

Übungsblatt 12

Algorithmen I – Sommersemester 2023

Abgabe im ILIAS bis 21.07.2023, 18:00 Uhr

Die Abgabe erfolgt als *eine* PDF-Datei über das Übungsmodul in der Gruppe deines Tutoriums im ILIAS.

Beachte bitte die Hinweise zum Bearbeiten auf der Webseite.

Aufgabe 1 - Wahr oder falsch? (2 Punkte)

Entscheide für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist und gib jeweils eine kurze Begründung an.

- a) Seien a und b zwei Knoten in einem ungerichteten, gewichteten Graphen G . Dann gibt es einen minimalen Spannbaum von G der den kürzesten Pfad zwischen a und b enthält. (1 Punkt)
- b) Seien a und b zwei Knoten in einem ungerichteten, gewichteten Graphen G und sei T ein minimaler Spannbaum von G . Dann ist der eindeutige Pfad zwischen a und b in T ein kürzester Pfad in G . (1 Punkt)

Aufgabe 2 - DAGSE (10 Punkte)

Dammbruch im Oberstübchen: “Jetzt reicht’s!” Die vielen Schnitzer der Nager können nicht länger entschuldigt werden. Dr. Meta hat genug von den Nervensägen: “Diese Wasserratten müssen weg!” Natürlich war relativ zeitig abzusehen, dass Biber zwei linke (wenn auch niedliche) Pfoten haben, weswegen Meta bereits die Ablösung vorbereitet hat: *Die Dachse übernehmen!* Auch diese müssen zunächst in der Nation verteilt werden. Meta hat jedoch aus der Vergangenheit gelernt. Die Dachse werden zum Bahnhof gebracht, *nachdem* sie ihre Smartphones abgegeben haben. Dort angekommen weigern sich die neuen Gehilfen jedoch in die Züge zu steigen. Das Problem: Ein Dachs kann sich nur in DAGs bewegen. . .

Dr. Meta analysiert das Zugnetzwerk und findet folgendes heraus. Das Netzwerk ist zusammenhängend, *ungerichtet* und enthält Kreise. Außerdem gibt es für jede Strecke

zwischen zwei Bahnhöfen einen Zuverlässigkeitskoeffizienten, der misst, wie wahrscheinlich es ist, dass ein Zug die Strecke problemlos durchläuft. Interessanterweise kommt im ganzen Netzwerk kein Zuverlässigkeitswert zweimal vor.

Der Plan ist nun, sich erstmal nur um die Kreise zu kümmern. Meta möchte Strecken aus dem ungerichteten Netzwerk entfernen, sodass dieses azyklisch wird und die Summe der Zuverlässigkeiten der entfernten Strecken möglichst klein ist. Da es um die *Selektion unzuverlässiger Strecken* geht, bezeichnet Dr. Meta dieses Problem als SUS!

Meta beginnt direkt mit dem Brainstorming: Graphen, kreisfrei \rightarrow Spannbäume. Gewichte \rightarrow minimale Spannbäume. Womöglich kann hier ein MST Algorithmus helfen! Vorher sind jedoch ein paar Überlegungen notwendig...

- a) Modelliere SUS als Graphproblem und notiere alle bekannten Eigenschaften des Graphen, der das Zugnetzwerk widerspiegelt. (1 Punkt)
- b) Beweise unter Verwendung deiner Modellierung aus a), dass es im Zugnetzwerk keinen minimalen Spannbaum gibt, der die zuverlässigste Kante eines Kreises enthält. (3 Punkte)
- c) Beschreibe einen Algorithmus, der für das Zugnetzwerk einen Spannbaum mit *maximalem* Gewicht bestimmt. Begründe die Korrektheit des Algorithmus und zeige, dass er die asymptotische Laufzeit von Prim / Kruskal nicht überschreitet. (3 Punkte)
- d) Beschreibe einen Algorithmus, der das SUS-Problem auf dem Zugnetzwerk löst. Begründe außerdem die Korrektheit des Algorithmus und analysiere die Laufzeit. *Hinweis:* Die vorherigen Teilaufgaben sind hierfür hilfreich. (3 Punkte)

Aufgabe 3 - No News (8 Punkte)

Der NSA (Nachrichtendienst der SeeAdler) möchte wieder das Kommunikationssystem der Biber angreifen, wobei sie es jetzt auf das Telefonnetz abgesehen haben. Dieses Mal sollen aber nicht Falschinformationen in den Umlauf gebracht werden, stattdessen möchte der NSA dafür sorgen, dass sich eine Nachricht nicht über das gesamte Telefonnetz ausbreiten kann.

Von einem anonymen Maulwurf hat der NSA eine sortierte Liste mit direkten Telefonleitungen bekommen, die besonders einfach zu sabotieren sind. Diese Liste möchten sie nun von oben nach unten abarbeiten und die Leitungen nacheinander zerstören. Da stellt sich die Frage, ab welcher zerstörten Leitung eine Nachricht sich nicht mehr im gesamten Netz ausbreiten kann.

Wir möchten das Problem mithilfe eines (ungerichteten) Graphen modellieren. Dabei existiert eine Kante zwischen Knoten u und v , wenn u und v direkt miteinander telefonieren können.

- a) Wie viele Leitungen werden im Beispiel vom NSA zerstört bis sich eine Nachricht nicht mehr im gesamten Netz ausbreiten kann? (1 Punkt)

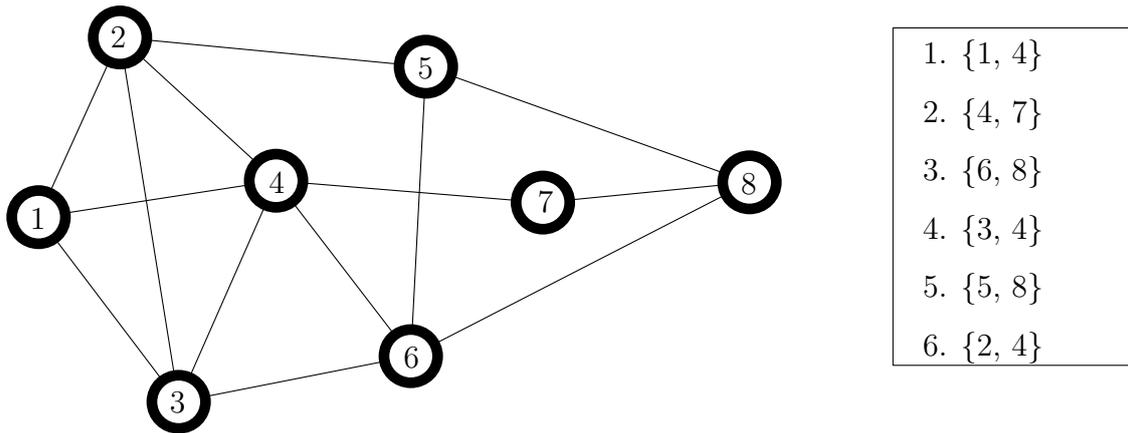


Abbildung 1: Telefonnetz der Biber mit Liste von Leitungen, die in gegebener Reihenfolge zerstört werden sollen.

- b) Beschreibe einen Algorithmus, der in $O(\ell \cdot (n + m))$ Zeit bestimmt, wie viele Leitungen vom NSA mindestens zerstört werden müssen. Dabei ist ℓ die Größe der Liste, n die Anzahl der Biber und m die Anzahl der Leitungen. (2 Punkte)
- c) Beschreibe einen Algorithmus, der für einen Graphen G und eine Liste L mit ℓ Kanten den Graphen G' bestimmt, der entsteht, wenn alle Kanten in L aus G gelöscht werden. Du darfst annehmen, dass G als Adjazenzliste gegeben ist und die Nachbarn jedes Knotens in (nach dem Index) sortierter Reihenfolge vorliegt. Begründe die Laufzeit deines Algorithmus. (2 Punkte)

Hinweis: Für eine Laufzeit von $O(\ell + m + n)$ gibt es die volle Punktzahl, schlechtere Laufzeiten geben Teilpunkte.

- d) Beschreibe einen Algorithmus, der in $O(n + m + \ell \cdot \log^*(\ell))$ Zeit bestimmt, wie viele Leitungen vom NSA mindestens zerstört werden müssen. Du kannst davon ausgehen, dass du in $O(n + m + \ell)$ eine Liste von ℓ Kanten aus dem Graphen löschen kannst. (3 Punkte)

Hinweis: Aus einer Union-Find-Datenstruktur kann man schlecht Kanten löschen, einfügen ist aber einfach!