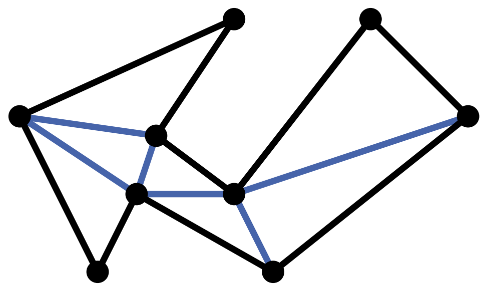
Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmische Geometrie

Triangulierung eines Polygons

Triangulierung von Polygonen

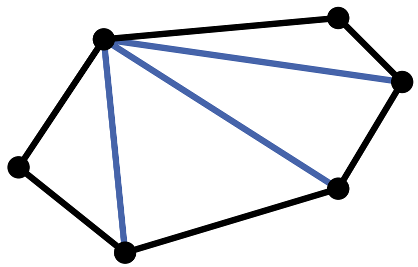


Definition
Eine **Triangulierung** eines Polygons P ist eine planare Unterteilung von P, sodass jede Facette ein Dreieck ist.

Problem
Gegeben P, finde Diagonalen, die P triangulieren.

Gibt es das immer?

Geht es etwas einfacher?



- konvexe Polygone sind leicht zu triangulieren
- Idee: zerlege P in konvexe Polygone
- trianguliere dann die konvexen Teilpolygone
- Problem: eine solche Zerlegung zu finden ist leider nicht viel leichter

Plan im Folgenden

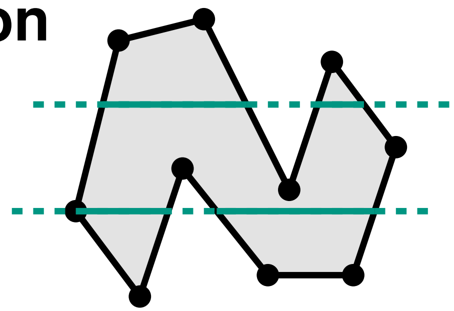
- finde eine schwächer Eigenschaft als Konvexität
- Triangulieren der Teilpolygone mit dieser Eigenschaft wird schwerer
- Zerlegung von P in Teilpolygone mit der Eigenschaft wird leichter

y-monotone Polygone

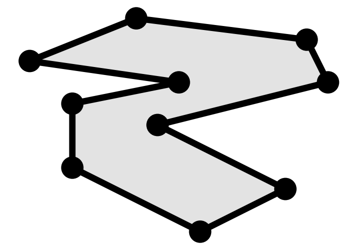
Karlsruher Institut für Technologie

Definition
Ein Polygon ist ***y*-monoton**, wenn der Schnitt mit jeder horizontalen Geraden zusammenhängend ist.

nicht y-monoton



y-monoton



Anmerkung
- konvexe Polygone sind monoton in jede Richtung

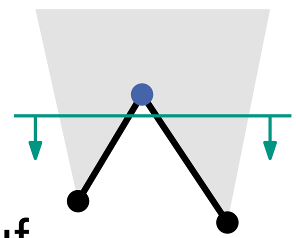
x- und y-monoton $\Rightarrow$ konvex?

Unser Plan
- zerlege beliebiges Polygon in $O(n \log n)$ Zeit in y-monotone Teilpolygone
  $\rightarrow$ jetzt gleich
- trianguliere ein y-monotones Polygon in $O(n)$ Zeit
  $\rightarrow$ Übungsblatt

Was macht ein Polygon nicht y-monoton?

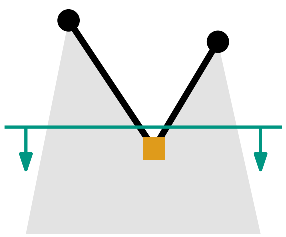
Split-Knoten

- Kanten liegen unten
- Polygon liegt oben
- Polygon spaltet sich auf (von oben kommend)



Merge-Knoten

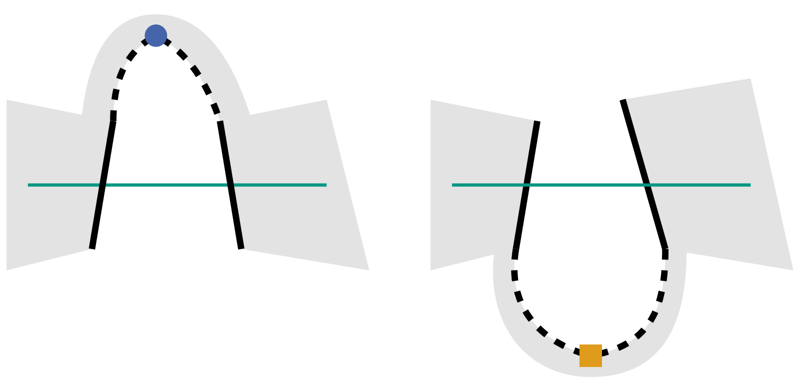
- Kanten liegen oben
- Polygon liegt unten
- Polygone fügen sich zusammen



Beobachtung

- es gibt Merge- oder Split-Knoten $\Rightarrow$ das Polygon ist nicht y-monoton
- die Umkehrung gilt auch; Beweis durch Bild:

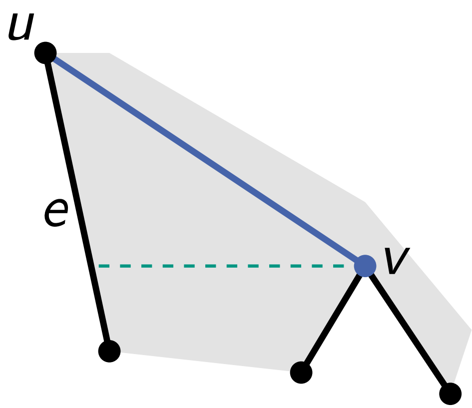
> **Lemma** **(y-Monotonie)**
> Ein Polygon ist genau dann y-monoton, wenn es keine Split- oder Merge-Knoten gibt.

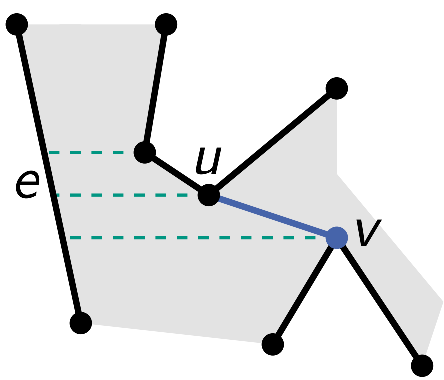


Ziel

- eliminiere alle Split- und Merge-Knoten
- füge dazu Diagonalen ein
- von Split-Knoten nach oben, von Merge-Knoten nach unten

Eliminierung von Split-Knoten





Idee für Split-Knoten v

- finde Knoten u oberhalb von v
- wenn u nah bei v liegt, dann schneidet die Diagonale uv das Polygon hoffentlich nicht
- finde nächste Kante e links von v
- wähle oberen Endpunkt von e als u

Problem

- uv könnte andere Kanten des Polygons schneiden
- wähle für u stattdessen den tiefsten Knoten über v, der e links neben sich hat
- diesen Knoten nennen wir den **Helfer** von e
- **Beachte:** Helfer hängt von v ab

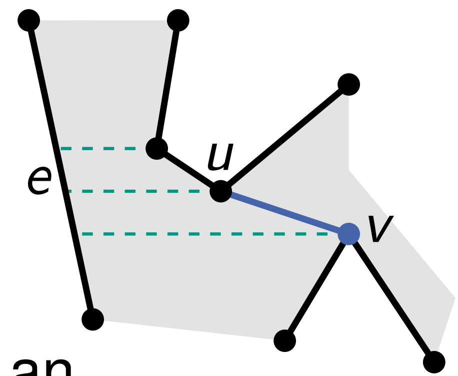
Lemma **(der Helfer hilft)**
Sei v ein Split-Knoten, e die Kante links neben v und u der Helfer von e (bzgl. v). Dann schneidet uv keine Kante des Polygons (außer in u und v).

Beweis:
- das Viereck zwischen uv und e enthält keine Knoten Warum?
- keine Polygonkante kann uv schneiden Warum?

Eliminierung von Split-Knoten

Was müssen wir für einen Split-Knoten v tun?

- finde die Kante e links von v
- finde den Helfer von e (bezüglich v)



Beobachtung

- e liegt (teilweise) über v
- der Helfer von e liegt über v

$\Rightarrow$ Sweep-Line bietet sich an
(horizontale Sweep-Line ℓ von oben nach unten)

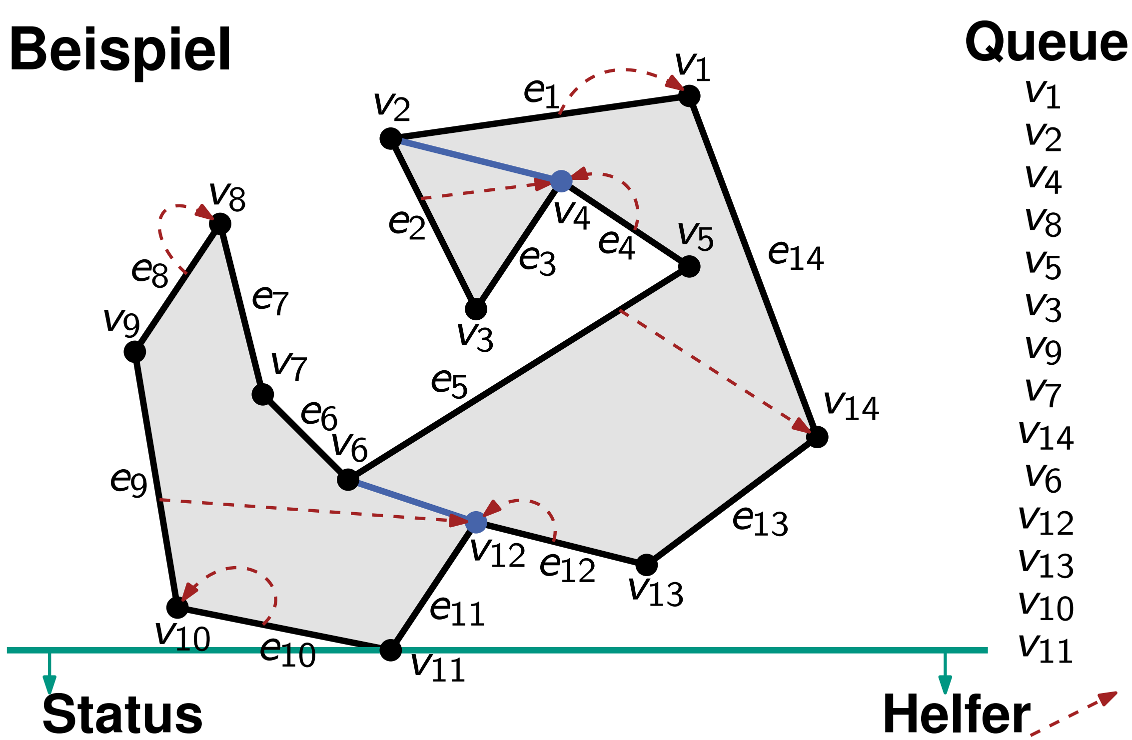
Event-Queue

- Knoten des Polygons
- sortiert nach y-Koordinate
  (bzw. lexikographisch nach yx)

Sweep-Line Status

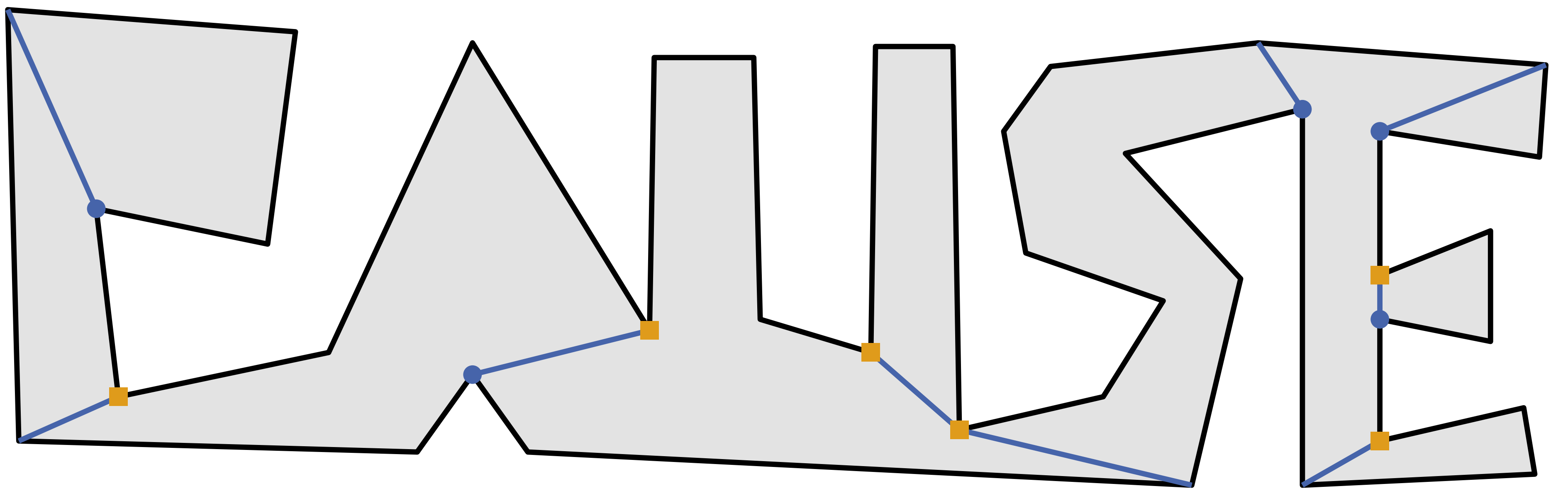
- Kanten die ℓ schneiden sortiert nach x-Koordinate
- Kanten mit Polygon rechts von sich genügen
- aktueller Helfer für jede Kante

Beispiel



Kurze Pause

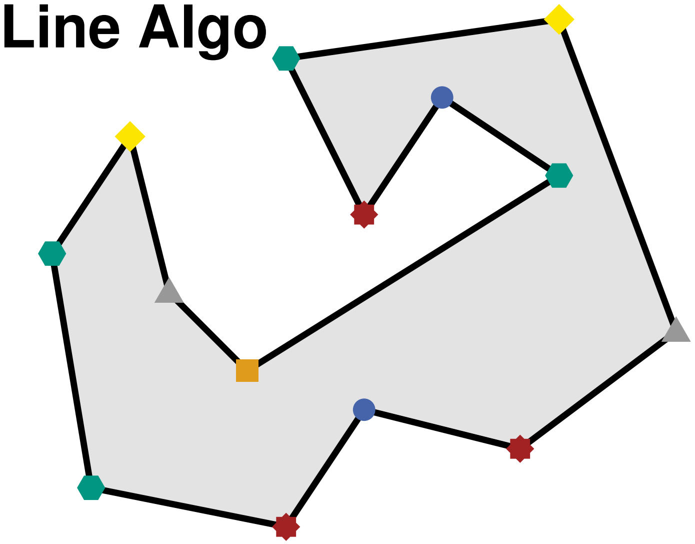
Wie viele Diagonalen muss man mindestens einfügen, um y-monotone Polygone zu erhalten?



Sweep-Line mit Verschiedene Knotentypen

Unterschiedlich behandelte Knoten im Sweep-Line Algo

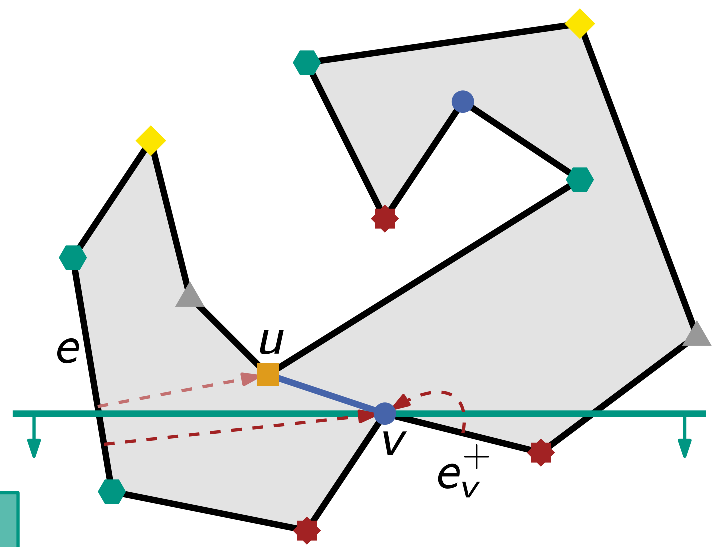
- Split-Knoten: Kanten unten, Polygon oben
- Merge-Knoten: Kanten oben, Polygon unten
- Start-Knoten: Kanten unten, Polygon unten
- End-Knoten: Kanten oben, Polygon oben
- linker Knoten: y-monoton, Polygon rechts
- rechter Knoten: y-monoton, Polygon links



Sweep-Line mit Verschiedene Knotentypen

Algorithmus MacheMonoton(P)
Eingabe. Polygon P (gegen den Uhrzeigersinn)
Ausgabe. Diagonalen, die P y-monoton machen

$Q =$ Knoten von P sortiert nach y-Koordinate
$T =$ binärer Suchbaum
solange $Q \neq \emptyset$
 $v = \min\{Q\}$ und $Q = Q - v$
 BehandleKnoten(v)



BehandleStartKnoten(v)
- e_v^+ = Kante nach v in P
- füge e_v^+ in T ein
- helfer$(e_v^+) = v$ ◇

BehandleEndKnoten(v)
- e_v^- = Kante vor v in P
- entferne e_v^- aus T

BehandleRechtenKnoten(v)
- $e =$ Kante links von v in T
- helfer$(e) = v$ △

BehandleLinkenKnoten(v)
- e_v^- = Kante vor v in P
- entferne e_v^- aus T
- e_v^+ = Kante nach v in P
- füge e_v^+ in T ein
- helfer$(e_v^+) = v$ ⬡

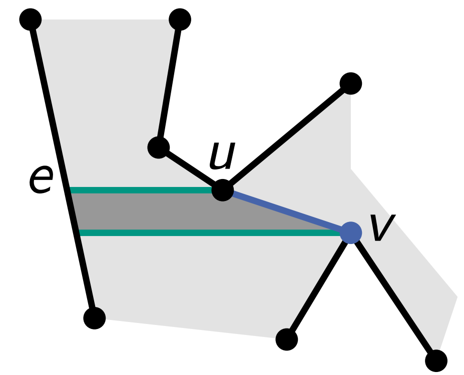
BehandleMergeKnoten(v)
- $e =$ Kante links von v in T
- helfer$(e) = v$
- e_v^- = Kante vor v in P
- entferne e_v^- aus T □

BehandleSplitKnoten(v)
- $e =$ Kante links von v in T
- $u =$ helfer(e)
- **gib** Diagonale uv **aus**
- helfer$(e) = v$
- e_v^+ = Kante nach v in P
- füge e_v^+ in T ein
- helfer$(e_v^+) = v$ ○

Schnittfreiheit

Erinnerung

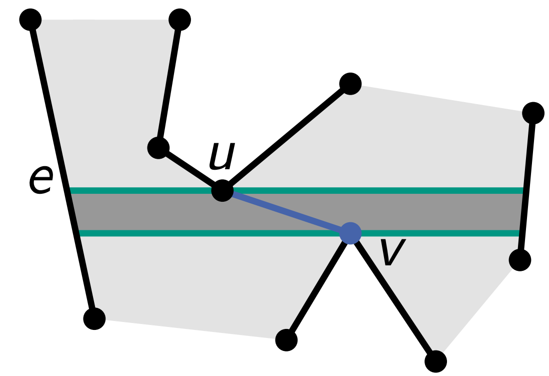
- die eingefügten Diagonalen schneiden das Polygon nicht
- Argument: das Viereck zwischen uv und e enthält keine Knoten



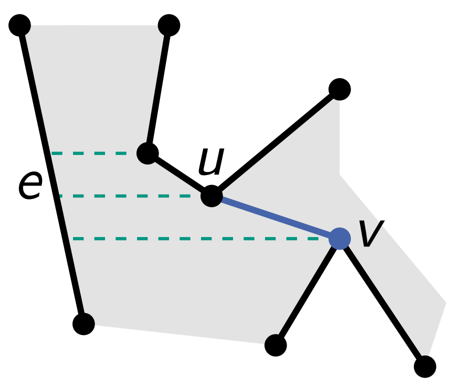
Kann eine zuvor eingefügte Diagonale geschnitten werden?

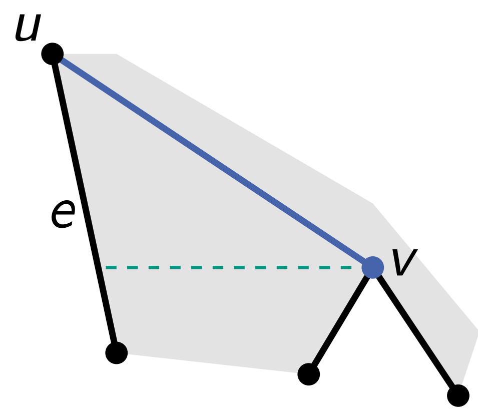
- Verlängerung des Vierecks nach rechts enthält auch keinen Knoten (gleiches Argument)
- beide Endpunkte einer zuvor eingefügten Diagonale liegen über v

$\Rightarrow$ uv schneidet keine vorherige Diagonale



Und was ist mit Merge-Knoten?

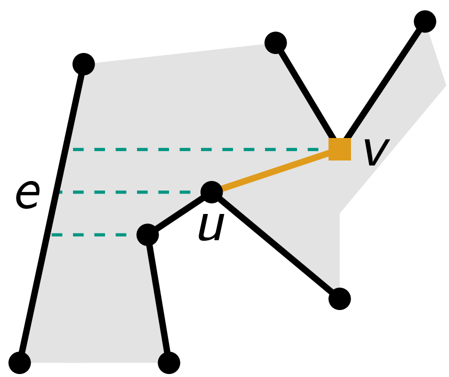


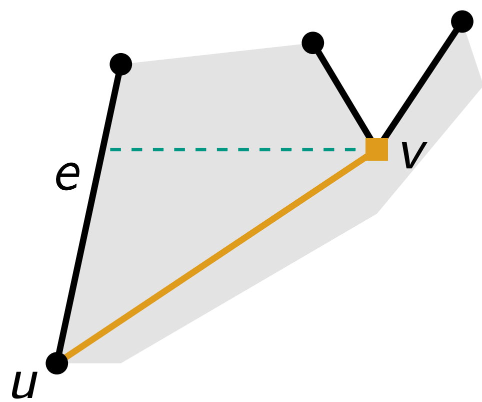


Erinnerung: Split-Knoten v

- e: Kante links neben v
- wähle für u tiefsten Knoten über v, der e links von sich hat (Helfer von e)
- falls dieser nicht existiert: wähle für u oberen Knoten von e
- verbinde v mit u

Spiegeln macht aus v einen Merge-Knoten

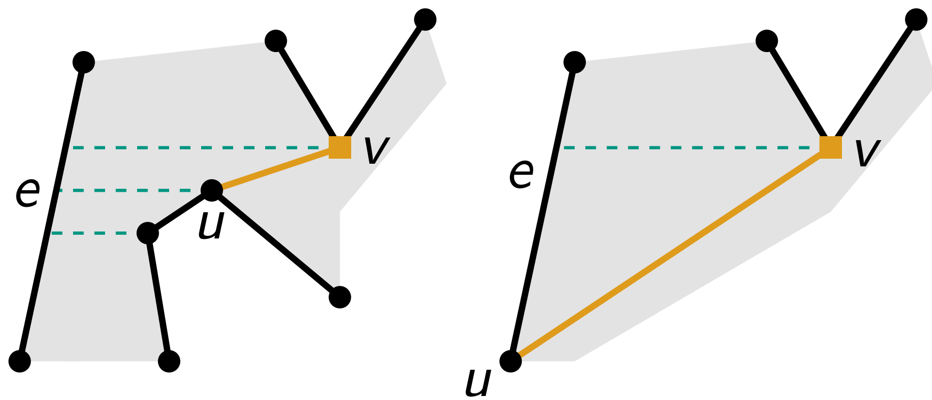




Behandlung von Merge-Knoten v

- e: Kante links neben v
- wähle für u den höchsten Knoten unter v, der e links von sich hat
- falls dieser nicht existiert: wähle für u unteren Knoten von e
- verbinde v mit u

Und was ist mit Merge-Knoten?



Behandlung von Merge-Knoten v

- e: Kante links neben v
- wähle für u höchsten Knoten unter v, der e links von sich hat
- falls dieser nicht existiert: wähle für u unteren Knoten von e
- verbinde v mit u

Problem

- die relevanten Infos liegen unterhalb von v
- Sweep-Line Algo kann Diagonale nicht bei Abarbeitung von v einfügen

Beobachtung

- v wird zunächst der Helfer von e
- u ist der nächste Helfer von e oder der Endpunkt von e
- Plan: eliminiere Merge-Knoten v erst bei Abarbeitung von u

Ersetze

$e =$ Kante links von u in T
helfer$(e) = u$

e_u^- = Kante vor u in P
entferne e_u^- aus T

Durch

$e =$ Kante links von u in T
$v =$ helfer(e)
wenn v ist Merge-Knoten
  gib Diagonale uv **aus**
helfer$(e) = u$

e_u^- = Kante vor u in P
$v =$ helfer(e)
wenn v ist Merge-Knoten
  gib Diagonale uv **aus**
entferne e_u^- aus T

Zusammenfassung

Theorem **(Zerlegung in y-monotone Teile)**
Ein gegebenes Polygon mit n Knoten kann in $O(n \log n)$ Zeit in y-monotone Teilpolygone zerlegt werden.

Außerdem gesehen

- weitere Anwendung der Sweep-Line Technik
- Konzept der Monotonie
- Aufteilung eines komplizierten Problems in zwei leichtere Teilprobleme

Was gibt es sonst noch?

- untere Schranke von $\Omega(n \log n)$ wenn das Polygon Löcher haben darf
- $O(n \log \log n)$, $O(n \log^* n)$, und sogar $O(n)$ möglich, wenn das Polygon keine Löcher hat
- entsprechendes 3-dimensionales Problem ist NP-schwer

Literaturhinweise

$O(n \log \log n)$

- **An $O(n \log \log n)$-Time Algorithm for Triangulating a Simple Polygon** (1988)
  Robert E. Tarjan, Christopher J. Van Wyk https://doi.org/10.1137/0217010
- **Polygon triangulation in $O(n \log \log n)$ time with simple data structures** (1992)
  David G. Kirkpatrick, Maria M. Klawe, Robert E. Tarjan https://doi.org/10.1007/BF02187846

$O(n \log^* n)$

- **A fast Las Vegas algorithm for triangulating a simple polygon** (1989)
  Kenneth L. Clarkson, Robert E. Tarjan, Christopher J. Van Wyk https://doi.org/10.1007/BF02187741
- **Randomization Yields Simple $O(n \log^* n)$ Algorithms for Difficult $\Omega(n)$ Problems**
  Olivier Devillers https://doi.org/10.1142/S021819599200007X (1992)
- **A simple and fast incremental randomized algorithm for computing trapezoidal decompositions and for triangulating polygons** (1991)
  Raimund Seidel https://doi.org/10.1016/0925-7721(91)90012-4

$O(n)$

- **Triangulating a simple polygon in linear time** (1991)
  Bernard Chazelle https://doi.org/10.1007/BF02574703
- **A Randomized Algorithm for Triangulating a Simple Polygon in Linear Time** (2001)
  N. M. Amato, M. T. Goodrich, E. A. Ramos https://doi.org/10.1007/s00454-001-0027-x