Zusatzaufgaben 04

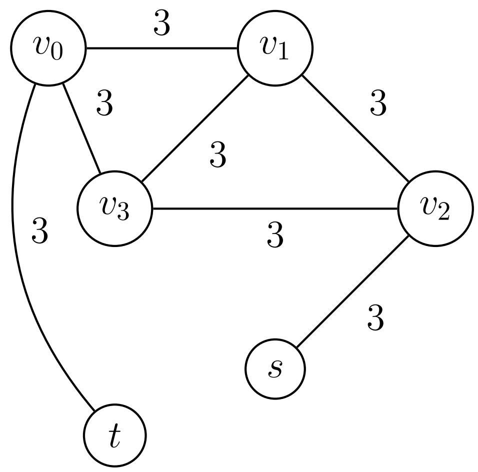
Algorithmen I – Sommersemester 2023

Gesamtpunkte: 27

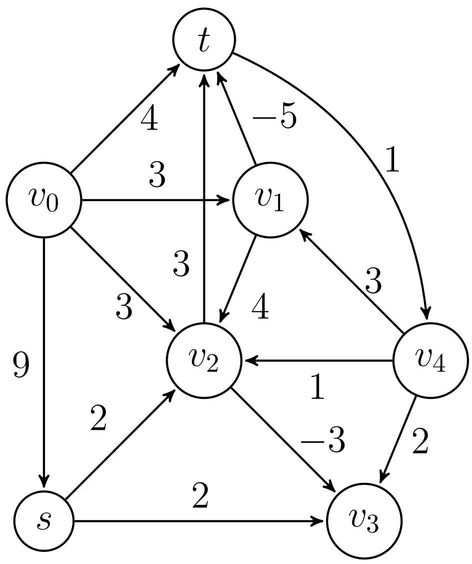
Aufgabe 1 - Nicht mit Kanonen auf Spatzen schießen! (8 Punkte)

Gegeben seien die folgenden drei Graphen:

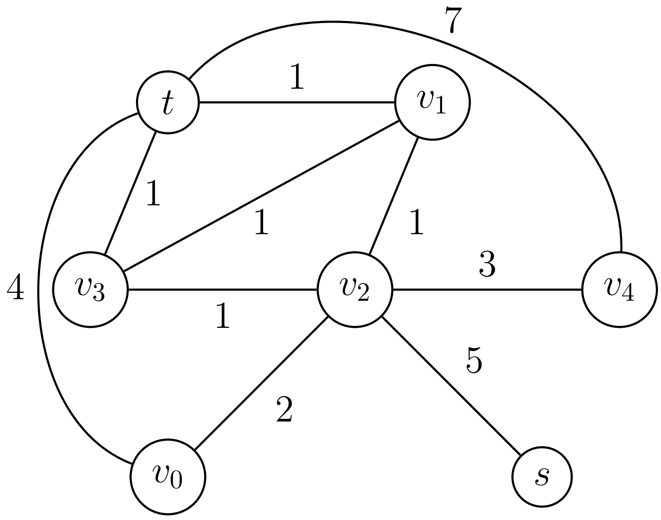
G_0:



G_1:



G_2:



1. Gib für jeden dieser Graphen an, welcher Algorithmus am Besten geeignet ist, um ein SSSP von einem beliebigen Knoten aus auf ihm zu lösen. Begründe deine Antwort. (3 Punkte)
2. Führe auf jedem der Graphen den von dir jeweils gewählten Algorithmus aus, um den kürzesten Pfad zwischen s und t zu bestimmen. Notiere dabei jede Änderung in den Distanzen zum Startknoten, die der Algorithmus bestimmt. Gib für jeden Graphen $\text{dist}(s, t)$ an. (5 Punkte)

Aufgabe 2 - Den Wald vor lauter Bäumen sehen (7 Punkte)

Im Rahmen der Vorlesung haben wir einen Baum definiert als einen kreisfreien zusammenhängenden Graphen. In dieser Aufgabe wollen wir uns noch etwas weiter mit Bäumen beschäftigen.

1. Zeige, dass in einem Baum $T = (V, E)$ der Pfad zwischen zwei beliebigen Knoten stets eindeutig ist. (2 Punkte)
2. Zeige, dass jeder Baum minimal zusammenhängend ist, also dass, wenn wir eine beliebige Kante entfernen, der Baum in Zusammenhangskomponenten zerfällt. (1 Punkt)

3. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei T ein minimaler Spannbaum von G. Beweise oder widerlege die folgende Aussage:
   Der eindeutige Pfad zwischen zwei Knoten $u, v \in V$ in T hat stets die gleiche Länge wie ein kürzester Pfad zwischen u und v in G. (1 Punkt)

4. Gib einen Graphen an, zu dem es mehr ale einen minimalen, aber nur einen maximalen Spannbaum gibt. (1 Punkt)

5. Gib einen Graphen an, bei dem die Algorithmen von Prim und Kruskal die Kanten des gleichen minimalen Spannbaums in unterschiedlicher Reihenfolge auswählen. Gib diesen minimalen Spannbaum an und nenne für den Algorithmus von Prim den Startknoten. (2 Punkte)

Aufgabe 3 - Alle Wege führen nach ρ_m (6 Punkte)

Gegeben sei ein beliebiger Baum $T = (V, E)$. Wir bezeichnen den eindeutigen Pfad zwischen zwei Knoten $u, v \in V$ als $\texttt{via}(u, v)$.
In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass für beliebige Knoten ρ_0, ρ_1, ρ_2 die Schnittmenge der Pfade $\texttt{via}(\rho_0, \rho_1)$, $\texttt{via}(\rho_0, \rho_2)$ und $\texttt{via}(\rho_1, \rho_2)$ immer genau einen Knoten $\rho_m \in V$ enthält. Bearbeite dazu die folgenden Teilaufgaben:

1. Angenommen, ρ_0, ρ_1, ρ_2 liegen auf einem Pfad in T. Zeige die obige Aussage unter dieser Annahme. (2 Punkte)

2. Angenommen, es gibt keinen Pfad in T, der alle drei Knoten ρ_0, ρ_1, ρ_2 enthält. Zeige, dass je zwei der Pfade von $\texttt{via}(\rho_0, \rho_1)$, $\texttt{via}(\rho_0, \rho_2)$ und $\texttt{via}(\rho_1, \rho_2)$ sich mindestens eine Kante teilen. (2 Punkte)

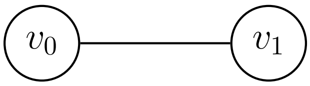
3. Zeige die obige Aussage nun unter den Annahme, dass es keinen Pfad in T gibt, der alle drei Knoten ρ_0, ρ_1, ρ_2 enthält. (2 Punkte)

Aufgabe 4 - Falsch verbunden (6 Punkte)

Gegeben sei folgende vollständige Induktion:

Beh: Wenn jeder Knoten eines Graphen G mindestens Grad 1 hat, dann ist G zusammenhängend.

IA: Für $n = 2$ gelte:



IV: Für ein beliebiges aber festes $k \leq n$ gelte, dass ein Graph mit k Knoten, bei dem jeder Knoten mindestens Grad 1 hat, zusammenhängend ist.

IS: Gegeben sei ein Graph G mit n Knoten, für den die Induktionsvorraussetzung gilt. In diesen fügen wir einen weiteren Knoten v so ein, dass dieser mindestens Grad 1 hat. Damit ist er mit mindestens einem Knoten u innerhalb des Graphen verbunden. Den entstehenden Graphen nennen wir G'. Da es einen Pfad $\{u, v\}$ gibt und man von u aus den restlichen Graphen erreichen kann, ist auch v vom ganzen Graphen aus erreichbar und damit ist G' zusammenhängend.

Diese Behauptung ist offensichtlich falsch.

1. Finde ein Gegenbeispiel zu der Behauptung. (1 Punkt)

2. Wenn die Behauptung falsch war, wie konnten wir dann eine vollständige Induktion finden, die sie „beweist"? Finde heraus, an welcher Stelle der Fehler war. Was wurde übersehen und wie hätte man dies verhindern können? (2 Punkte)