

Übungsblatt 11

Algorithmen I – Sommersemester 2023

Abgabe im ILIAS bis 14.07.2023, 18:00 Uhr

Die Abgabe erfolgt als *eine* PDF-Datei über das Übungsmodul in der Gruppe deines Tutoriums im ILIAS.

Beachte bitte die Hinweise zum Bearbeiten auf der Webseite.

Aufgabe 1 - Toposort (6+2 Punkte)

In Übung 4 hast du einen Algorithmus gesehen, der einen DAG erkennt, indem er iterativ Quellen löscht. Dafür sollst du nun Pseudocode angeben. Zusätzlich zu dem gegebenen Graphen $G = (V, E)$ mit n Knoten und m Kanten speichern wir ein Array deg_{in} , das für jeden Knoten $v \in V$ seinen aktuellen Eingangsgrad $\text{deg}_{\text{in}}[v]$ enthalten soll.

- Beweise, dass ein DAG eine Quelle hat. (1 Punkt)
- Sei ein Graph $G = (V, E)$ und eine Quelle $q \in V$ gegeben. Gib einen Algorithmus in Pseudocode an, der die potenziell neu entstandenen Quellen ausgibt, die entstehen, wenn man q aus dem Graphen entfernt. Verwende folgende Signatur: (2 Punkte)

QUELLENNACHLÖSCHEN($G = (V, E) : \text{Graph}, q : \text{Node}$) : List<Node>

Hinweis: Passe das Array deg_{in} dabei entsprechend an.

- Gib einen Algorithmus in Pseudocode an, der als Eingabe einen Graphen G erhält und in Zeit $O(n + m)$ eine Liste der Knoten in topologischer Sortierung ausgibt. Wenn G kein DAG ist, soll die Liste leer sein. Verwende folgende Signatur: (3 Punkte)

TOPOSORT($G = (V, E) : \text{Graph}, \text{deg}_{\text{in}} : [\mathbb{N}, n]$) : List<Node>

Hinweis: Du kannst davon ausgehen, dass QUELLENNACHLÖSCHEN(G, q) Zeit $O(\text{deg}(q))$ braucht und dass das Array deg_{in} initial die richtigen Werte für G enthält. Überlege dir außerdem, wie du die aktuellen Quellen verwaltest.

- *) Beschreibe wie du Teilaufgabe c) umsetzen kannst, *ohne* Quellen tatsächlich aus dem Graph zu löschen. Begründe die Korrektheit deiner Anpassung. (2 Punkte)

Aufgabe 2 - Fake News (8+3 Punkte)

Der NSA (“Nachrichtendienst der SeeAdler”, wohl eher “Nicht-Subtile Abgucker!”) denkt sich die Nager-Spezial-Abteilung... plant eine hinterhältige Attacke gegen das FBI (Furchtloses Biber Indiziensammlerteam)! Durch das Streuen von Falschinformationen wollen sie das FBI sabotieren. Wenn allerdings zu viele Biber die Falschinformationen direkt vom NSA erhalten, ist die Gefahr des Auffliegens hoch. Daher sollen nur möglichst wenige Biber mit Falschinformationen versorgen, sodass aber trotzdem das gesamte FBI falsch informiert wird.

Dabei könnte ihnen das (allgemein bekannte) Kommunikationssystem des FBI helfen: Um Nachrichten schnell zu verbreiten, ist für jedes Mitglied festgelegt, an welche anderen Biber eine Nachricht weitergeben muss. Sobald ein Biber eine solche Nachricht erhält, wird diese weitergegeben. Es ist möglich, dass manche Biber von niemandem informiert werden und manche Biber niemanden informieren. Die Kommunikationswege sind allerdings unidirektional: Es ist also möglich, dass Biber Alice Biber Bob informieren muss, aber nicht umgekehrt.

Der NSA fragt sich jetzt, wie viele Biber sie denn mit Falschinformationen versorgen muss, um das gesamte FBI zu sabotieren.

- a) Wie kann die obige Situation mithilfe eines gerichteten Graphen modelliert werden? Was sind die n Knoten und m Kanten? (1 Punkt)
- b) Für einen gegebenen Biber möchte der NSA wissen, ob sie das ganze FBI sabotieren kann, indem sie nur diesen mit Falschinformationen versorgt. Beschreibe einen Algorithmus, der das Problem in Linearzeit löst. (2 Punkte)
- *) Beschreibe einen Algorithmus der in $O(n + m)$ bestimmt, ob der NSA das gesamte FBI sabotieren kann, indem sie genau einen (beliebigen) Biber mit Falschinformationen versorgt. Falls es einen solchen Biber gibt, soll dieser ausgegeben werden. (3 Punkte)

Wir nehmen nun an, dass das Kommunikationssystem des FBI so organisiert ist, dass der resultierende Graph keine Kreise hat.

- d) Beschreibe, wie der NSA bestimmen kann, wie viele Biber sie mindestens mit Falschinformationen versorgen muss, um das gesamte FBI zu sabotieren. (1 Punkt)

Jetzt nehmen wir zusätzlich an, dass die Kommunikationswege zwischen Bibern unterschiedlich lang sind. Wenn Biber A Nachrichten an Biber B weitergeben muss, ist $\text{MSGTIME}(A, B)$ die Zeit die eine Nachricht von A nach B braucht.

- e) Angenommen, der NSA hat die Biber aus Teilaufgabe d) bereits bestimmt und informiert. Beschreibe einen Algorithmus, der in $O(n + m)$ den frühesten Zeitpunkt bestimmt, zu dem alle Biber des FBI die Falschinformation erhalten haben. (4 Punkte)

Hinweis: Hier könnte eine Eigenschaft von DAGs hilfreich sein.

Aufgabe 3 - Holztransport (6 Punkte)

Nach dem missglückten Bau eines großen Staudamms in Rostock befinden sich dort nun große Mengen an ungenutzten Baumstämmen, welche die Biber in andere Städte transportieren sollen. Da auf dem Weg durch die Flüsse, Kanäle und Bäche teilweise Untiefen, Felsen und Wasserfälle liegen, ist es notwendig jeden Baumstamm mit einer Gruppe aus Bibern zu begleiten. Für jedes Gewässer g gibt $b_{\min}(g)$ an, wie viele Biber einen Baumstamm begleiten sollten, damit dessen Transport sicher ist.

Da die Biber noch viele andere Aufgaben haben, muss jeder Baumstamm mit möglichst wenigen Bibern verschifft werden. Wir möchten deswegen nun für jede Stadt v die kleinste Anzahl Biber $b(v)$ bestimmen, die ausreicht, um einen Baumstamm von Rostock nach v zu transportieren, ohne dabei Gewässer zu passieren, bei denen mehr als $b(v)$ Biber für einen sicheren Transport notwendig sind.

- a) Beschreibe, wie dieses Problem als ein Problem auf einem gewichteten Graphen modelliert werden kann. Gib dabei die Bedeutung von Knoten, Kanten und Kantengewichten an, sowie die Eigenschaften einer korrekten Ausgabe. (2 Punkte)
- b) Beschreibe einen Algorithmus, der dieses Problem löst. Begründe die Korrektheit deines Algorithmus und nenne und begründe seine asymptotische Laufzeit. (4 Punkte)

Hinweis: Überlege, wie du hier einen Algorithmus anwenden kannst, der vor kurzem in der Vorlesung vorgestellt wurde.

Übungsblatt-Ende wird nach der Anzeige dargestellt

Hol dir *Übungsblatt Premium*, um deine Lieblingsaufgaben ohne Werbeunterbrechung sehen zu können!

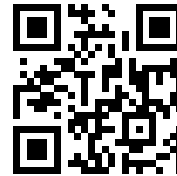


Eulenfest am 13. Juli 2023

Nächste Woche Donnerstag findet endlich wieder das Eulenfest statt! Los geht es um 18:30 Uhr, im und um den Infobau. Dieses Jahr gibt es Livemusik von den Bands *Jon Doe* und *Carry on Atlas*. Natürlich haben wir auch wieder DJs und Karaoke. Außerdem werdet ihr mit Getränken und Essen versorgt. Weitere Infos zum Fest findet ihr unter eulen.party.

Gerne könnt ihr uns mit einer Helferschicht unterstützen. Tragt euch dafür einfach auf der Website ins Helfersystem ein.

Wir suchen auch noch tatkräftige Unterstützung für unser Sicherheitsteam. Hierfür brauchst du keine besonderen Qualifikationen oder viel Erfahrung, es wird aber vor dem Fest eine ausführliche Einweisung geben. Falls du Interesse hast, melde dich bei Max (max.vogel@fsmi.uni-karlsruhe.de) per Mail. Ebenfalls suchen wir Personen mit Sanitätsausbildung, hierfür kannst du dich gerne bei Patrick (patrick.schneider@fsmi.uni-karlsruhe.de) melden.



Mehr Infos