e_5

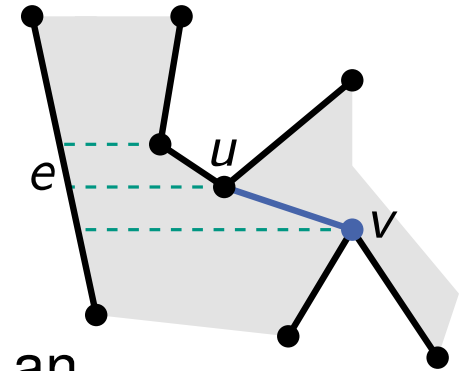
Helfer



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

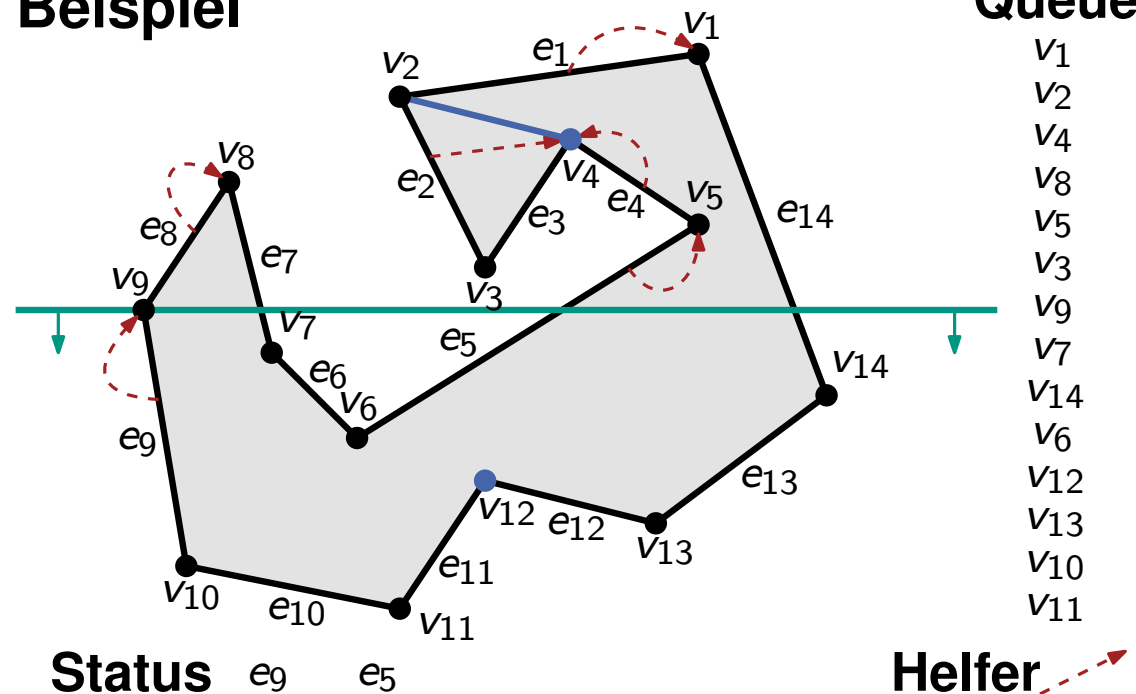
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

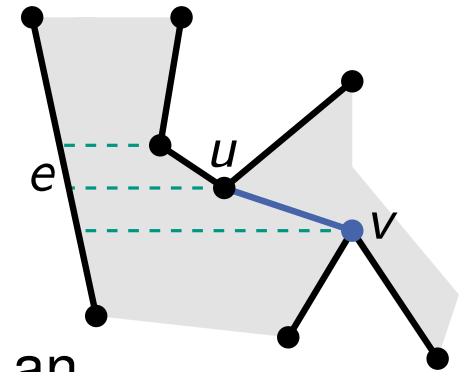
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

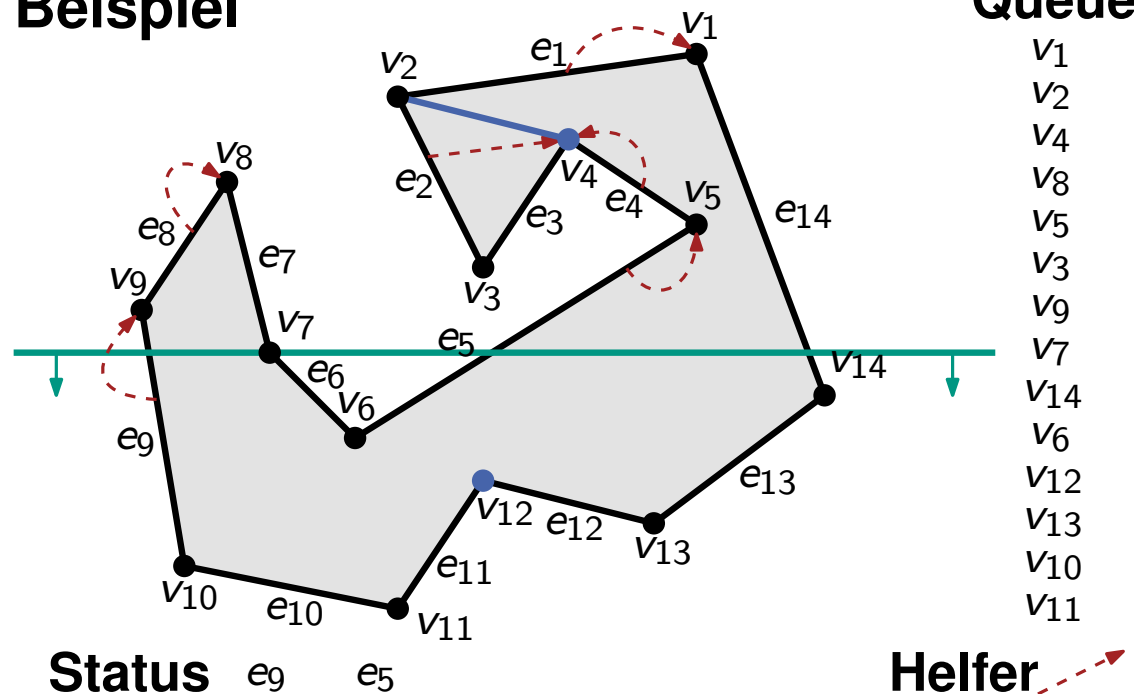
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

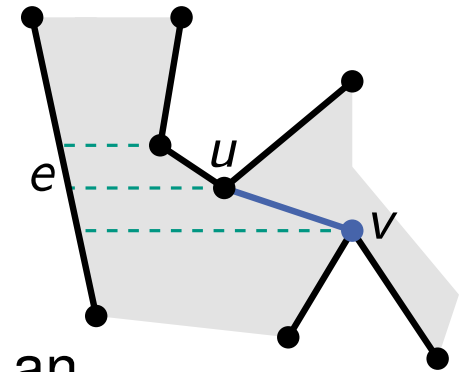
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

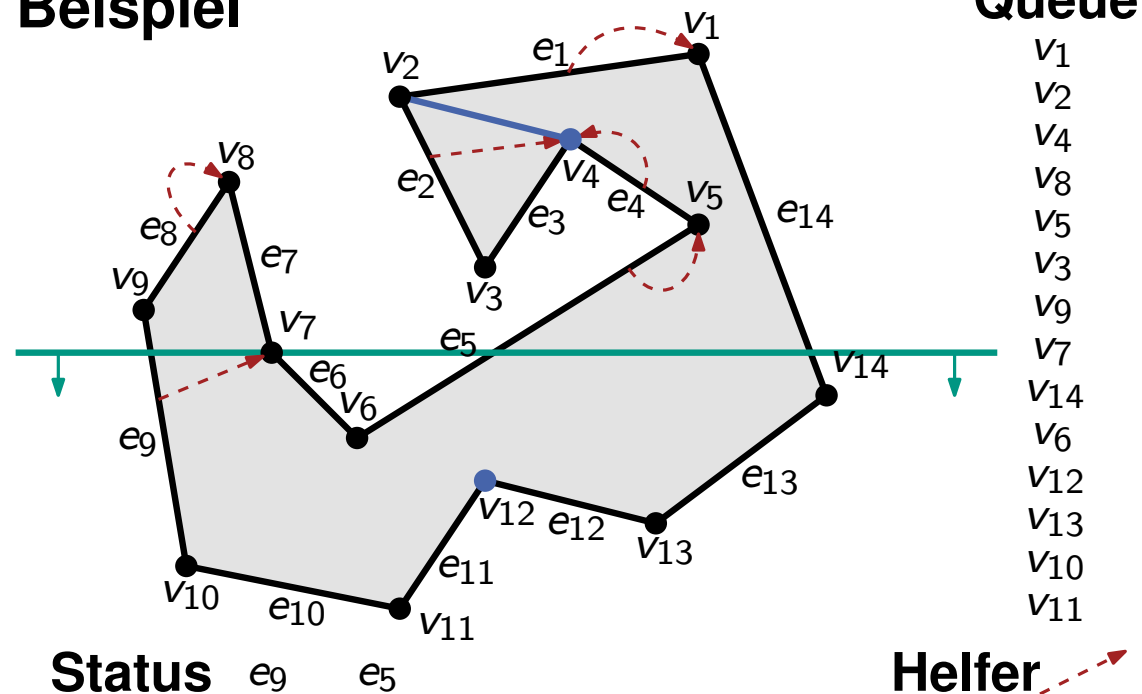
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

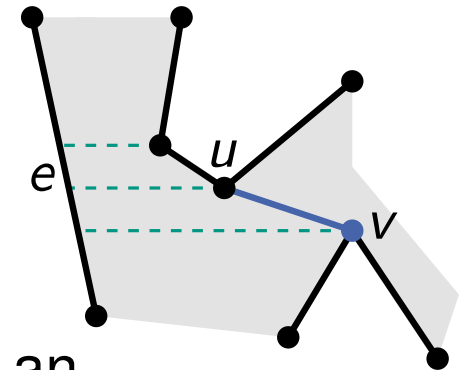
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

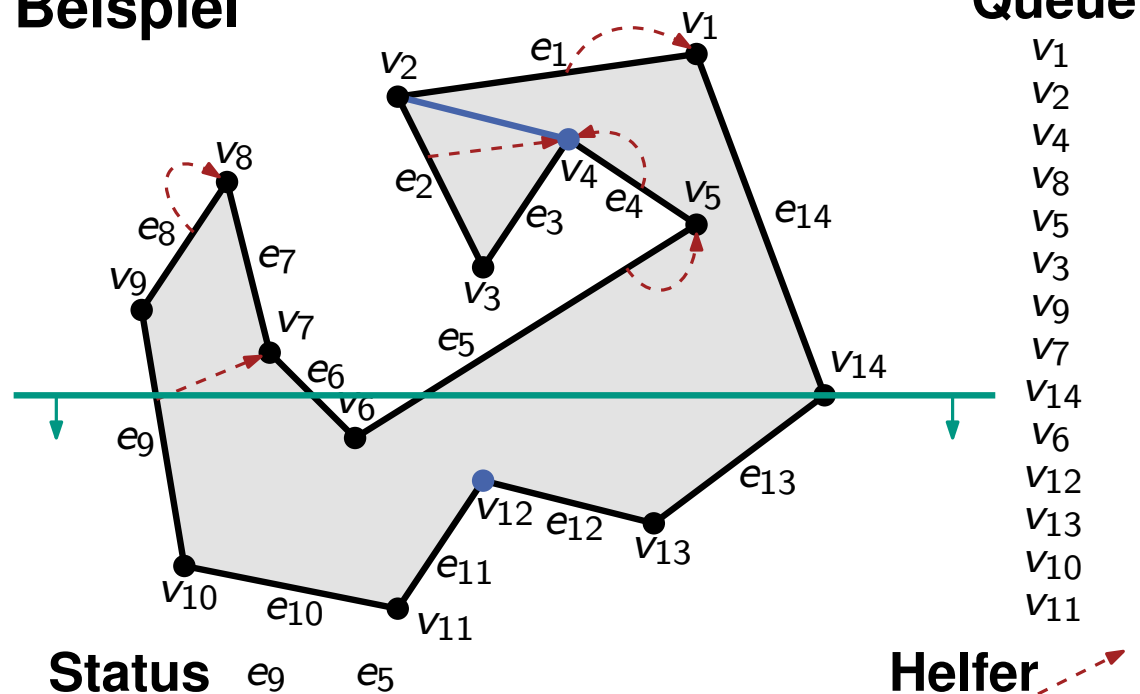
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

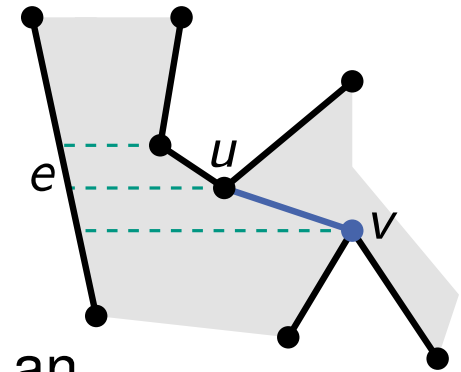
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

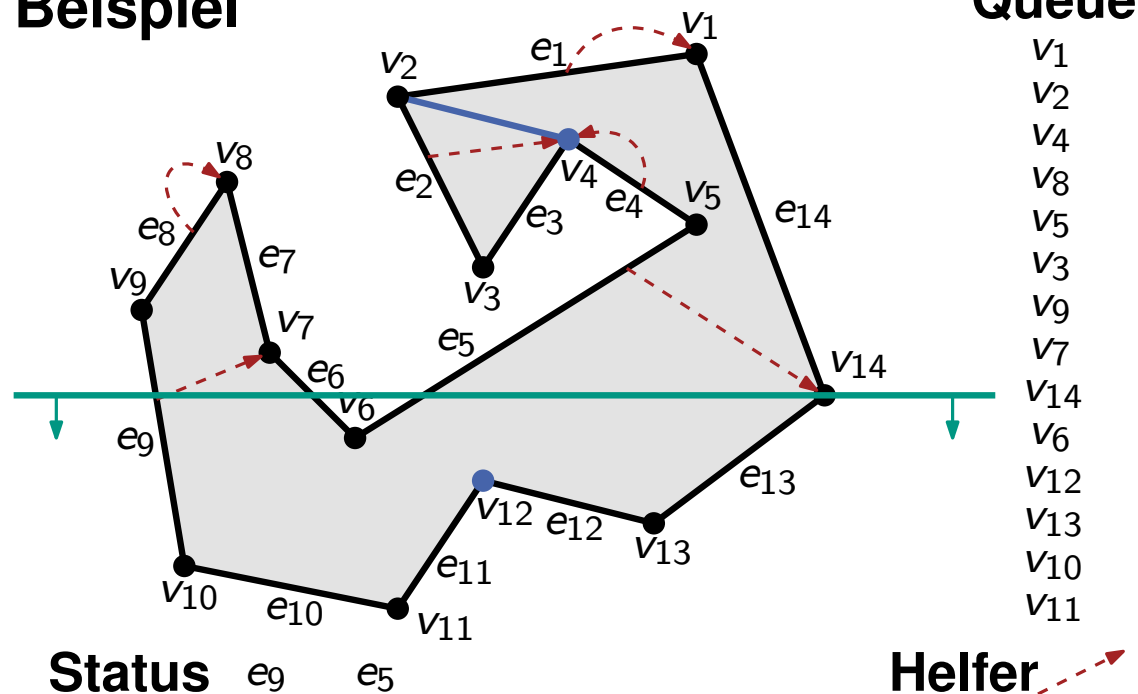
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

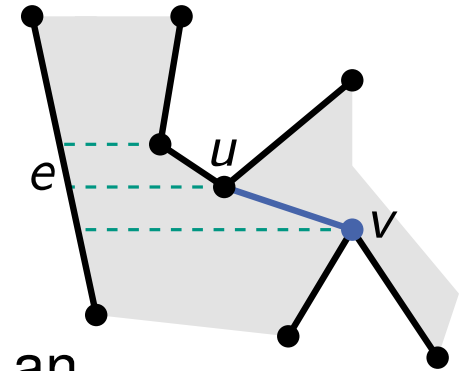
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

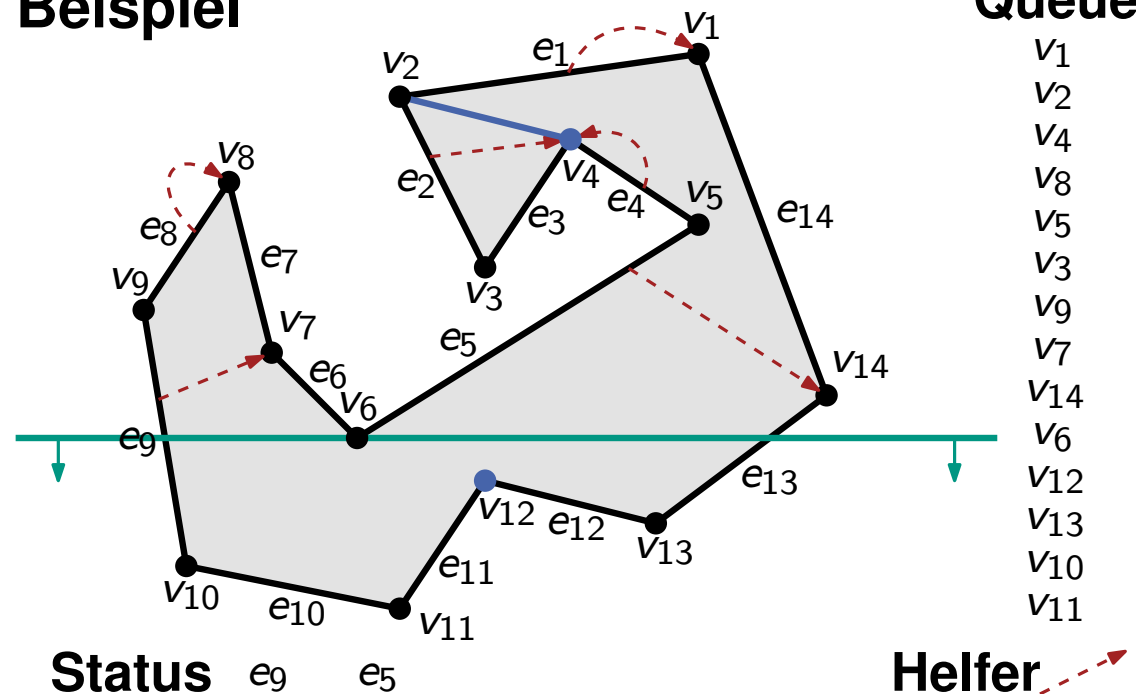
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

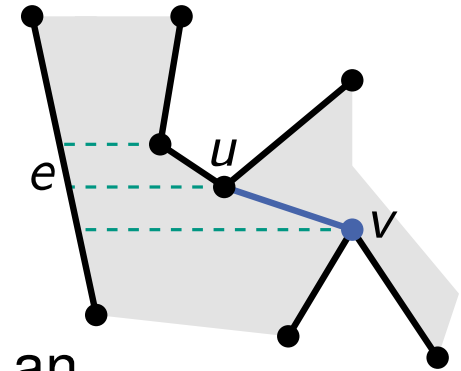
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

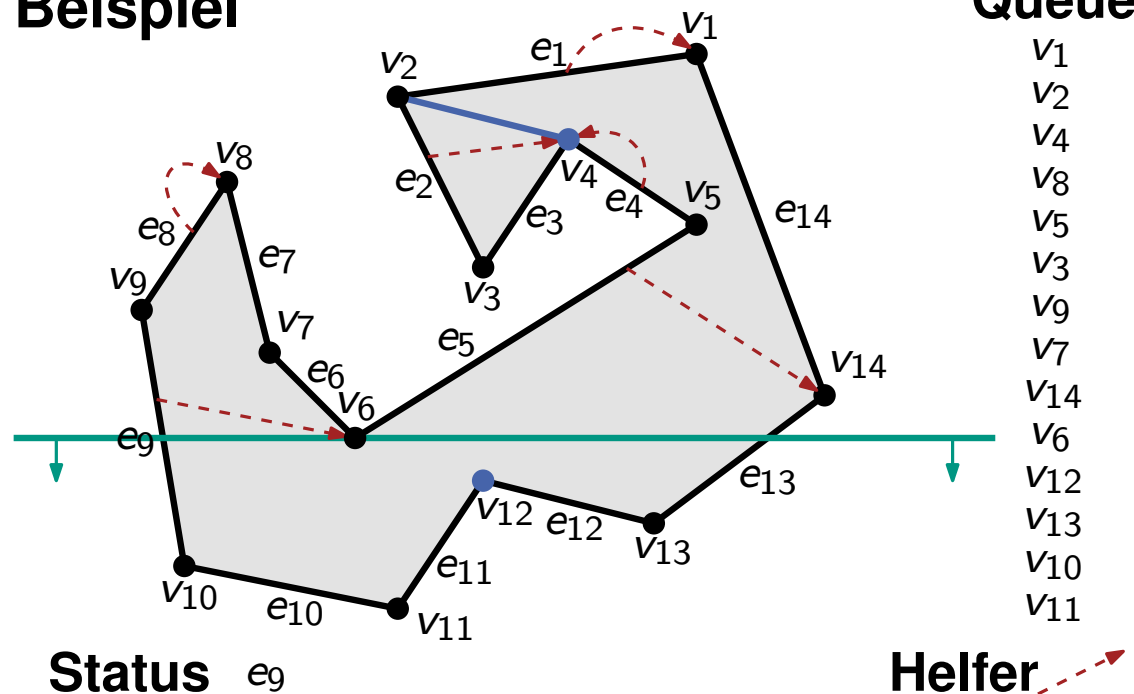
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

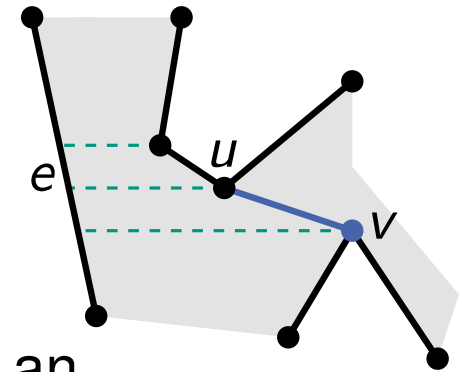
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

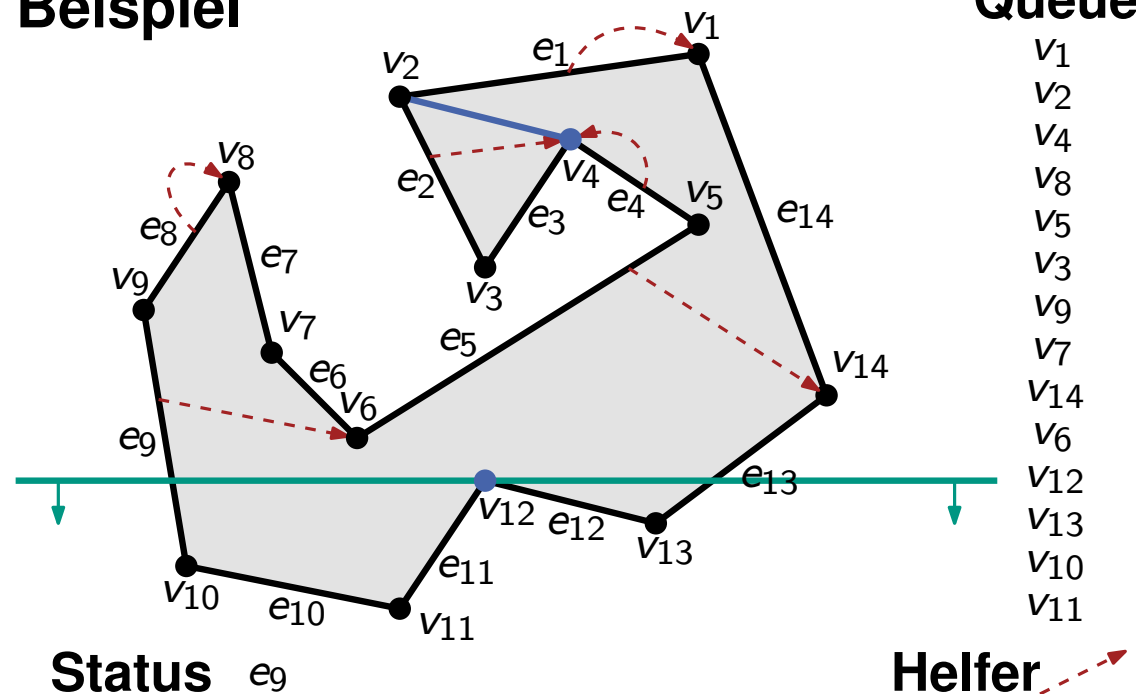
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

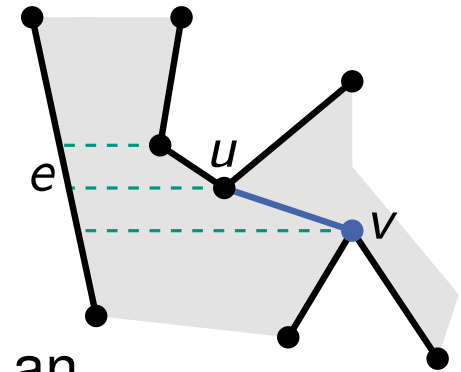
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

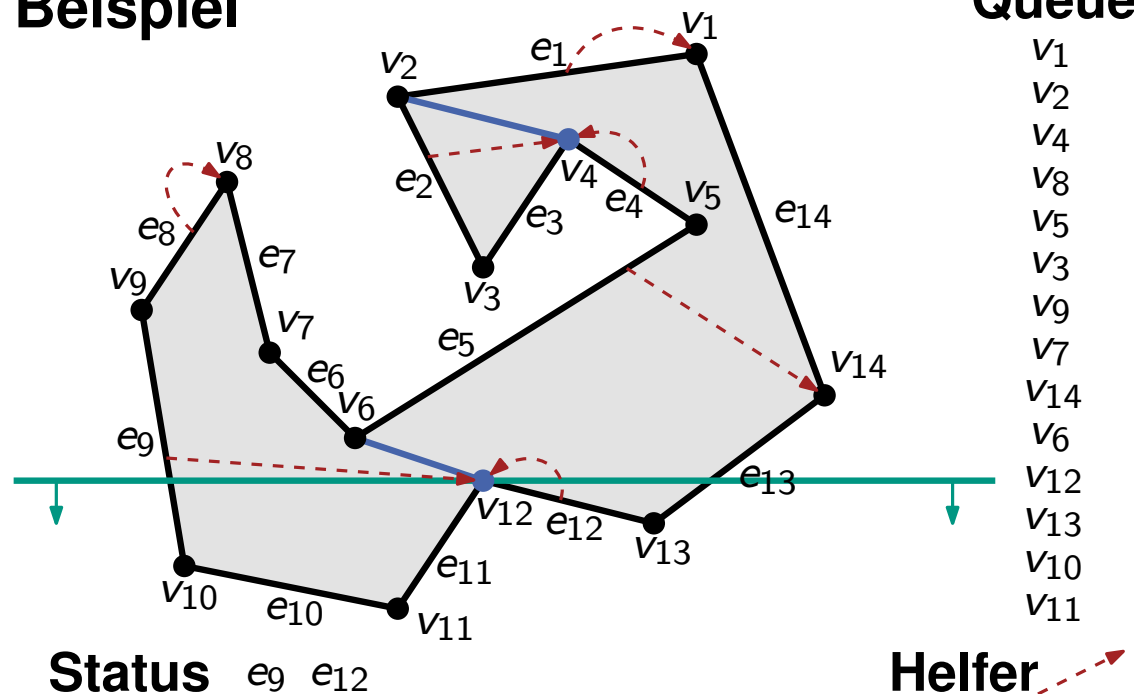
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

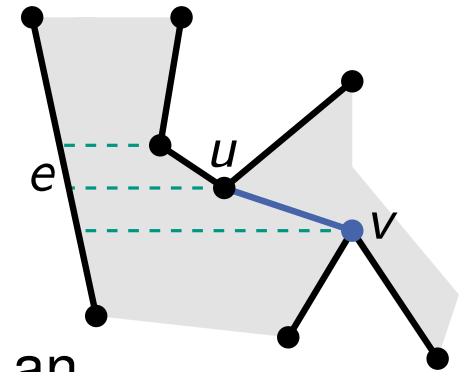
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

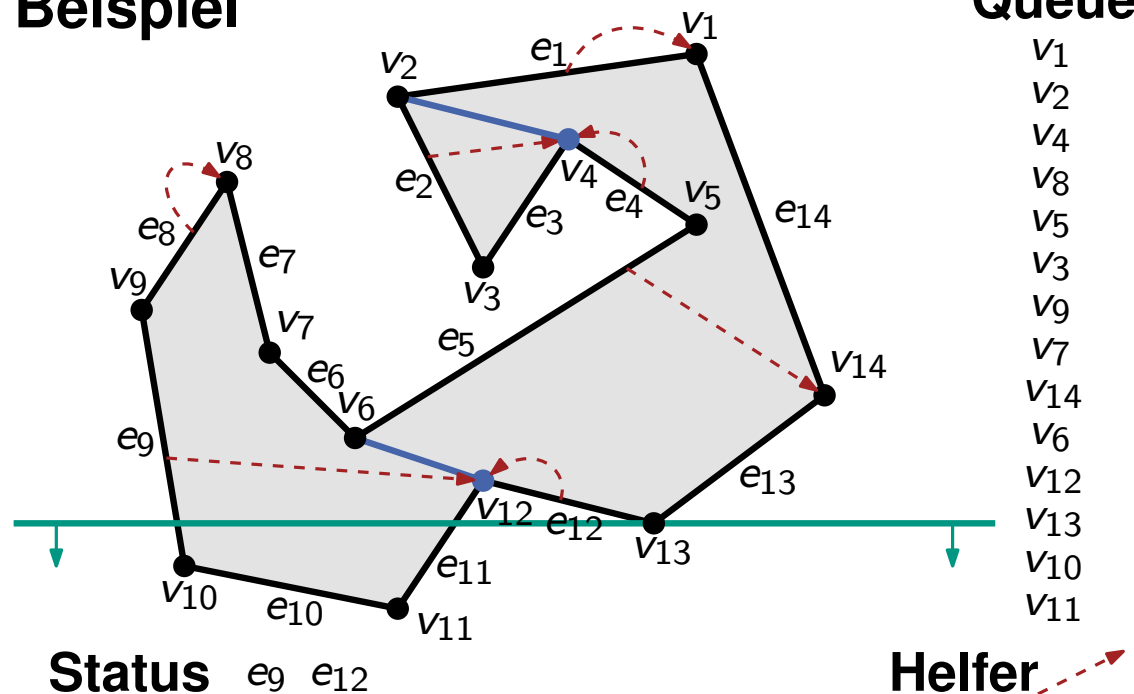
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

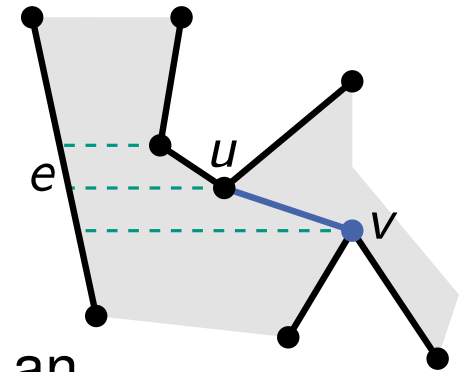
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

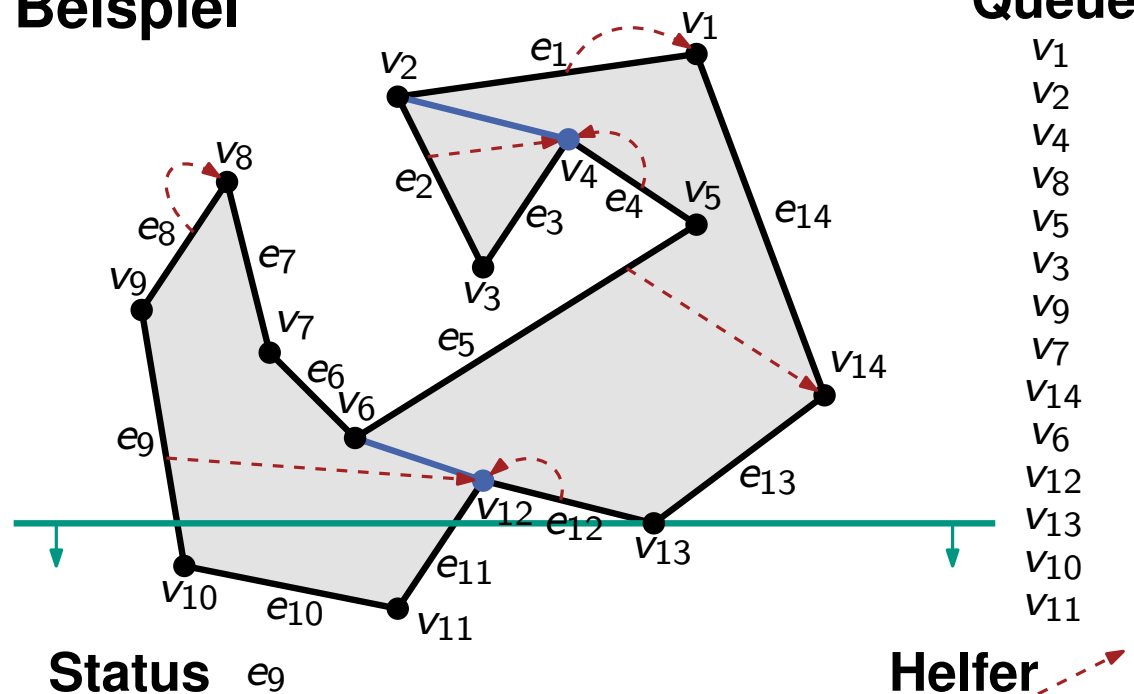
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

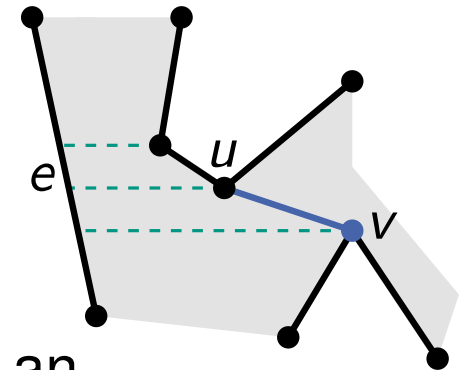
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

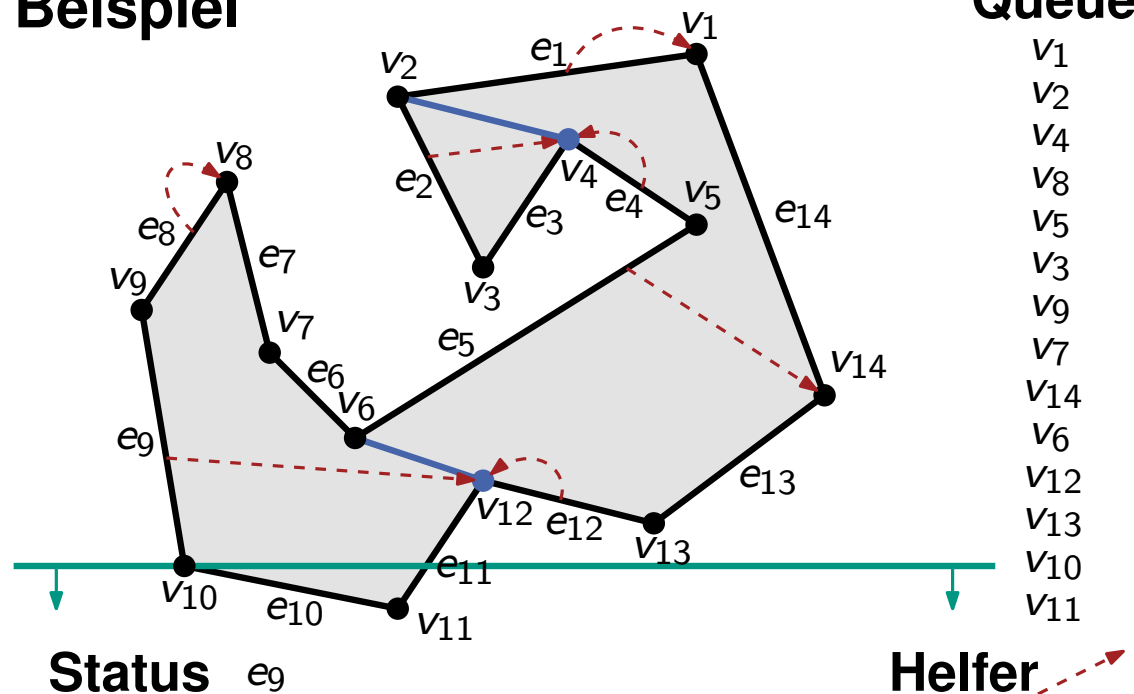
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

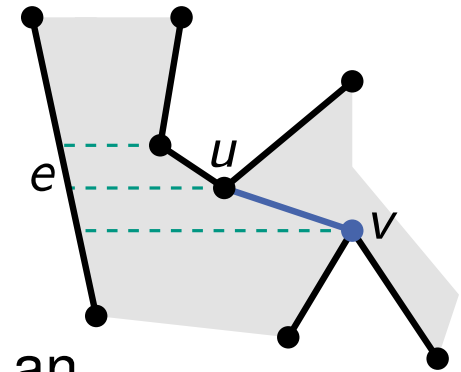
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

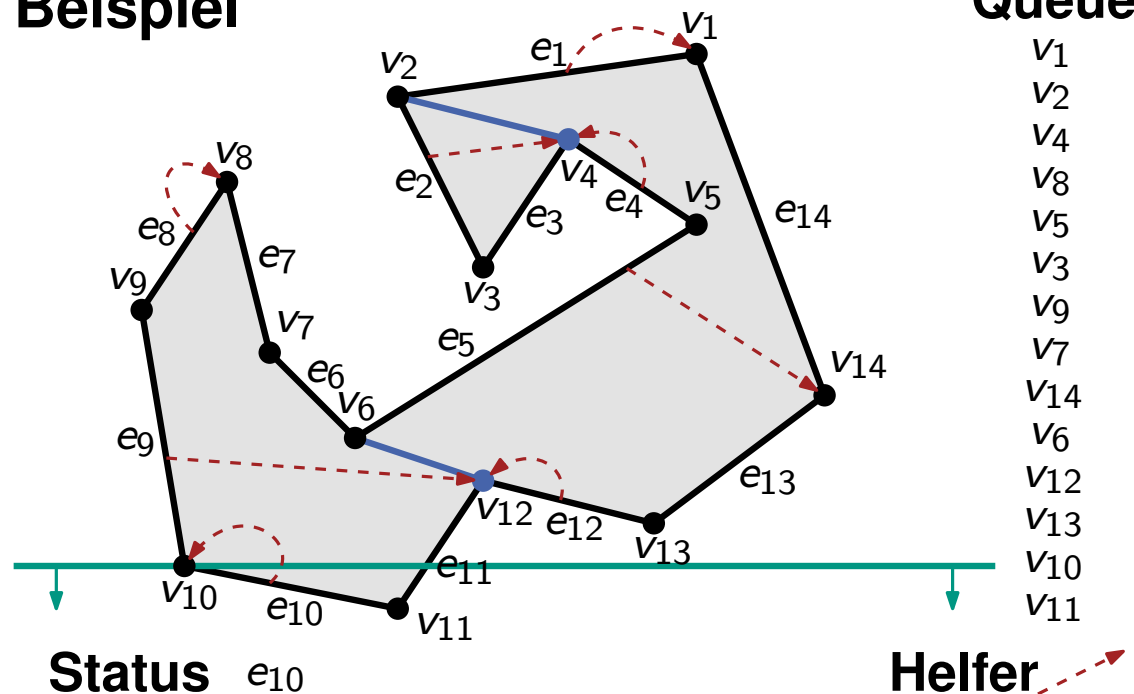
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

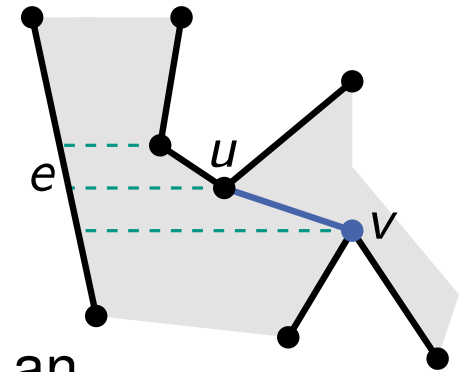
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

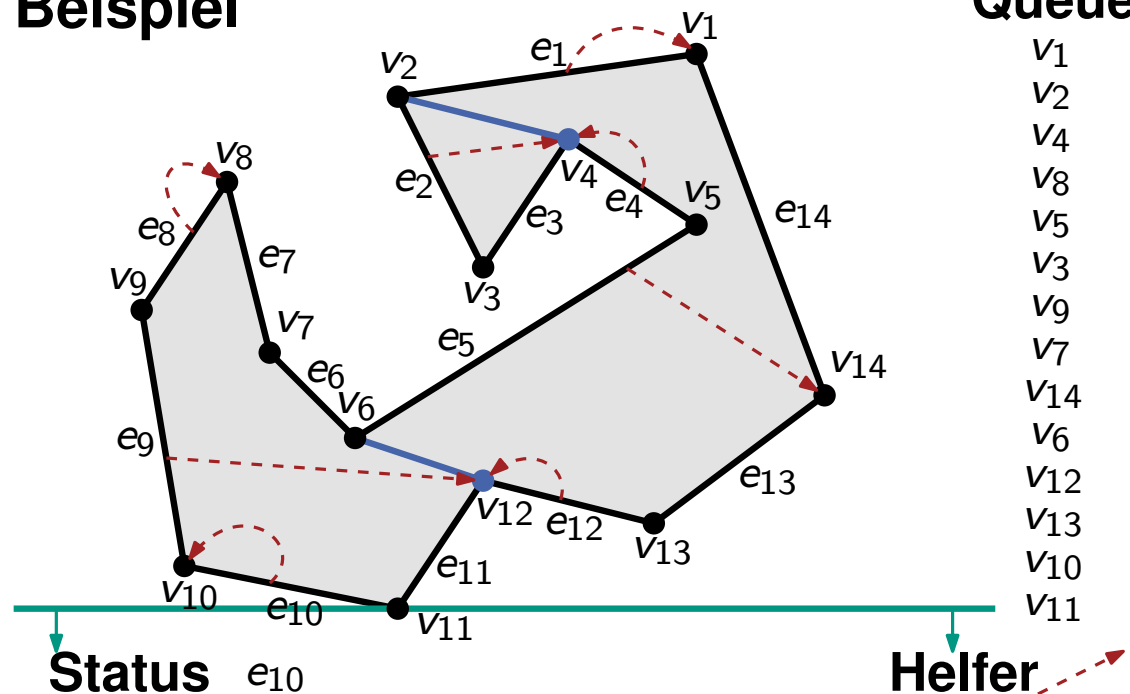
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

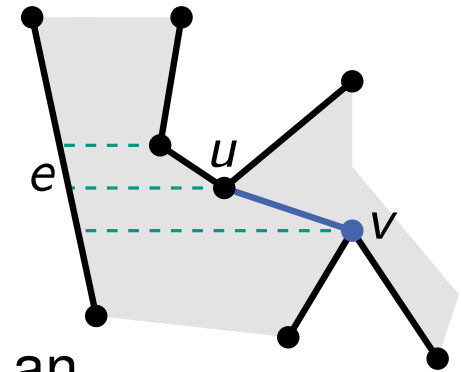
Beispiel



Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
 - der Helfer von e liegt über v
- } \Rightarrow Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

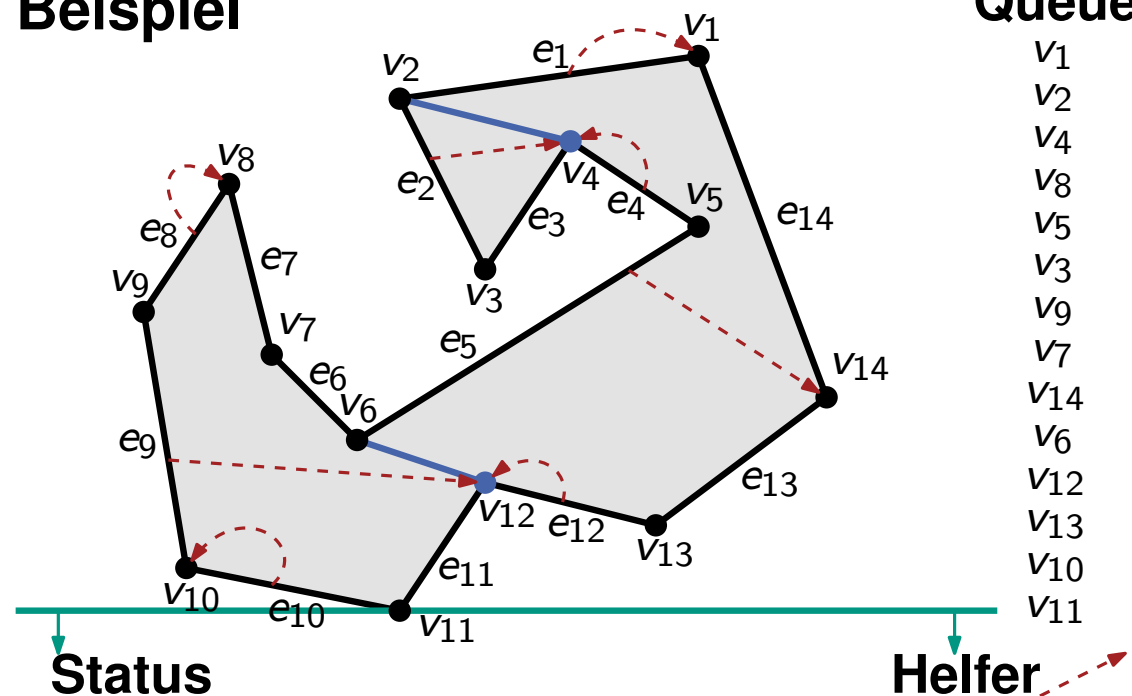
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y -Koordinate
(bzw. lexikographisch nach yx)

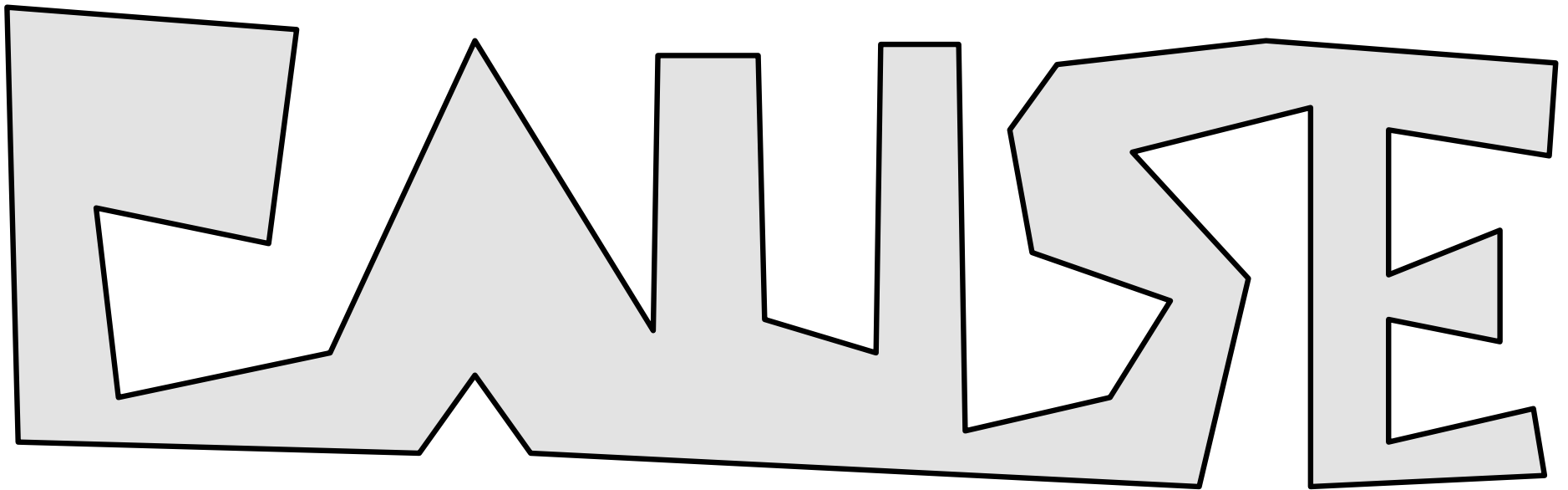
Sweep-Line Status

- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x -Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

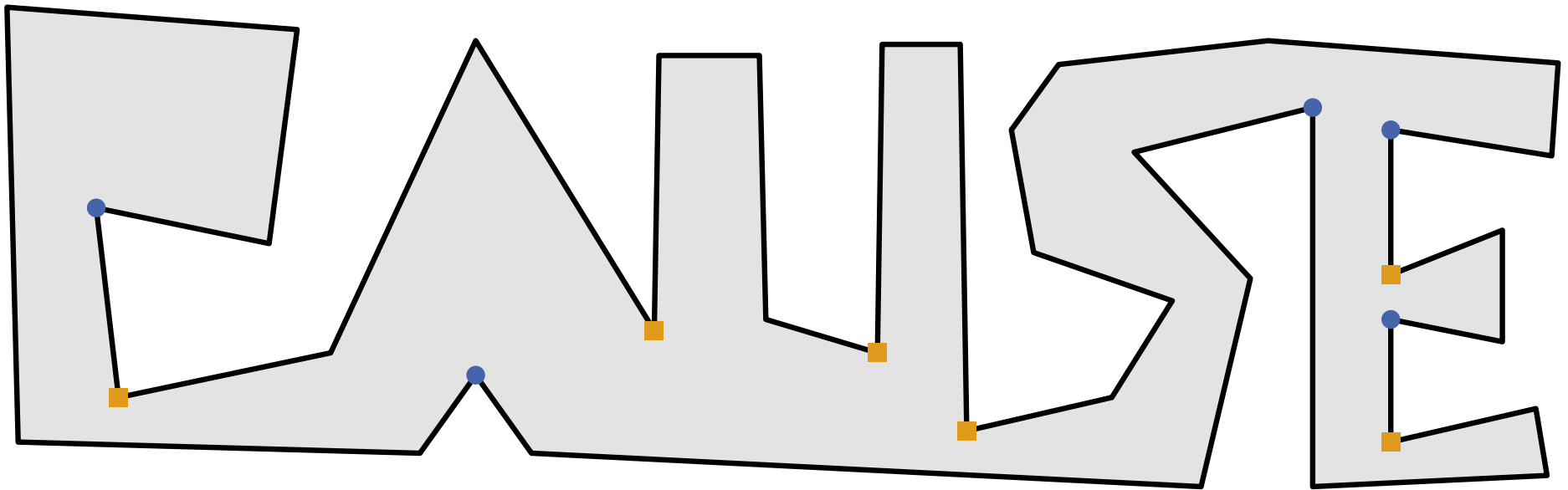
Beispiel



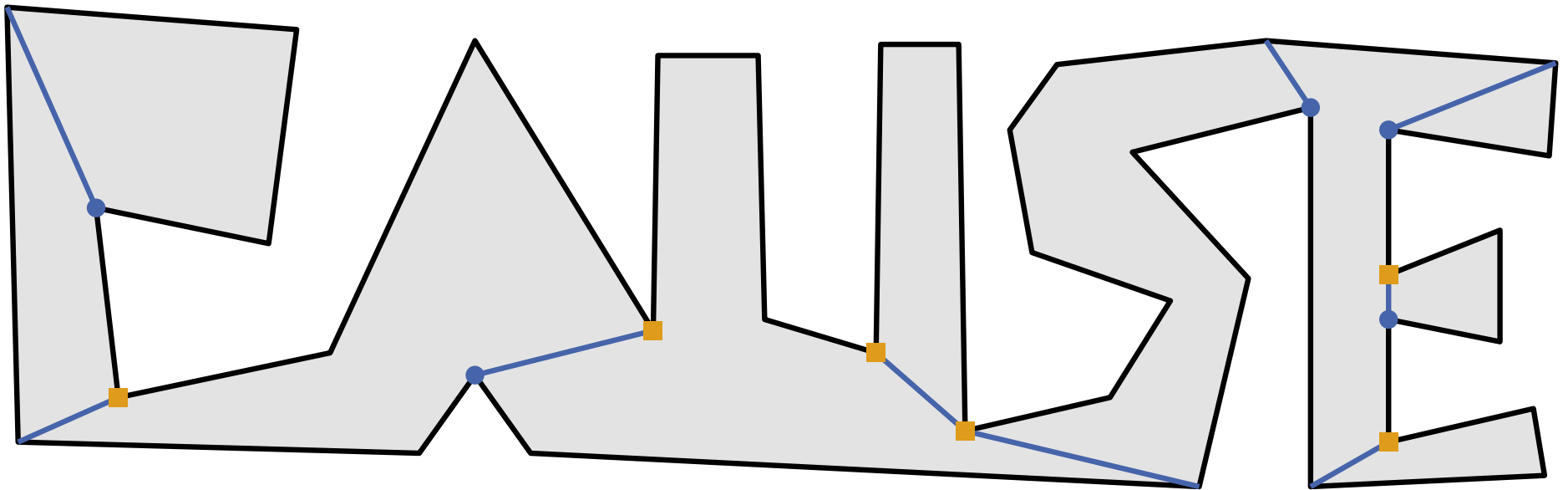
**Wie viele Diagonalen muss man mindestens einfügen,
um y -monotone Polygone zu erhalten?**



**Wie viele Diagonalen muss man mindestens einfügen,
um y -monotone Polygone zu erhalten?**



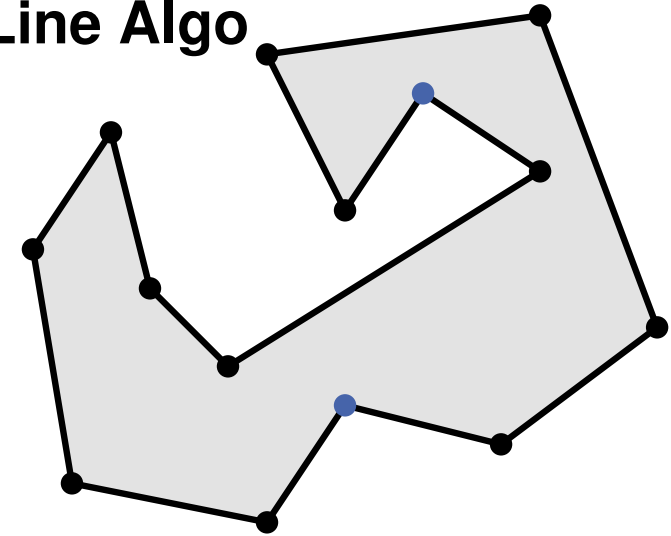
**Wie viele Diagonalen muss man mindestens einfügen,
um y -monotone Polygone zu erhalten?**



Sweep-Line mit Verschiedene Knotentypen

Unterschiedlich behandelte Knoten im Sweep-Line Algo

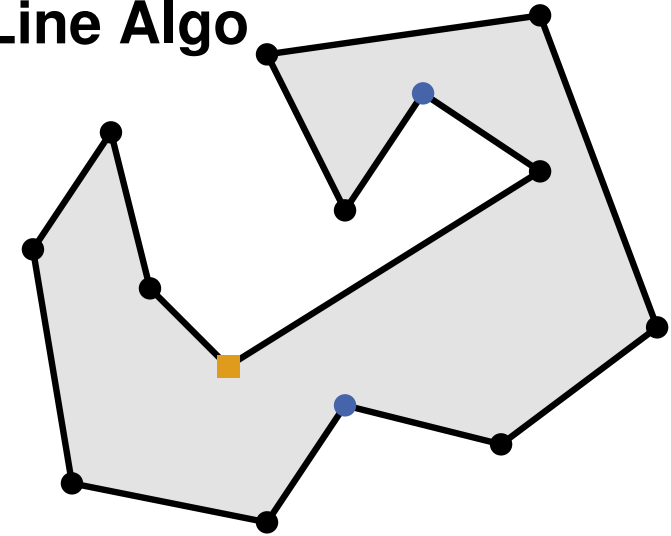
- Split-Knoten: Kanten unten, Polygon oben •



Sweep-Line mit Verschiedene Knotentypen

Unterschiedlich behandelte Knoten im Sweep-Line Algo

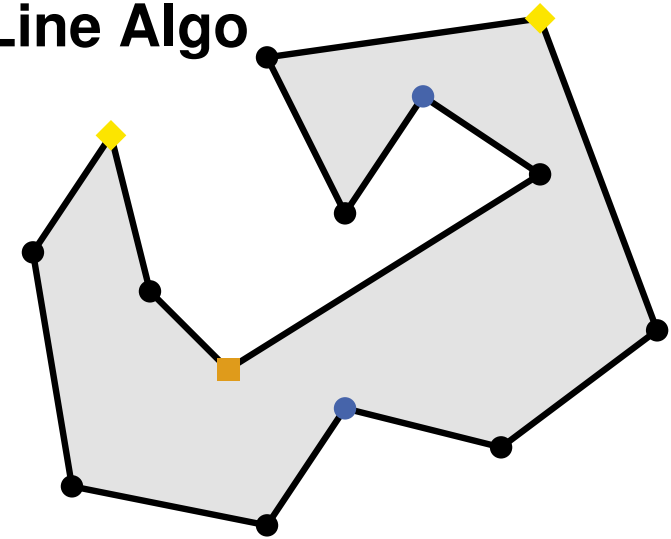
- **Split-Knoten:** Kanten unten, Polygon oben ●
- **Merge-Knoten:** Kanten oben, Polygon unten ■



Sweep-Line mit Verschiedene Knotentypen

Unterschiedlich behandelte Knoten im Sweep-Line Algo

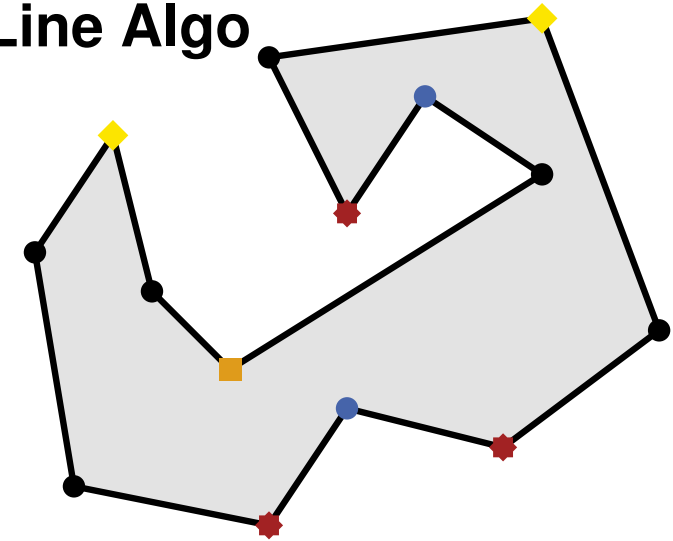
- Split-Knoten: Kanten unten, Polygon oben ●
- Merge-Knoten: Kanten oben, Polygon unten ■
- Start-Knoten: Kanten unten, Polygon unten ◆



Sweep-Line mit Verschiedene Knotentypen

Unterschiedlich behandelte Knoten im Sweep-Line Algo

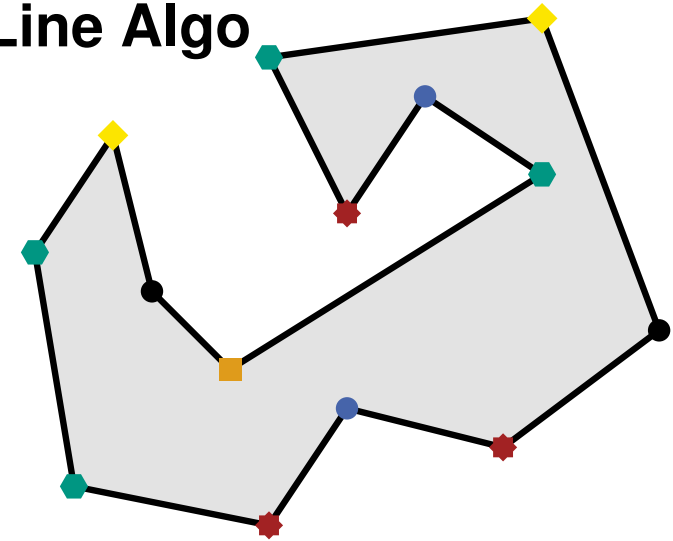
- **Split-Knoten:** Kanten unten, Polygon oben ●
- **Merge-Knoten:** Kanten oben, Polygon unten ■
- **Start-Knoten:** Kanten unten, Polygon unten ◆
- **End-Knoten:** Kanten oben, Polygon oben *



Sweep-Line mit Verschiedene Knotentypen

Unterschiedlich behandelte Knoten im Sweep-Line Algo

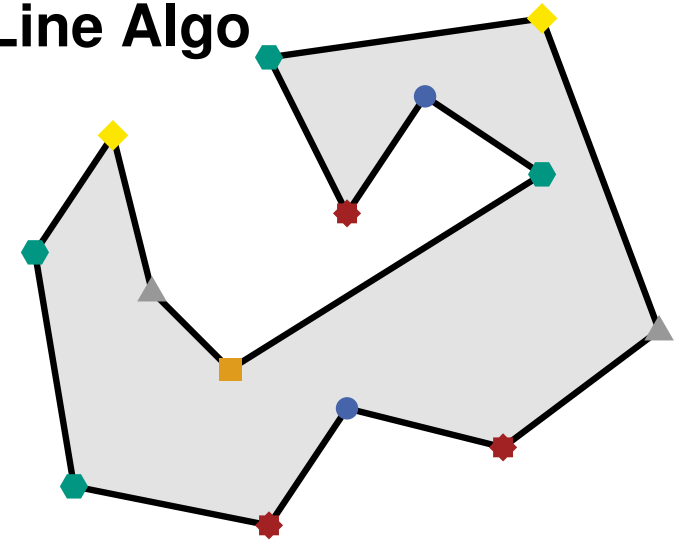
- **Split-Knoten:** Kanten unten, Polygon oben ●
- **Merge-Knoten:** Kanten oben, Polygon unten ■
- **Start-Knoten:** Kanten unten, Polygon unten ◆
- **End-Knoten:** Kanten oben, Polygon oben *
- **linker Knoten:** y -monoton, Polygon rechts ◆



Sweep-Line mit Verschiedene Knotentypen

Unterschiedlich behandelte Knoten im Sweep-Line Algo

- **Split-Knoten:** Kanten unten, Polygon oben ●
- **Merge-Knoten:** Kanten oben, Polygon unten ■
- **Start-Knoten:** Kanten unten, Polygon unten ◆
- **End-Knoten:** Kanten oben, Polygon oben *
- **linker Knoten:** y -monoton, Polygon rechts ◆
- **rechter Knoten:** y -monoton, Polygon links ▲



Sweep-Line mit Verschiedene Knotentypen

Algorithmus MACHEMONOTON(P)

Eingabe. Polygon P (gegen den Uhrzeigersinn)

Ausgabe. Diagonalen, die P y -monoton machen

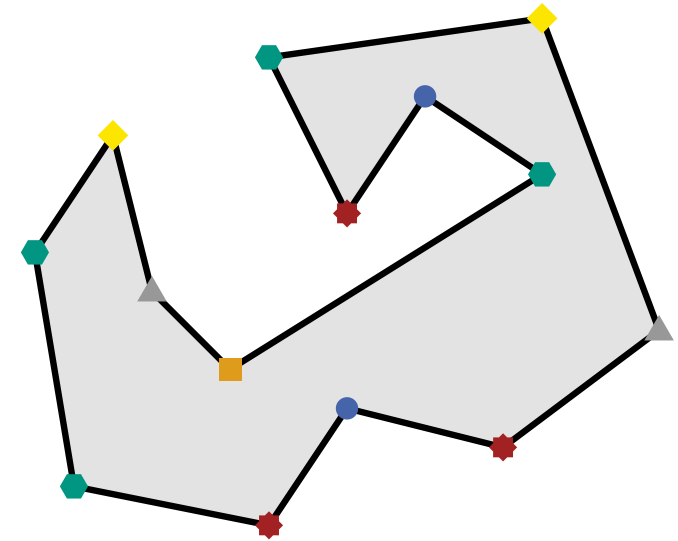
Q = Knoten von P sortiert nach y -Koordinate

T = binärer Suchbaum

solange $Q \neq \emptyset$

$v = \min\{Q\}$ und $Q = Q - v$

BEHANDLEKNOTEN(v)



Sweep-Line mit Verschiedene Knotentypen

Algorithmus MACHEMONOTON(P)

Eingabe. Polygon P (gegen den Uhrzeigersinn)

Ausgabe. Diagonalen, die P y -monoton machen

Q = Knoten von P sortiert nach y -Koordinate

T = binärer Suchbaum

solange $Q \neq \emptyset$

$v = \min\{Q\}$ und $Q = Q - v$

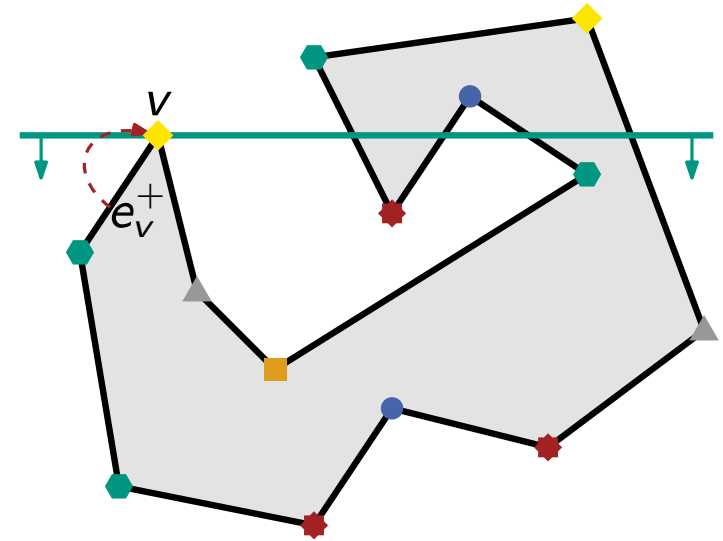
BEHANDLEKNOTEN(v)

BEHANDLESTARTKNOTEN(v)

e_v^+ = Kante nach v in P

füge e_v^+ in T ein

helfer(e_v^+) = v



Sweep-Line mit Verschiedene Knotentypen

Algorithmus MACHEMONOTON(P)

Eingabe. Polygon P (gegen den Uhrzeigersinn)

Ausgabe. Diagonalen, die P y -monoton machen

Q = Knoten von P sortiert nach y -Koordinate

T = binärer Suchbaum

solange $Q \neq \emptyset$

$v = \min\{Q\}$ und $Q = Q - v$

BEHANDLEKNOTEN(v)

BEHANDLESTARTKNOTEN(v)

e_v^+ = Kante nach v in P

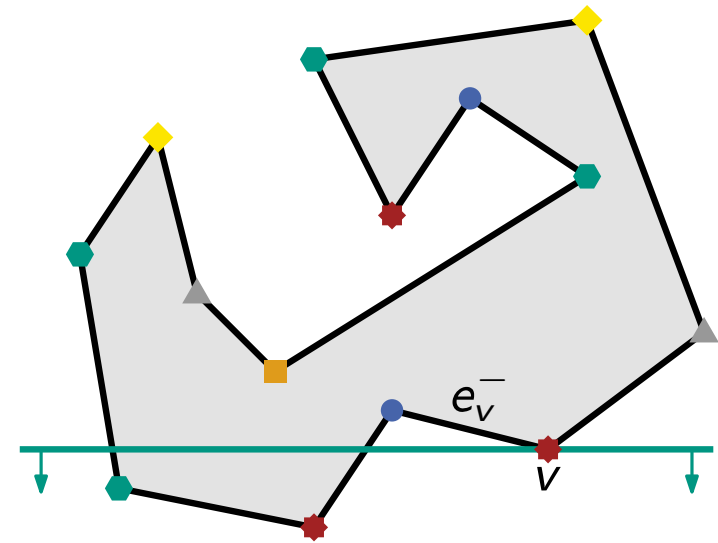
füge e_v^+ in T ein

helfer(e_v^+) = v ◇

BEHANDLEENDKNOTEN(v)

e_v^- = Kante vor v in P

entferne e_v^- aus T ✱



Sweep-Line mit Verschiedene Knotentypen

Algorithmus MACHEMONOTON(P)

Eingabe. Polygon P (gegen den Uhrzeigersinn)

Ausgabe. Diagonalen, die P y -monoton machen

Q = Knoten von P sortiert nach y -Koordinate

T = binärer Suchbaum

solange $Q \neq \emptyset$

$v = \min\{Q\}$ und $Q = Q - v$

BEHANDLEKNOTEN(v)

BEHANDLESTARTKNOTEN(v)

e_v^+ = Kante nach v in P

füge e_v^+ in T ein

helfer(e_v^+) = v ◇

BEHANDLEENDKNOTEN(v)

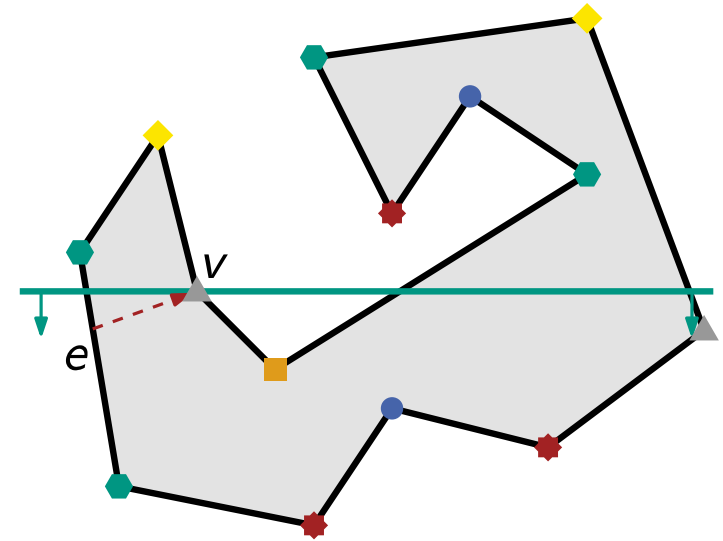
e_v^- = Kante vor v in P

entferne e_v^- aus T ✱

BEHANDLERECHTENKNOTEN(v)

e = Kante links von v in T

helfer(e) = v △



Sweep-Line mit Verschiedene Knotentypen

Algorithmus MACHEMONOTON(P)

Eingabe. Polygon P (gegen den Uhrzeigersinn)

Ausgabe. Diagonalen, die P y -monoton machen

Q = Knoten von P sortiert nach y -Koordinate

T = binärer Suchbaum

solange $Q \neq \emptyset$

$v = \min\{Q\}$ und $Q = Q - v$

BEHANDLEKNOTEN(v)

BEHANDLESTARTKNOTEN(v)

e_v^+ = Kante nach v in P

füge e_v^+ in T ein

helfer(e_v^+) = v



BEHANDLEENDKNOTEN(v)

e_v^- = Kante vor v in P

entferne e_v^- aus T



BEHANDLERECHTENKNOTEN(v)

e = Kante links von v in T

helfer(e) = v



BEHANDLELINKENKNOTEN(v)

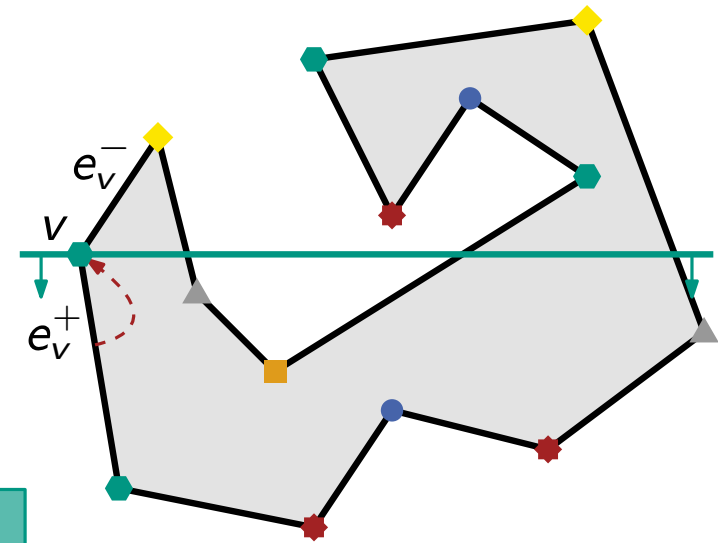
e_v^- = Kante vor v in P

entferne e_v^- aus T

e_v^+ = Kante nach v in P

füge e_v^+ in T ein

helfer(e_v^+) = v



Sweep-Line mit Verschiedene Knotentypen

Algorithmus MACHEMONOTON(P)

Eingabe. Polygon P (gegen den Uhrzeigersinn)

Ausgabe. Diagonalen, die P y -monoton machen

Q = Knoten von P sortiert nach y -Koordinate

T = binärer Suchbaum

solange $Q \neq \emptyset$

$v = \min\{Q\}$ und $Q = Q - v$

BEHANDLEKNOTEN(v)

BEHANDLESTARTKNOTEN(v)

e_v^+ = Kante nach v in P

füge e_v^+ in T ein

helfer(e_v^+) = v



BEHANDLEENDKNOTEN(v)

e_v^- = Kante vor v in P

entferne e_v^- aus T



BEHANDLERECHTENKNOTEN(v)

e = Kante links von v in T

helfer(e) = v



BEHANDLELINKENKNOTEN(v)

e_v^- = Kante vor v in P

entferne e_v^- aus T

e_v^+ = Kante nach v in P

füge e_v^+ in T ein

helfer(e_v^+) = v



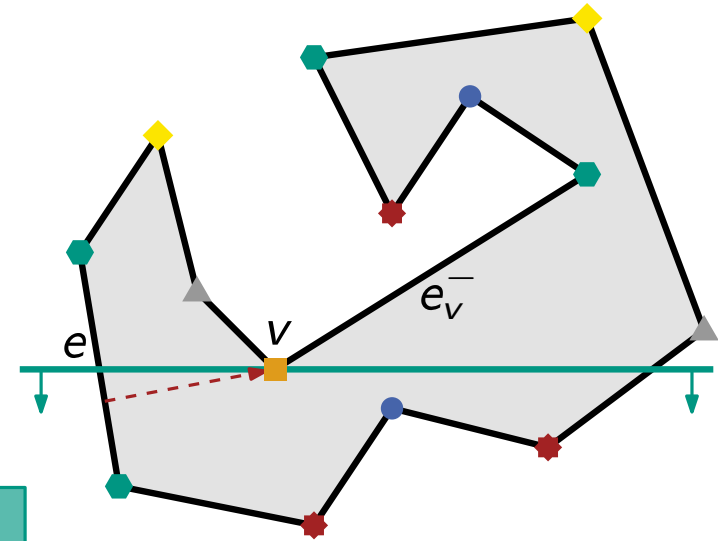
BEHANDLEMERGEKNOTEN(v)

e = Kante links von v in T

helfer(e) = v

e_v^- = Kante vor v in P

entferne e_v^- aus T



Sweep-Line mit Verschiedene Knotentypen

Algorithmus MACHEMONOTON(P)

Eingabe. Polygon P (gegen den Uhrzeigersinn)

Ausgabe. Diagonalen, die P y -monoton machen

Q = Knoten von P sortiert nach y -Koordinate

T = binärer Suchbaum

solange $Q \neq \emptyset$

$v = \min\{Q\}$ und $Q = Q - v$

BEHANDLEKNOTEN(v)

BEHANDLESTARTKNOTEN(v)

e_v^+ = Kante nach v in P

füge e_v^+ in T ein

helfer(e_v^+) = v



BEHANDLEENDKNOTEN(v)

e_v^- = Kante vor v in P

entferne e_v^- aus T



BEHANDLERECHTENKNOTEN(v)

e = Kante links von v in T

helfer(e) = v



BEHANDLELINKENKNOTEN(v)

e_v^- = Kante vor v in P

entferne e_v^- aus T

e_v^+ = Kante nach v in P

füge e_v^+ in T ein

helfer(e_v^+) = v



BEHANDLEMERGEKNOTEN(v)

e = Kante links von v in T

helfer(e) = v

e_v^- = Kante vor v in P

entferne e_v^- aus T



BEHANDLESPLITKNOTEN(v)

e = Kante links von v in T
 u = helfer(e)

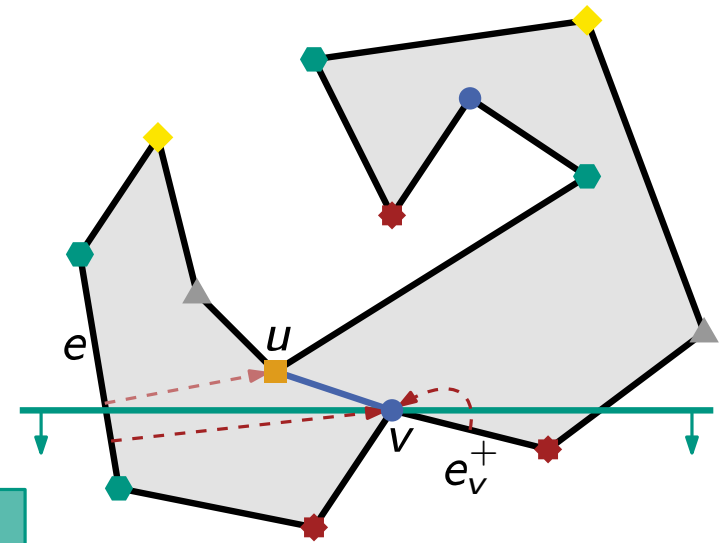
gib Diagonale uv **aus**

helfer(e) = v

e_v^+ = Kante nach v in P

füge e_v^+ in T ein

helfer(e_v^+) = v



Sweep-Line mit Verschiedene Knotentypen

Algorithmus MACHEMONOTON(P)

Eingabe. Polygon P (gegen den Uhrzeigersinn)

Ausgabe. Diagonalen, die P y -monoton machen

Q = Knoten von P sortiert nach y -Koordinate

T = binärer Suchbaum

solange $Q \neq \emptyset$

$v = \min\{Q\}$ und $Q = Q - v$

BEHANDLEKNOTEN(v)

BEHANDLESTARTKNOTEN(v)

e_v^+ = Kante nach v in P
 füge e_v^+ in T ein
 helfer(e_v^+) = v

BEHANDLEENDKNOTEN(v)

e_v^- = Kante vor v in P
 entferne e_v^- aus T

BEHANDLERECHTENKNOTEN(v)

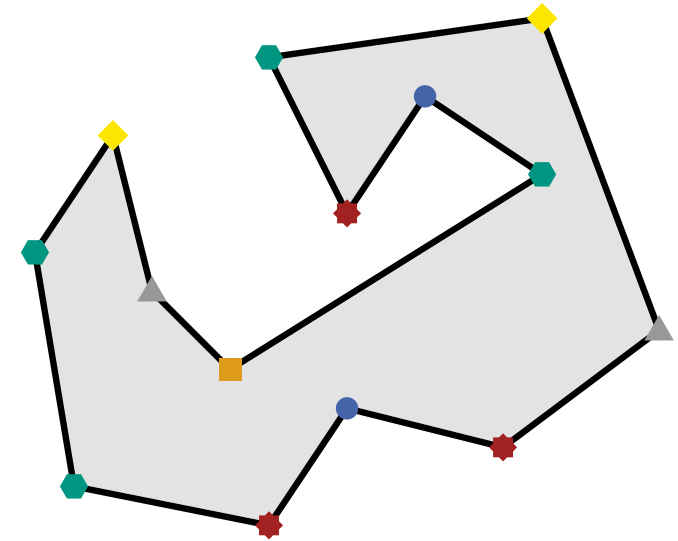
e = Kante links von v in T
 helfer(e) = v

BEHANDLELINKENKNOTEN(v)

e_v^- = Kante vor v in P
 entferne e_v^- aus T
 e_v^+ = Kante nach v in P
 füge e_v^+ in T ein
 helfer(e_v^+) = v

BEHANDLEMERGEKNOTEN(v)

e = Kante links von v in T
 helfer(e) = v
 e_v^- = Kante vor v in P
 entferne e_v^- aus T



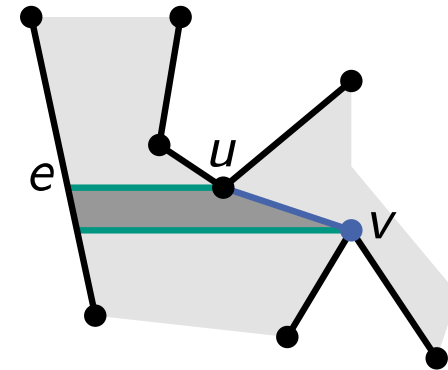
BEHANDLESPLITKNOTEN(v)

e = Kante links von v in T
 u = helfer(e)
gib Diagonale uv **aus**
 helfer(e) = v
 e_v^+ = Kante nach v in P
 füge e_v^+ in T ein
 helfer(e_v^+) = v

Schnittfreiheit

Erinnerung

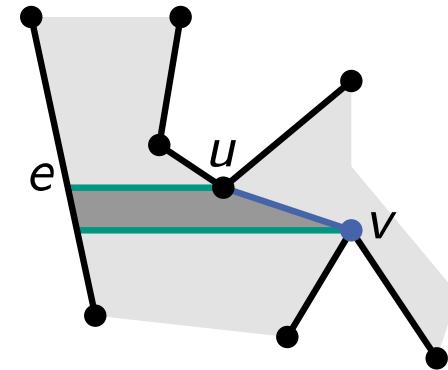
- die eingefügten Diagonalen schneiden das Polygon nicht
- Argument: das Viereck zwischen uv und e enthält keine Knoten



Schnittfreiheit

Erinnerung

- die eingefügten Diagonalen schneiden das Polygon nicht
- Argument: das Viereck zwischen uv und e enthält keine Knoten

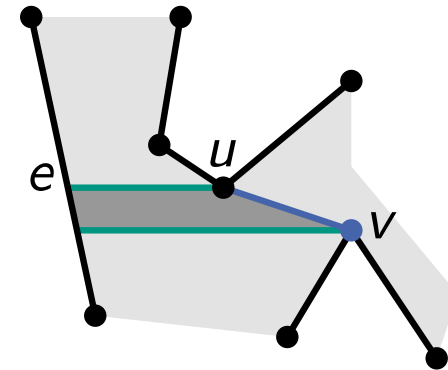


Kann eine zuvor eingefügte Diagonale geschnitten werden?

Schnittfreiheit

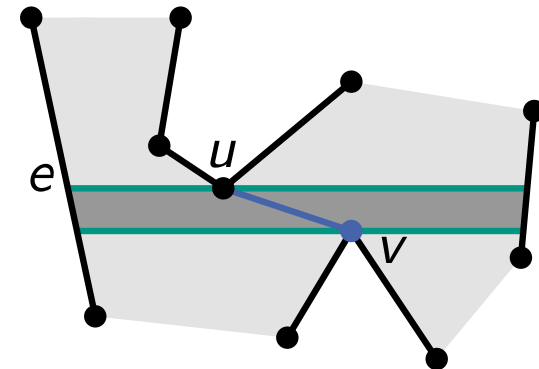
Erinnerung

- die eingefügten Diagonalen schneiden das Polygon nicht
- Argument: das Viereck zwischen uv und e enthält keine Knoten



Kann eine zuvor eingefügte Diagonale geschnitten werden?

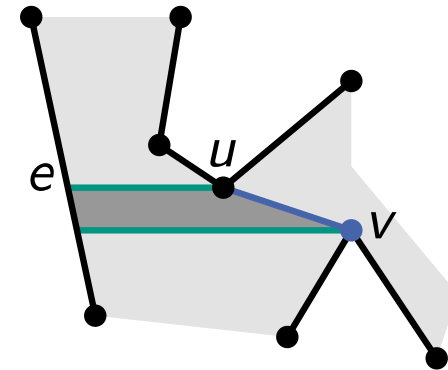
- Verlängerung des Vierecks nach rechts enthält auch keinen Knoten (gleiches Argument)



Schnittfreiheit

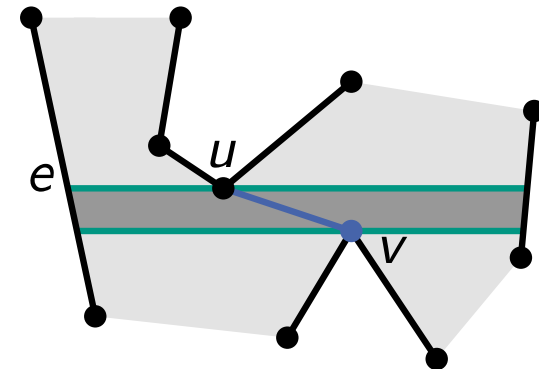
Erinnerung

- die eingefügten Diagonalen schneiden das Polygon nicht
- Argument: das Viereck zwischen uv und e enthält keine Knoten



Kann eine zuvor eingefügte Diagonale geschnitten werden?

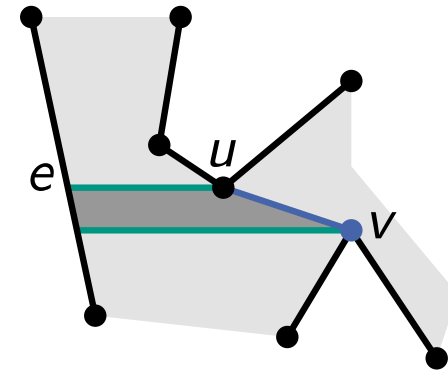
- Verlängerung des Vierecks nach rechts enthält auch keinen Knoten (gleiches Argument)
- beide Endpunkte einer zuvor eingefügten Diagonale liegen über v



Schnittfreiheit

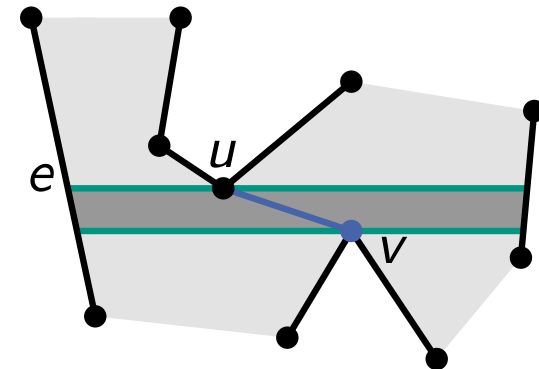
Erinnerung

- die eingefügten Diagonalen schneiden das Polygon nicht
- Argument: das Viereck zwischen uv und e enthält keine Knoten

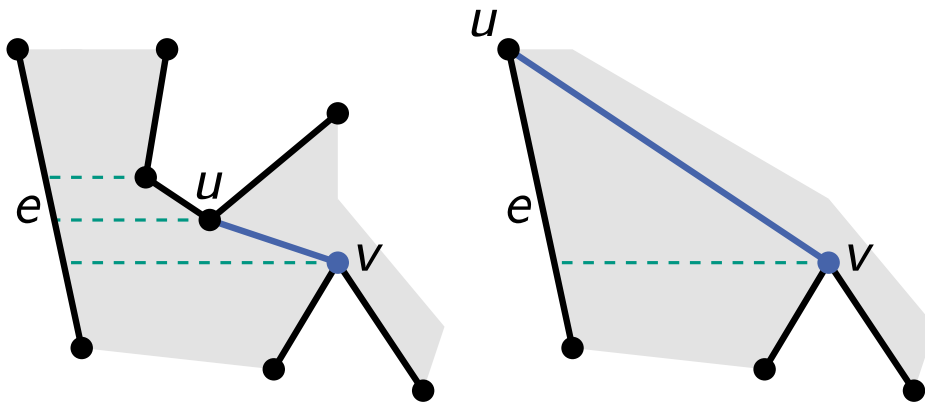


Kann eine zuvor eingefügte Diagonale geschnitten werden?

- Verlängerung des Vierecks nach rechts enthält auch keinen Knoten (gleiches Argument)
 - beide Endpunkte einer zuvor eingefügten Diagonale liegen über v
- ⇒ uv schneidet keine vorherige Diagonale



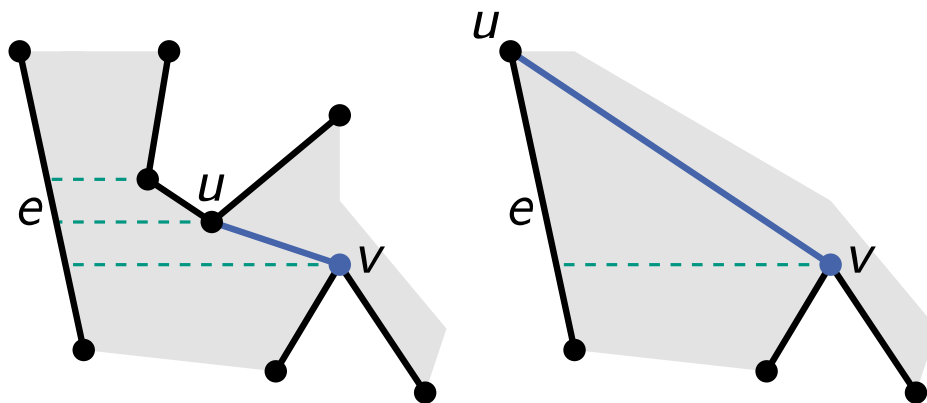
Und was ist mit Merge-Knoten?



Erinnerung: Split-Knoten v

- e : Kante links neben v
- wähle für u tiefsten Knoten über v , der e links von sich hat (Helfer von e)
- falls dieser nicht existiert: wähle für u oberen Knoten von e
- verbinde v mit u

Und was ist mit Merge-Knoten?

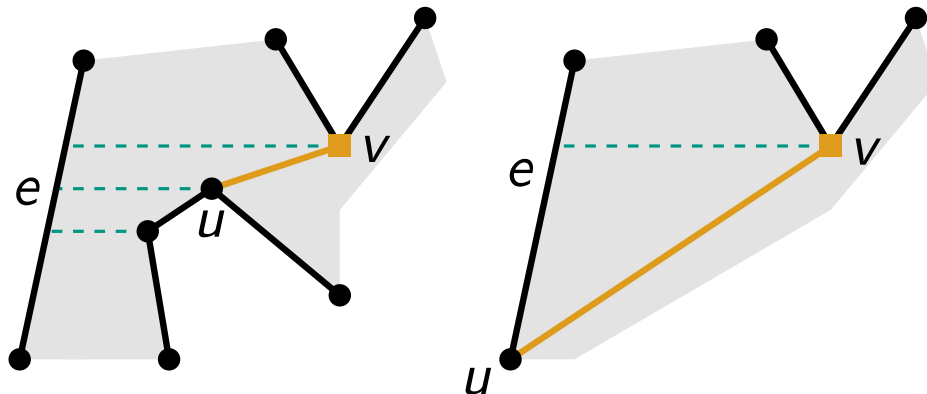


Erinnerung: Split-Knoten v

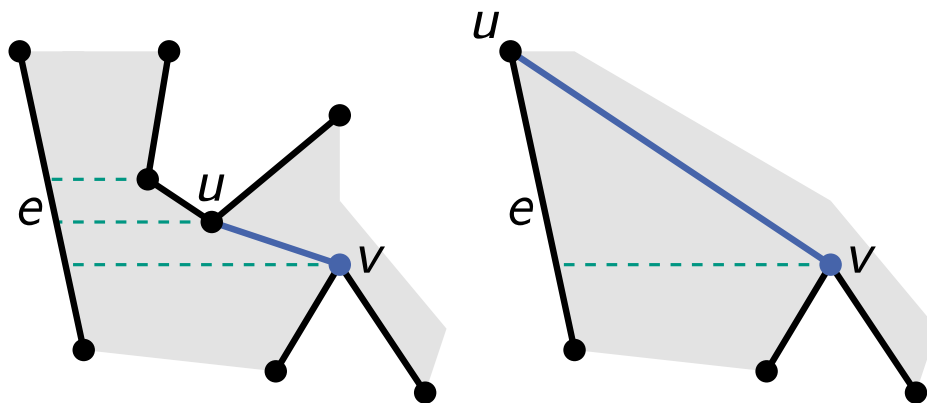
- e : Kante links neben v
- wähle für u tiefsten Knoten über v , der e links von sich hat (Helfer von e)
- falls dieser nicht existiert: wähle für u oberen Knoten von e
- verbinde v mit u

Spiegeln macht aus v einen Merge-Knoten

(Damit kann man das einfach in einem zweiten Durchlauf analog behandeln. Man kann das aber auch gleich mitbetrachten.)



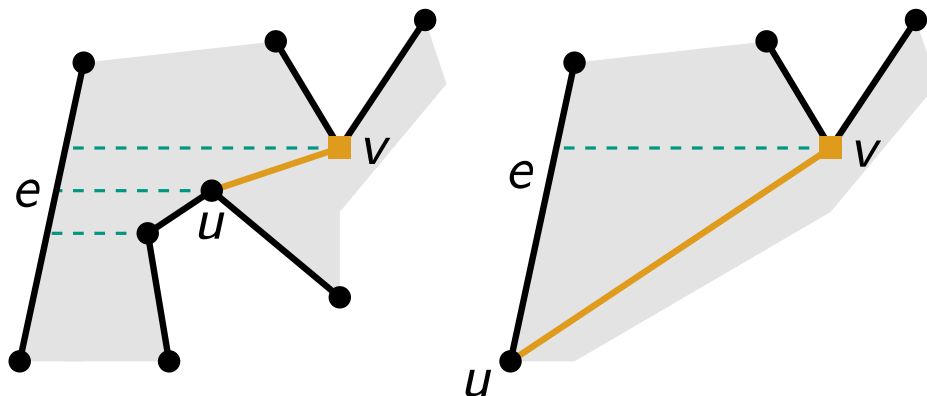
Und was ist mit Merge-Knoten?



Erinnerung: Split-Knoten v

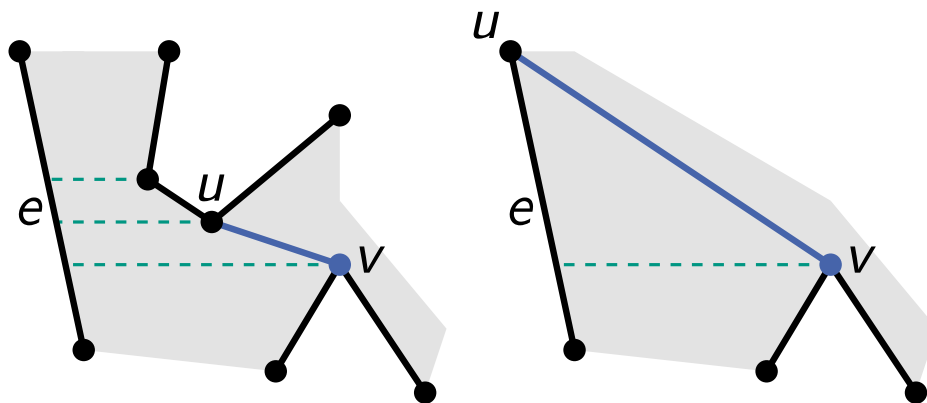
- e : Kante links neben v
- wähle für u tiefsten Knoten über v , der e links von sich hat (Helfer von e)
- falls dieser nicht existiert: wähle für u oberen Knoten von e
- verbinde v mit u

----- Spiegeln macht aus v einen Merge-Knoten



Behandlung von Merge-Knoten v

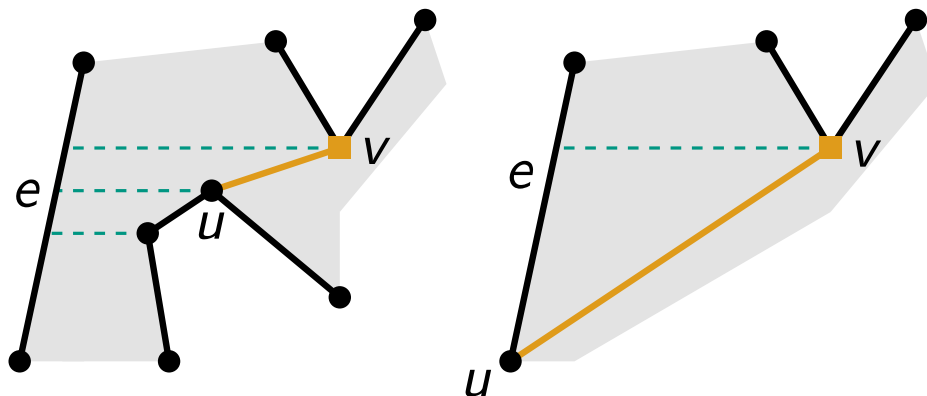
Und was ist mit Merge-Knoten?



Erinnerung: Split-Knoten v

- e : Kante links neben v
- wähle für u tiefsten Knoten über v , der e links von sich hat (Helfer von e)
- falls dieser nicht existiert: wähle für u oberen Knoten von e
- verbinde v mit u

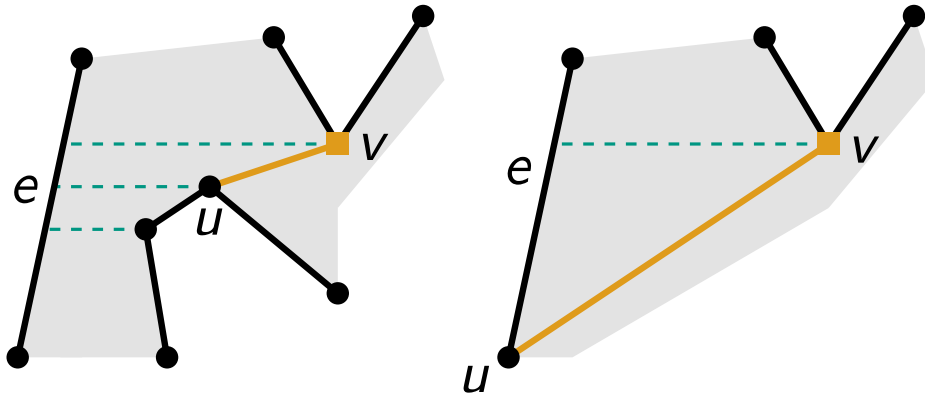
----- Spiegeln macht aus v einen Merge-Knoten



Behandlung von Merge-Knoten v

- e : Kante links neben v
- wähle für u den höchsten Knoten unter v , der e links von sich hat
- falls dieser nicht existiert: wähle für u unteren Knoten von e
- verbinde v mit u

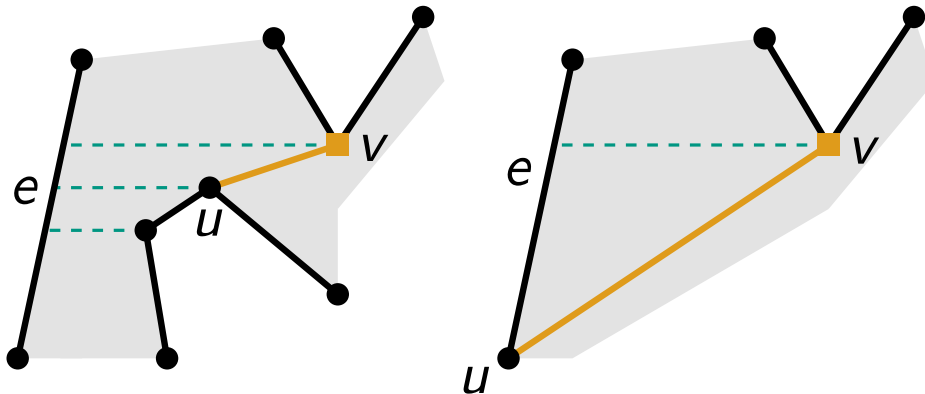
Und was ist mit Merge-Knoten?



Behandlung von Merge-Knoten v

- e : Kante links neben v
- wähle für u höchsten Knoten unter v , der e links von sich hat
- falls dieser nicht existiert: wähle für u unteren Knoten von e
- verbinde v mit u

Und was ist mit Merge-Knoten?



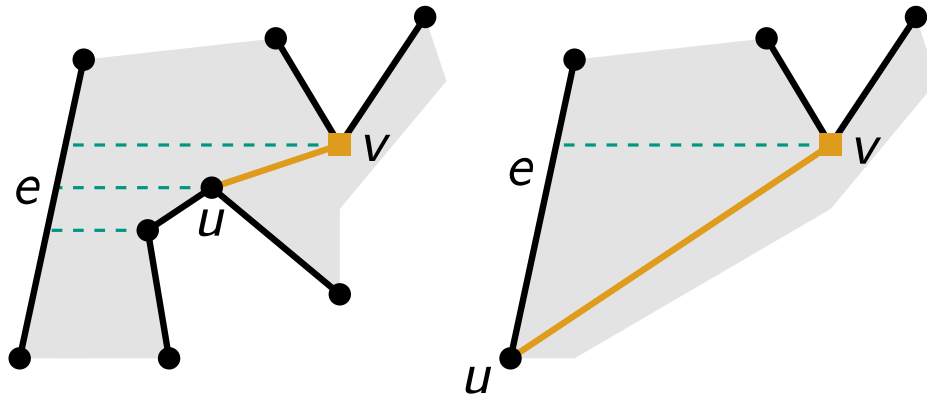
Behandlung von Merge-Knoten v

- e : Kante links neben v
- wähle für u höchsten Knoten unter v , der e links von sich hat
- falls dieser nicht existiert: wähle für u unteren Knoten von e
- verbinde v mit u

Problem

- die relevanten Infos liegen unterhalb von v
- Sweep-Line Algo kann Diagonale nicht bei Abarbeitung von v einfügen

Und was ist mit Merge-Knoten?



Behandlung von Merge-Knoten v

- e : Kante links neben v
- wähle für u höchsten Knoten unter v , der e links von sich hat
- falls dieser nicht existiert: wähle für u unteren Knoten von e
- verbinde v mit u

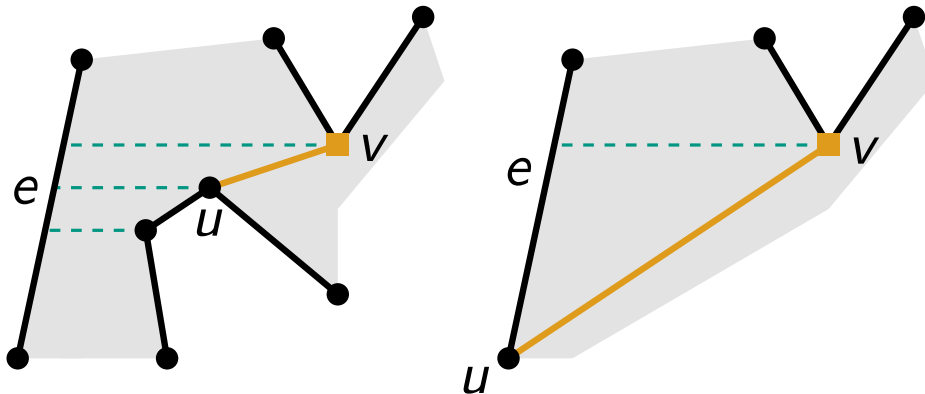
Problem

- die relevanten Infos liegen unterhalb von v
- Sweep-Line Algo kann Diagonale nicht bei Abarbeitung von v einfügen

Beobachtung

- v wird zunächst der Helfer von e

Und was ist mit Merge-Knoten?



Behandlung von Merge-Knoten v

- e : Kante links neben v
- wähle für u höchsten Knoten unter v , der e links von sich hat
- falls dieser nicht existiert: wähle für u unteren Knoten von e
- verbinde v mit u

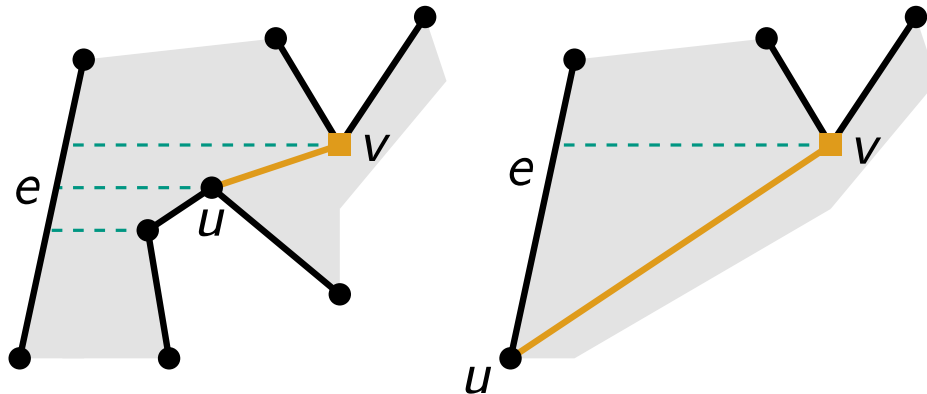
Problem

- die relevanten Infos liegen unterhalb von v
- Sweep-Line Algo kann Diagonale nicht bei Abarbeitung von v einfügen

Beobachtung

- v wird zunächst der Helfer von e
- u ist der nächste Helfer von e oder der Endpunkt von e

Und was ist mit Merge-Knoten?



Behandlung von Merge-Knoten v

- e : Kante links neben v
- wähle für u höchsten Knoten unter v , der e links von sich hat
- falls dieser nicht existiert: wähle für u unteren Knoten von e
- verbinde v mit u

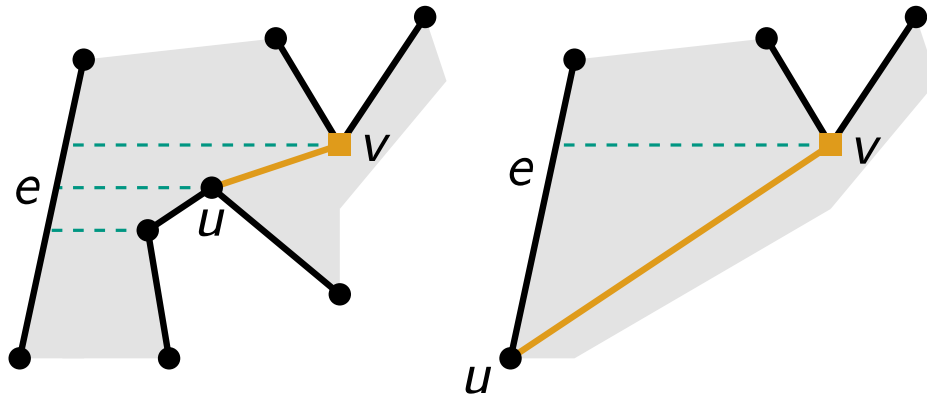
Problem

- die relevanten Infos liegen unterhalb von v
- Sweep-Line Algo kann Diagonale nicht bei Abarbeitung von v einfügen

Beobachtung

- v wird zunächst der Helfer von e
- u ist der nächste Helfer von e oder der Endpunkt von e
- Plan: eliminiere Merge-Knoten v erst bei Abarbeitung von u

Und was ist mit Merge-Knoten?



Behandlung von Merge-Knoten v

- e : Kante links neben v
- wähle für u höchsten Knoten unter v , der e links von sich hat
- falls dieser nicht existiert: wähle für u unteren Knoten von e
- verbinde v mit u

Problem

- die relevanten Infos liegen unterhalb von v
- Sweep-Line Algo kann Diagonale nicht bei Abarbeitung von v einfügen

Beobachtung

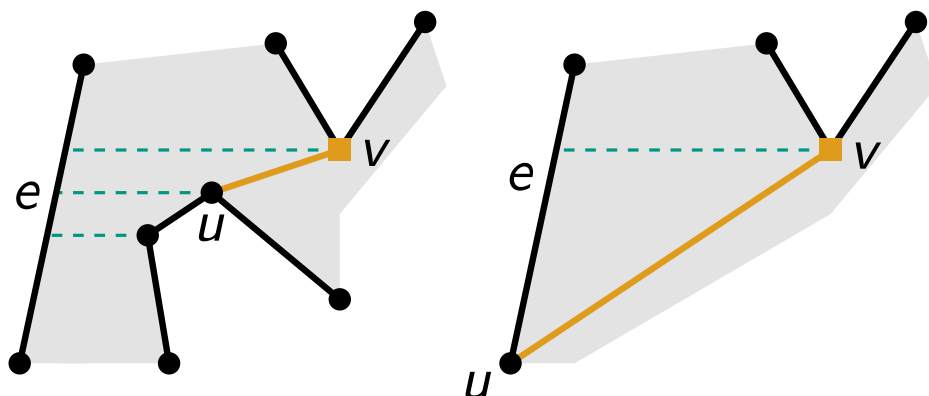
- v wird zunächst der Helfer von e
- u ist der nächste Helfer von e oder der Endpunkt von e
- Plan: eliminiere Merge-Knoten v erst bei Abarbeitung von u

Ersetze

Durch

$e =$ Kante links von u in T
 $\text{helfer}(e) = u$

Und was ist mit Merge-Knoten?



Behandlung von Merge-Knoten v

- e : Kante links neben v
- wähle für u höchsten Knoten unter v , der e links von sich hat
- falls dieser nicht existiert: wähle für u unteren Knoten von e
- verbinde v mit u

Problem

- die relevanten Infos liegen unterhalb von v
- Sweep-Line Algo kann Diagonale nicht bei Abarbeitung von v einfügen

Beobachtung

- v wird zunächst der Helfer von e
- u ist der nächste Helfer von e oder der Endpunkt von e
- Plan: eliminiere Merge-Knoten v erst bei Abarbeitung von u

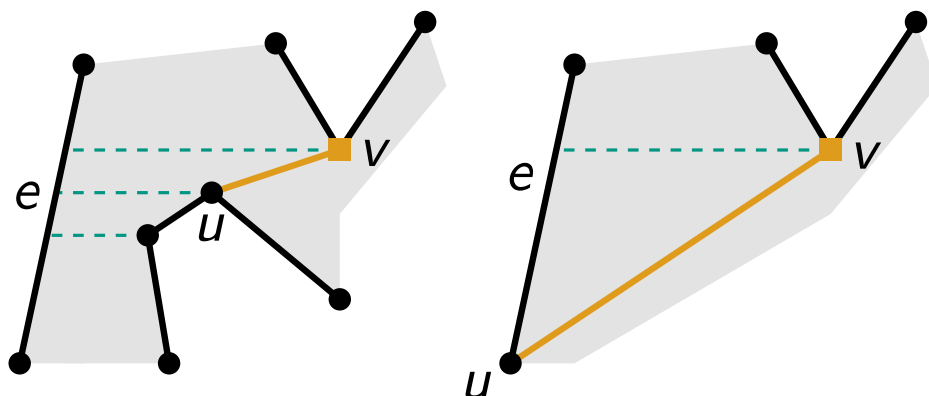
Ersetze

$e =$ Kante links von u in T
 $\text{helfer}(e) = u$

Durch

$e =$ Kante links von u in T
 $v = \text{helfer}(e)$
wenn v ist Merge-Knoten
gib Diagonale uv **aus**
 $\text{helfer}(e) = u$

Und was ist mit Merge-Knoten?



Behandlung von Merge-Knoten v

- e : Kante links neben v
- wähle für u höchsten Knoten unter v , der e links von sich hat
- falls dieser nicht existiert: wähle für u unteren Knoten von e
- verbinde v mit u

Problem

- die relevanten Infos liegen unterhalb von v
- Sweep-Line Algo kann Diagonale nicht bei Abarbeitung von v einfügen

Beobachtung

- v wird zunächst der Helfer von e
- u ist der nächste Helfer von e oder der Endpunkt von e
- Plan: eliminiere Merge-Knoten v erst bei Abarbeitung von u

Ersetze

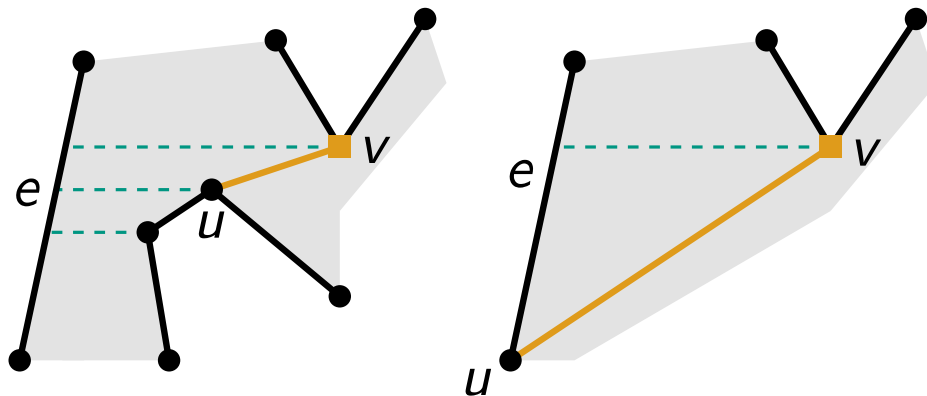
$e =$ Kante links von u in T
 $\text{helfer}(e) = u$

$e_u^- =$ Kante vor u in P
 entferne e_u^- aus T

Durch

$e =$ Kante links von u in T
 $v = \text{helfer}(e)$
wenn v ist Merge-Knoten
gib Diagonale uv **aus**
 $\text{helfer}(e) = u$

Und was ist mit Merge-Knoten?



Behandlung von Merge-Knoten v

- e : Kante links neben v
- wähle für u höchsten Knoten unter v , der e links von sich hat
- falls dieser nicht existiert: wähle für u unteren Knoten von e
- verbinde v mit u

Problem

- die relevanten Infos liegen unterhalb von v
- Sweep-Line Algo kann Diagonale nicht bei Abarbeitung von v einfügen

Beobachtung

- v wird zunächst der Helfer von e
- u ist der nächste Helfer von e oder der Endpunkt von e
- Plan: eliminiere Merge-Knoten v erst bei Abarbeitung von u

Ersetze

$e =$ Kante links von u in T
 $\text{helfer}(e) = u$

$e_u^- =$ Kante vor u in P
 entferne e_u^- aus T

Durch

$e =$ Kante links von u in T
 $v = \text{helfer}(e)$
wenn v ist Merge-Knoten
gib Diagonale uv **aus**
 $\text{helfer}(e) = u$

$e_u^- =$ Kante vor u in P
 $v = \text{helfer}(e)$
wenn v ist Merge-Knoten
gib Diagonale uv **aus**
 entferne e_u^- aus T

Zusammenfassung

Theorem

(Zerlegung in y -monotone Teile)

Ein gegebenes Polygon mit n Knoten kann in $O(n \log n)$ Zeit in y -monotone Teilpolygone zerlegt werden.

Zusammenfassung

Theorem (Zerlegung in y -monotone Teile)
Ein gegebenes Polygon mit n Knoten kann in $O(n \log n)$ Zeit in y -monotone Teilpolygone zerlegt werden.

Außerdem gesehen

- weitere Anwendung der Sweep-Line Technik
- Konzept der Monotonie
- Aufteilung eines komplizierten Problems in zwei leichtere Teilprobleme

Zusammenfassung

Theorem

(Zerlegung in y -monotone Teile)

Ein gegebenes Polygon mit n Knoten kann in $O(n \log n)$ Zeit in y -monotone Teilpolygone zerlegt werden.

Außerdem gesehen

- weitere Anwendung der Sweep-Line Technik
- Konzept der Monotonie
- Aufteilung eines komplizierten Problems in zwei leichtere Teilprobleme

Was gibt es sonst noch?

- untere Schranke von $\Omega(n \log n)$ wenn das Polygon Löcher haben darf

Zusammenfassung

Theorem (Zerlegung in y -monotone Teile)
Ein gegebenes Polygon mit n Knoten kann in $O(n \log n)$ Zeit in y -monotone Teilpolygone zerlegt werden.

Außerdem gesehen

- weitere Anwendung der Sweep-Line Technik
- Konzept der Monotonie
- Aufteilung eines komplizierten Problems in zwei leichtere Teilprobleme

Was gibt es sonst noch?

- untere Schranke von $\Omega(n \log n)$ wenn das Polygon Löcher haben darf
- $O(n \log \log n)$, $O(n \log^* n)$, und sogar $O(n)$ möglich, wenn das Polygon keine Löcher hat

Zusammenfassung

Theorem

(Zerlegung in y -monotone Teile)

Ein gegebenes Polygon mit n Knoten kann in $O(n \log n)$ Zeit in y -monotone Teilpolygone zerlegt werden.

Außerdem gesehen

- weitere Anwendung der Sweep-Line Technik
- Konzept der Monotonie
- Aufteilung eines komplizierten Problems in zwei leichtere Teilprobleme

Was gibt es sonst noch?

- untere Schranke von $\Omega(n \log n)$ wenn das Polygon Löcher haben darf
- $O(n \log \log n)$, $O(n \log^* n)$, und sogar $O(n)$ möglich, wenn das Polygon keine Löcher hat
- entsprechendes 3-dimensionales Problem ist NP-schwer

Literaturhinweise

$O(n \log \log n)$

- **An $O(n \log \log n)$ -Time Algorithm for Triangulating a Simple Polygon** (1988)
 Robert E. Tarjan, Christopher J. Van Wyk <https://doi.org/10.1137/0217010>
- **Polygon triangulation in $O(n \log \log n)$ time with simple data structures** (1992)
 David G. Kirkpatrick, Maria M. Klawe, Robert E. Tarjan <https://doi.org/10.1007/BF02187846>

$O(n \log^* n)$

- **A fast Las Vegas algorithm for triangulating a simple polygon** (1989)
 Kenneth L. Clarkson, Robert E. Tarjan, Christopher J. Van Wyk <https://doi.org/10.1007/BF02187741>
- **Randomization Yields Simple $O(n \log^* n)$ Algorithms for Difficult $\Omega(n)$ Problems**
 Olivier Devillers <https://doi.org/10.1142/S021819599200007X> (1992)
- **A simple and fast incremental randomized algorithm for computing trapezoidal decompositions and for triangulating polygons** (1991)
 Raimund Seidel [https://doi.org/10.1016/0925-7721\(91\)90012-4](https://doi.org/10.1016/0925-7721(91)90012-4)

$O(n)$

- **Triangulating a simple polygon in linear time** (1991)
 Bernard Chazelle <https://doi.org/10.1007/BF02574703>
- **A Randomized Algorithm for Triangulating a Simple Polygon in Linear Time** (2001)
 N. M. Amato, M. T. Goodrich, E. A. Ramos <https://doi.org/10.1007/s00454-001-0027-x>