Zusatzaufgaben 04

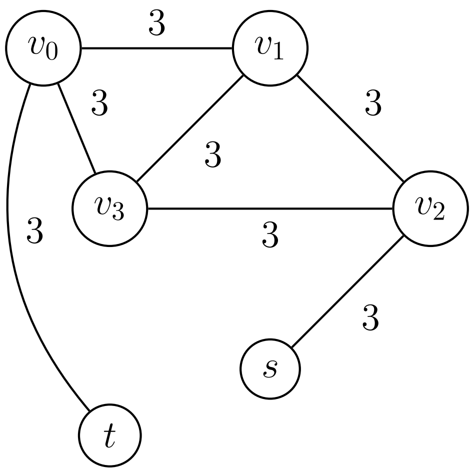
Algorithmen I – Sommersemester 2023

Gesamtpunkte: 27

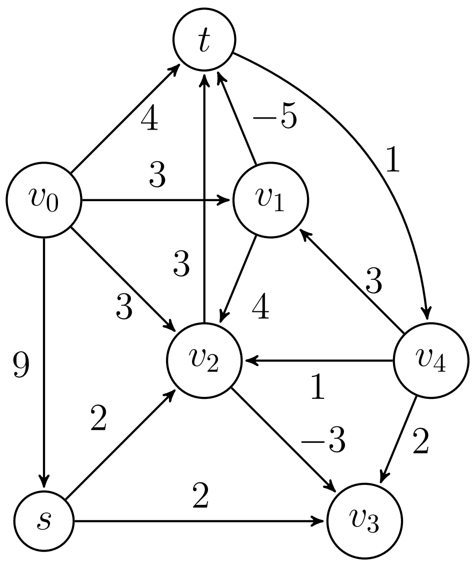
Aufgabe 1 - Nicht mit Kanonen auf Spatzen schießen! (8 Punkte)

Gegeben seien die folgenden drei Graphen:

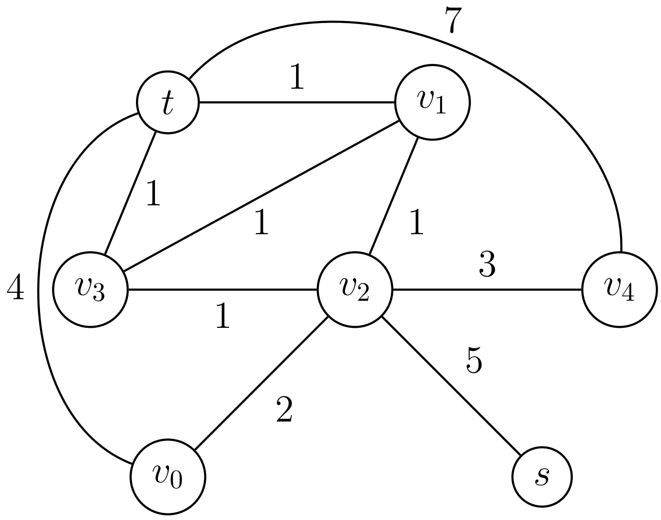
G_0:



G_1:



G_2:



1. Gib für jeden dieser Graphen an, welcher Algorithmus am Besten geeignet ist, um ein SSSP von einem beliebigen Knoten aus auf ihm zu lösen. Begründe deine Antwort. (3 Punkte)

2. Führe auf jedem der Graphen den von dir jeweils gewählten Algorithmus aus, um den kürzesten Pfad zwischen s und t zu bestimmen. Notiere dabei jede Änderung in den Distanzen zum Startknoten, die der Algorithmus bestimmt. Gib für jeden Graphen $\text{dist}(s, t)$ an. (5 Punkte)

Lösung 1

1. G_0: Breitensuche, denn alle Kanten haben das gleiche (nichtnegative) Gewicht, weswegen wir sie behandeln können, als wären sie ungewichtet

   G_1: BellmanFord, denn es gibt Kanten mit negativen Gewichten

   G_2: Dijkstra, denn Kanten haben unterschiedliche, aber nichtnegative Gewichte

2. Der Übersichtlichkeit halber sind in den folgenden Tabellen nur die Zellen gefüllt, bei denen sich eine Änderung zu der Zeile davor ergibt:

   G_0: $\text{dist}(s, t) = 12$
   Eine mögliche Lösung:

relaxierte Kante	$d[s]$	$d[t]$	$d[v_0]$	$d[v_1]$	$d[v_2]$	$d[v_3]$
	0	∞	∞	∞	∞	∞
(s, v_2)					3	
(v_2, v_1)				6		
(v_2, v_3)						6
(v_1, v_0)			9			
(v_0, t)		12				

G_1: dist$(s, t) = -\infty$

Iteration \ $d[.]/p[.]$	s	t	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
0	$0/s$	$\infty/\perp$	$\infty/\perp$	$\infty/\perp$	$\infty/\perp$	$\infty/\perp$	$\infty/\perp$
1					$2/s$	$2/s$	
2		$5/v_2$				$-1, v_2$	
3							$6/t$
4				$7/v_4$			
5		$2/v_1$					
6							$3/t$
7				$6/v_4$			

G_2: dist$(s, t) = 7$

Eine mögliche Lösung:

Knoten \ $d[.]/p[.]$	s	t	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
	$0/s$	$\infty/\perp$	$\infty/\perp$	$\infty/\perp$	$\infty/\perp$	$\infty/\perp$	$\infty/\perp$
s					$5/s$		
v_2			$7/v_2$	$6/v_2$		$6/v_2$	$8/v_2$
v_3		$7/v_3$					
v_1							
v_0							
t							
v_4							

Aufgabe 2 - Den Wald vor lauter Bäumen sehen (7 Punkte)

Im Rahmen der Vorlesung haben wir einen Baum definiert als einen kreisfreien zusammenhängenden Graphen. In dieser Aufgabe wollen wir uns noch etwas weiter mit Bäumen beschäftigen.

1. Zeige, dass in einem Baum $T = (V, E)$ der Pfad zwischen zwei beliebigen Knoten stets eindeutig ist. (2 Punkte)

2. Zeige, dass jeder Baum minimal zusammenhängend ist, also dass, wenn wir eine beliebige Kante entfernen, der Baum in Zusammenhangskomponenten zerfällt. (1 Punkt)

3. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei T ein minimaler Spannbaum von G. Beweise oder widerlege die folgende Aussage:
   Der eindeutige Pfad zwischen zwei Knoten $u, v \in V$ in T hat stets die gleiche Länge wie ein kürzester Pfad zwischen u und v in G. (1 Punkt)

4. Gib einen Graphen an, zu dem es mehr ale einen minimalen, aber nur einen maximalen Spannbaum gibt. (1 Punkt)

5. Gib einen Graphen an, bei dem die Algorithmen von Prim und Kruskal die Kanten des gleichen minimalen Spannbaums in unterschiedlicher Reihenfolge auswählen. Gib diesen minimalen Spannbaum an und nenne für den Algorithmus von Prim den Startknoten. (2 Punkte)

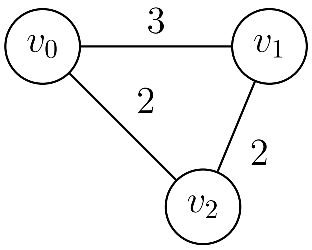
Lösung 2

1. Seien u, v zwei beliebige Knoten in T. Da T ein Baum und damit zusammenhängend ist, muss ein Pfad zwischen u und v existieren.
   Angenommen, der Pfad zwischen u und v in T sei nicht eindeutig. Dann gibt es zwei verschiedene Pfade $p = (u = x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k = v), q = (u = y_0, y_1, \ldots, y_{l-1}, y_l = v)$ zwischen u und v.
   Sei $(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j)$ der Teilpfad von p, der nicht in q enthalten ist und sei $(y_h, y_{h+1}, \ldots, y_g)$ der Teilpfad von q, der nicht in p enthalten ist. Da p und q verschieden sind, ist mindestens einer dieser beiden Pfade nicht leer.
   Dann bildet $(x_{i-1} = y_{h-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j, x_{j+1} = y_{g+1}, y_g, \ldots, y_{h+1}, y_h, y_{h-1})$ einen Kreis in T. $\lightning$ Widerspruch zu T ist Baum und damit kreisfrei

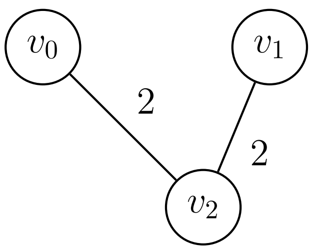
2. Sei $T = (V, E)$ ein beliebiger Baum. Angenommen, T ist nicht minimal zusammenhängend, d.h. es gibt eine Kante $e = \{u, v\} \in E$ so, dass $T' = (V, E \setminus \{e\})$ zusammenhängend ist. Dann gibt es in T' einen Pfad p zwischen u und v. Damit bildet p zusammen mit e einen Kreis in T. $\lightning$ Widerspruch zu T ist Baum und damit kreisfrei

3. Diese Aussage ist falsch. Der folgende Graph ist ein Gegenbeispiel:

G_0:



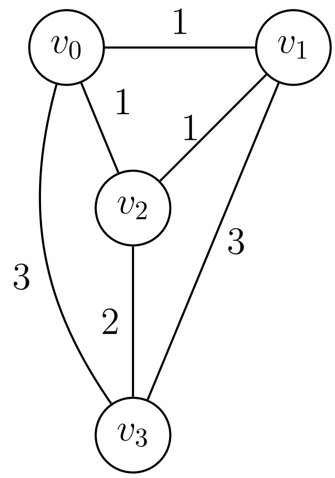
Der minimale Spannbaum wäre:
G_0:

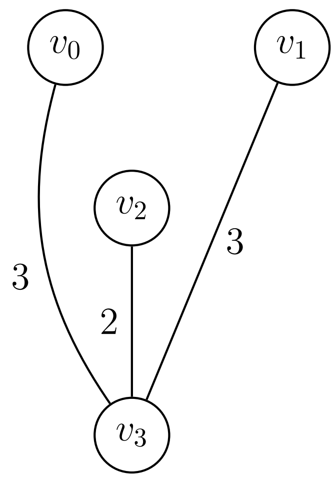


Hierbei wäre die Länge des eindeutigen v_0, v_1-Pfades 4, während im ursprünglichen Graphen die Länge des kürzesten v_0, v_1-Pfades 3 wäre.

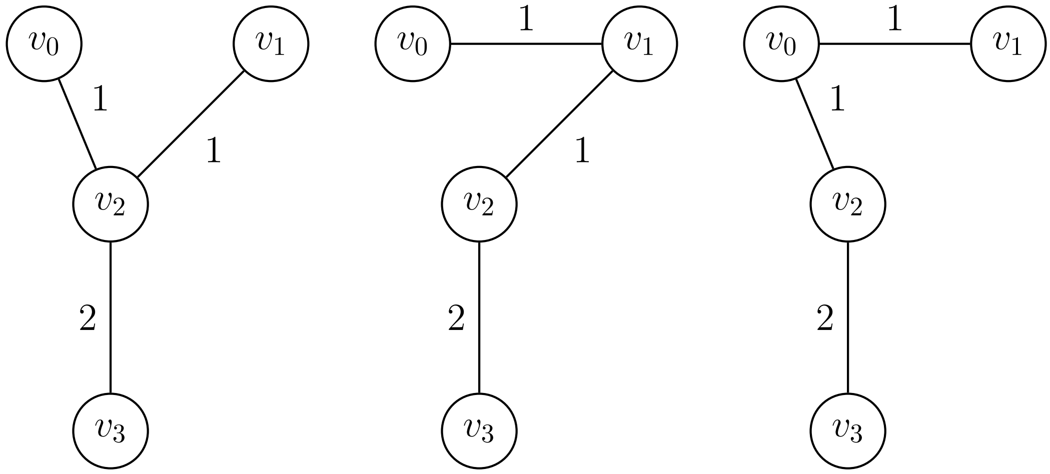
4. Der folgende Graph G wäre ein Beispiel. Der Graph rechts neben G ist dessen eindeutiger maximale Spannbaum:

   G:



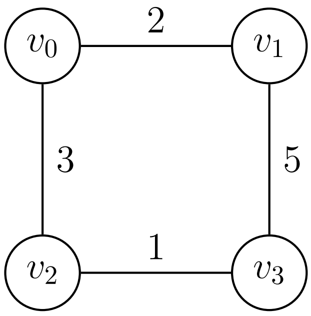


   Aber zu G_0 gibt es drei minimale Spannbäume:

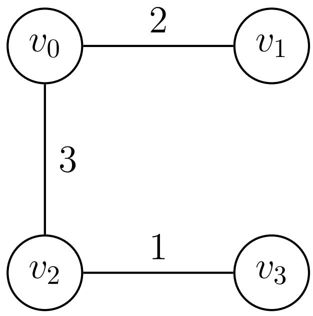


5. Der folgende Graph G wäre ein Beispiel. Der Graph rechts neben G ist dessen eindeutiger minimale Spannbaum:

G:



G:



   Der Algorithmus von Kruskal wird zuerst die Kante (v_2, v_3) für den MST auswählen. Wenn wir v_0 als Startknoten für den Algorithmus von Prim bestimmen, so wählt dieser als erstes die Kante (v_0, v_1).

Aufgabe 3 - Alle Wege führen nach ρ_m (6 Punkte)

Gegeben sei ein beliebiger Baum $T = (V, E)$. Wir bezeichnen den eindeutigen Pfad zwischen zwei Knoten $u, v \in V$ als $\texttt{via}(u, v)$.
In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass für beliebige Knoten ρ_0, ρ_1, ρ_2 die Schnittmenge der Pfade $\texttt{via}(\rho_0, \rho_1)$, $\texttt{via}(\rho_0, \rho_2)$ und $\texttt{via}(\rho_1, \rho_2)$ immer genau einen Knoten $\rho_m \in V$ enthält. Bearbeite dazu die folgenden Teilaufgaben:

1. Angenommen, ρ_0, ρ_1, ρ_2 liegen auf einem Pfad in T. Zeige die obige Aussage unter dieser Annahme. (2 Punkte)

2. Angenommen, es gibt keinen Pfad in T, der alle drei Knoten ρ_0, ρ_1, ρ_2 enthält. Zeige, dass je zwei der Pfade von $\mathtt{via}(\rho_0, \rho_1)$, $\mathtt{via}(\rho_0, \rho_2)$ und $\mathtt{via}(\rho_1, \rho_2)$ sich mindestens eine Kante teilen. (2 Punkte)

3. Zeige die obige Aussage nun unter den Annahme, dass es keinen Pfad in T gibt, der alle drei Knoten ρ_0, ρ_1, ρ_2 enthält. (2 Punkte)

Lösung 3

1. Sie P der Pfad, auf dem ρ_0, ρ_1, ρ_2 liegen. O. B.d.A. liegt ρ_1 in P nach ρ_0 und ρ_2 nach ρ_1, d.h. P ist von der Form

$$P = (x_0, \cdots, \rho_0, x_h, \cdots, x_i, \rho_1, x_j, \cdots, x_k, \rho_2, \cdots x_l)$$

Dann gibt es einen ρ_0, ρ_1-Pfad P_0 in T, nämlich $P_0 = (\rho_0, x_h, \cdots, x_i, \rho_1)$, einen ρ_1, ρ_2-Pfad P_1 in T, nämlich $P_1 = (\rho_1, x_j, \cdots, x_k, \rho_2)$ und einen ρ_0, ρ_2-Pfad P_2, nämlich $P_2 = (\rho_0, x_h, \cdots, x_i, \rho_1, x_j, \cdots, x_k, \rho_2)$. Nach Aufgabe 2.1) sind Pfade zwischen zwei beliebigen Knoten in einem Baum eindeutig, also gilt $P_0 = \mathtt{via}(\rho_0, \rho_1), P_1 = \mathtt{via}(\rho_1, \rho_2)$ und $P_2 = \mathtt{via}(\rho_0, \rho_2)$. Nach der Konstruktion durch den Pfad T teilen sich jedoch alle drei Pfade genau den Knoten ρ_1.

2. Wir nehmen das Gegenteil an, also dass mindestens zwei der Pfade sich keine Kante teilen. O.B.d.A. teilen sich $\mathtt{via}(\rho_0, \rho_1) = (\rho_0, x_a, \cdots, x_b, \rho_1)$ und $\mathtt{via}(\rho_1, \rho_2) = (\rho_1, x_c, \cdots, x_d, \rho_2)$ keine Kante. Dann können wir aber einen Pfad P konstruieren, der durch alle drei Knoten ρ_0, ρ_1, ρ_2 verläuft, indem wir diese $\mathtt{via}(\rho_0, \rho_1)$ und $\mathtt{via}(\rho_1, \rho_2)$ aneinanderhängen: $P = (\rho_0, x_a, \cdots, x_b, \rho_1, x_c, \cdots, x_d, \rho_2)$. ↯ Widerspruch dazu, dass kein solcher Pfad existiert, also müssen sich auch diese beiden Pfade eine Kante teilen

3. Nach Teilaufgabe 2 gibt es nun mindestens eine Kante $\{x, y\}$ die sich $\mathtt{via}(\rho_0, \rho_1)$ und $\mathtt{via}(\rho_0, \rho_2)$ teilen. Also sei o.B.d.A.
$\mathtt{via}(\rho_0, \rho_1) = (\rho_0, a, \cdots, x, y, \cdots, b, \rho_1)$ und
$\mathtt{via}(\rho_0, \rho_2) = (\rho_0, c, \cdots, x, y, \cdots, d, \rho_2)$. Dann können wir einen ρ_1-ρ_2-Pfad konstruieren, indem wir von zuerst von ρ_1 aus $\mathtt{via}(\rho_0, \rho_1)$ bis zu y rückwärts laufen und dann $\mathtt{via}(\rho_0, \rho_2)$ ab y zu ρ_2 vorwärts laufen: $P = (\rho_1, b, \cdots, y, \cdots, d, \rho_2)$. Wieder nach Aufgabe 2.1) muss die-

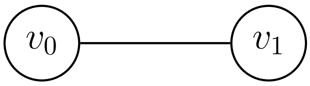
ser Pfad eindeutig sein, also $P = \texttt{via}(\rho_1, \rho_2)$. Damit teilen sich aber $\texttt{via}(\rho_0, \rho_1)$,$\texttt{via}(\rho_0, \rho_2)$ und $\texttt{via}(\rho_1, \rho_2)$ genau den Knoten y.

Aufgabe 4 - Falsch verbunden (6 Punkte)

Gegeben sei folgende vollständige Induktion:

Beh: Wenn jeder Knoten eines Graphen G mindestens Grad 1 hat, dann ist G zusammenhängend.

IA: Für $n = 2$ gelte:



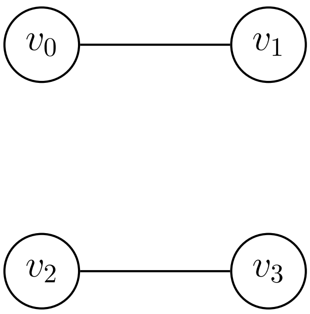
IV: Für ein beliebiges aber festes $k \leq n$ gelte, dass ein Graph mit k Knoten, bei dem jeder Knoten mindestens Grad 1 hat, zusammenhängend ist.

IS: Gegeben sei ein Graph G mit n Knoten, für den die Induktionsvorraussetzung gilt. In diesen fügen wir einen weiteren Knoten v so ein, dass dieser mindestens Grad 1 hat. Damit ist er mit mindestens einem Knoten u innerhalb des Graphen verbunden. Den entstehenden Graphen nennen wir G'. Da es einen Pfad $\{u, v\}$ gibt und man von u aus den restlichen Graphen erreichen kann, ist auch v vom ganzen Graphen aus erreichbar und damit ist G' zusammenhängend.

Diese Behauptung ist offensichtlich falsch.

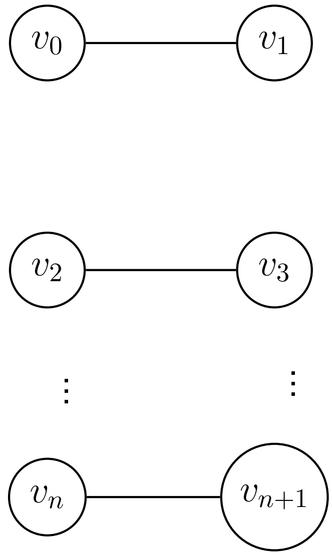
1. Finde ein Gegenbeispiel zu der Behauptung. (1 Punkt)
2. Wenn die Behauptung falsch war, wie konnten wir dann eine vollständige Induktion finden, die sie „beweist"? Finde heraus, an welcher Stelle der Fehler war. Was wurde übersehen und wie hätte man dies verhindern können? (2 Punkte)

Lösung 4

1. 

2. Diese Art der Konstruktion deckt nicht alle Graphen mit $n+1$ Knoten ab.

Zum Beispiel lässt sich der folgende Graph nicht mit dieser Konstruktion erreichen, obwohl er $n+1$ Knoten und jeder Knoten mindestens Grad 1 hat.



Würden wir jetzt einen beliebigen Knoten entfernen, sehen wir, dass der Graph nun einen Knoten mit Grad 0 hat, würde also unsere Induktionsvoraussetzung nicht erfüllen.